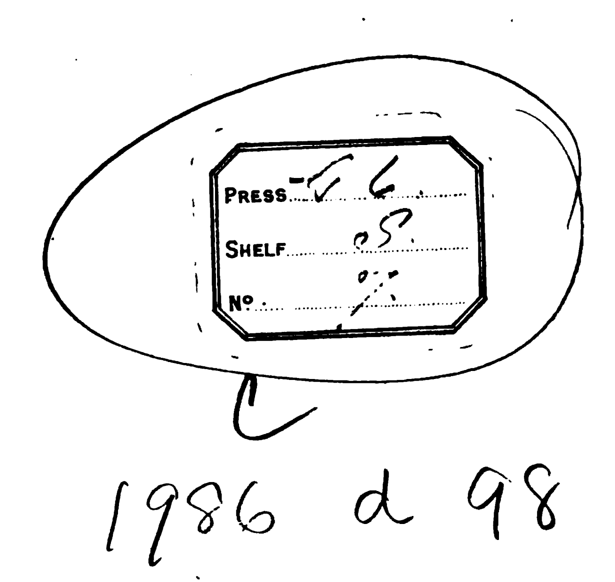



600026737V


PRESS
SHELF
No







THEORIE

DER

ELASTICITÄT, AKUSTIK UND OPTIK.

Von

PROF. DR. HERMANN KLEIN

GYMNASIALLEHRER IN DRESDEN.

ZUGLEICH ALS SUPPLEMENT

ZU DEM LEHRBUCH DER PHYSIK VON DR. PAUL REIS.

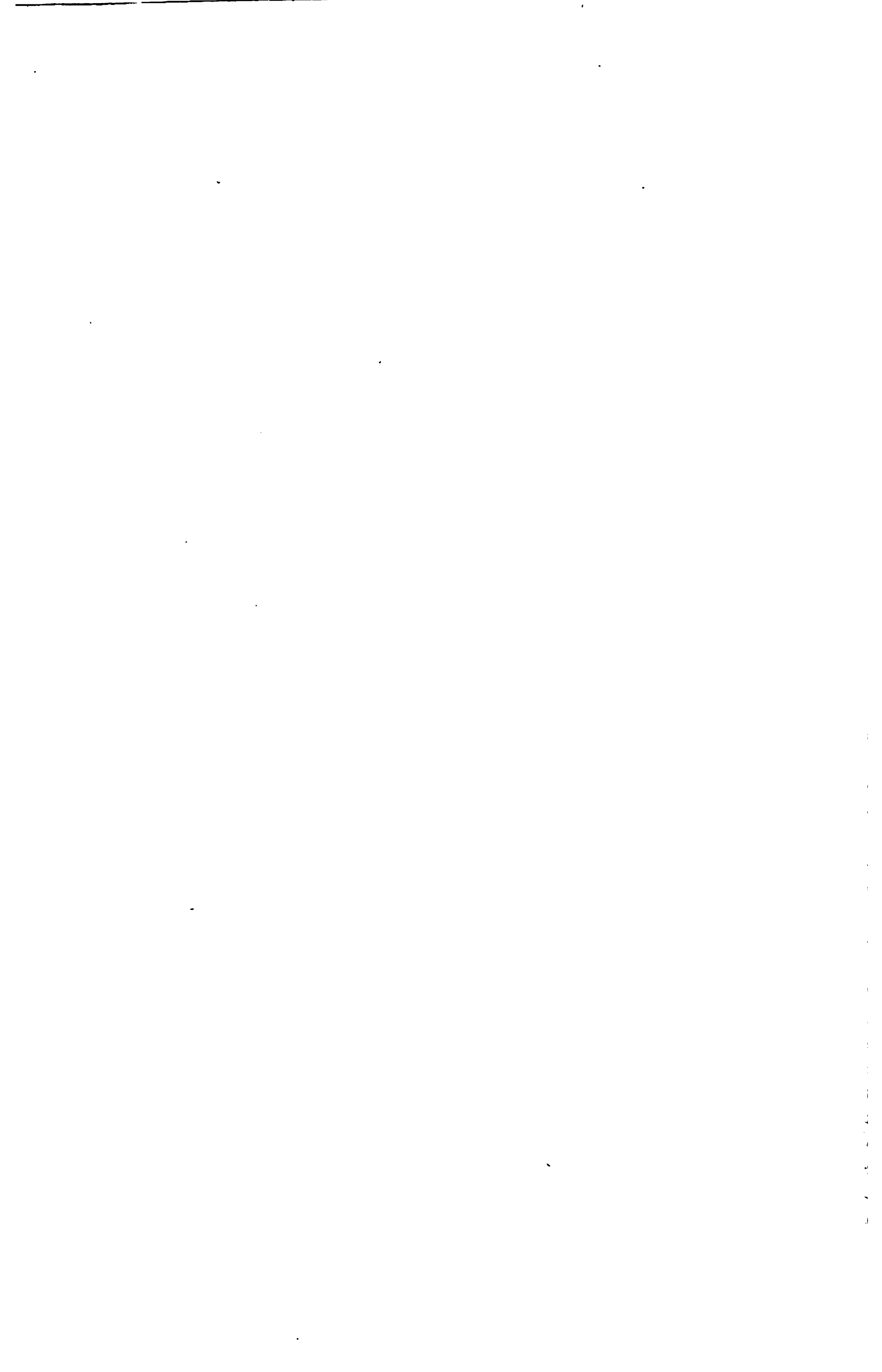


MIT 104 HOLZSCHNITTEN IM TEXT.

LEIPZIG

VERLAG VON QUANDT & HÄNDEL.

1877.



VORWORT.

Die im vorliegenden Buche unternommene mathematische Behandlung der Elasticität, Akustik und Optik ist eine Erweiterung eines jeden Lehrbuchs der Experimentalphysik, kann somit als ein selbstständiges Werk angesehen und auch ohne das Lehrbuch der Physik von Dr. Paul Reis gebraucht werden. Um aber das Studium der Theorieen zu erleichtern und den Umfang des Buches möglichst zu beschränken, habe ich die einzelnen Erörterungen an das genannte Lehrbuch angeschlossen und zwar so, dass die Ueberschriften der einzelnen Paragraphen beibehalten sind und das dort nur Angedeutete mathematisch ausgeführt ist. Durch diese Anordnung ist es möglich geworden, von der Anführung aller durch Beobachtung gewonnenen Thatsachen und der experimentellen Bestätigungen der Theorieen abzusehen. Da hier die Grenzen wegfallen, welche einem Lehrbuch in Bezug auf das zu verwendende mathematische Material gesteckt sind, werden die einzelnen Theorieen so entwickelt, wie sie von den betreffenden Forschern angestellt worden sind.

Das Lehrbuch von P. Reis habe ich zu Grunde gelegt, weil der Verfasser desselben überall mathematische Deduction angestrebt und das Beobachtungsmaterial mit der grösstmöglichen Vollständigkeit gesammelt hat.

Zweimal habe ich für nöthig gehalten, Anhänge anzufügen. Einmal bei der Theorie der Elasticität, denn die daselbst behandelten Gegenstände konnten keinem Paragraph des Lehrbuchs angeschlossen werden, durften aber wegen deren Anwendung auf die Theorie der Schwingungen in der Akustik nicht fehlen. Dann findet sich ein Anhang bei der Reflexionstheorie, weil diese theoretischen Untersuchungen einen Gegenstand behandeln, dem sich die Forscher besonders zuwenden werden, nachdem man angefangen hat, bei dem Uebergang der Aetherschwingungen in einen gleichzeitig von Massen- und Aethertheilchen angefüllten Raum den Einfluss der Bewegungen der Massentheilchen zu berücksichtigen, um dadurch die mathematische Theorie der Lichtschwingungen in vollkommene Uebereinstimmung mit den Beobachtungen und den Hypothesen über die Constitution der Materie zu bringen.

Historische Bemerkungen und Angaben der Literatur habe ich für unnöthig gehalten, weil in dem zu Grunde gelegten Lehrbuch die Namen der Gelehrten angeführt sind, welche bei Erforschung der behandelten Erscheinungen oder Gesetze eine hervorragende Rolle spielen, so dass es dadurch nun leicht ist, mit Hülfe eines biographisch-literarischen Wörterbuchs die betreffenden Abhandlungen zu finden. Die Arbeiten aber, welche bei den einzelnen Abschnitten benutzt worden sind, habe ich meistens entweder bei den einzelnen Nummern oder im Zusammenhang bei den einzelnen Paragraphen angegeben.

Ich hatte eigentlich den Wunsch, ein vollständiges Handbuch der Physik, welches alle Gebiete eines Lehrbuchs der Physik einer theoretischen Erörterung unterzöge, zu schaffen und habe mich deswegen an mehrere meiner Herren Fachgenossen gewendet, um ein solches Handbuch im Anschluss an Reis in kürzester Zeit zu Stande zu bringen. Leider konnte ich aber, obgleich die betreffenden Herren meistentheils mit meinem Plane einverstanden waren, Niemanden zum Mitarbeiten bewegen. Ich musste deshalb das Unternehmen beschränken und hielt es vor Allem für nöthig, die Lehren der Akustik und Optik zu erweitern, da die theoretische Behandlung der hierher gehörigen Probleme nicht in einem neueren Buche zusammengefasst ist, während wir ausführliche Werke über theoretische Mechanik, Wärme, Electricität und Galvanismus besitzen. Obwohl auch theoretische Behandlungen der Elasticität schon vorhanden sind, schien doch eine solche auch in diesem Werke unerlässlich als Einleitung zur Darstellung der Akustik und Optik.

Das Buch soll zunächst allen Lehrern der Physik einen bequemen Ersatz für die oft schwer zu erlangenden Originalarbeiten bieten, sodann besonders den Studirenden auf Universitäten und technischen Hochschulen einen Dienst erweisen, wenn sie sich mit der theoretischen Behandlung physikalischer Probleme bekannt machen wollen.

Obgleich nun weder neue Resultate noch durchaus neue Entwickelungen gebracht werden, so ist doch die hier unternommene Zusammenstellung mit Benutzung des in den Originalarbeiten verwendeten mathematischen Apparates neu und ich bitte daher um nachsichtige Beurtheilung, wenn mein Streben hinter den Wünschen der Leser zurückgeblieben ist, und um gefällige Unterstützung für eine spätere Verbesserung und Vervollständigung.

Dresden, im October 1877.

Der Verfasser.

Uebersicht des Inhalts.

I. Elasticität.

Anhang.

II. Wellenbewegung, Akustik.

III. Optik.

Verbesserungen.

Seite 7 Zeile 12 von unten lies „$\mu m'$“ statt „$m\mu'$“.

„ 7 „ 1 „ „ „ „n'“ „ „$'n$“.

„ 19 „ 15 „ oben „ „$\frac{\xi^2}{P_1^2}$“ „ „$\frac{\xi'}{P_1^2}$“.

„ 30 „ 4 „ „ „ „$\Sigma p_n' v_n'$ statt „$\Sigma p_n' z_n'$“.

„ 30 „ 8 „ unten „ „$\frac{\lambda_n}{\lambda_n} z_n E$“ statt „$\frac{z_n}{\lambda} . E$“.

„ 31 „ 1 „ oben „ „$E \Sigma q_n z_n^2$“ statt „$E \Sigma q_n z_n^2$“.

„ 53 „ 6 „ unten entferne „Schachtgestänge“.

„ 99 „ 11 „ oben lies „(e.)“ statt „(c.)“.

„ 99 „ 17 „ „ „ „$\frac{Z}{Eq}$“ „ „$\frac{z}{Eq}$“.

„ 109 „ 10 „ „ „ „$\frac{d^2\varphi}{ds^2}$“ „ „$\frac{d^2\varphi}{ds}$“.

„ 144 „ 1 „ unten „ „$\sin\left(x + \frac{n}{2} y\right)$“ statt „$\cos\left(x + \frac{n}{2} y\right)$“.

„ 145 „ 11 „ „ „ „$\cos(\gamma_r + a_r)$“ „ „$\sin(\gamma_r + a_r)$“.

„ 147 „ 4 „ oben und 12 von unten „Fig. 144 ... des Lehrbuchs“.

„ 220 „ 2 „ ergänze der Normale „nach Innen“.

„ 220 „ 3 „ oben lies „$-\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega$“ statt „$\int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega.$“

„ 220 „ 5 „ „ „ „$-\int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega$“ „ „$\int U \frac{\partial V}{dn} d\omega.$“

„ 327 „ 6, 5 u. 4 v. unten lies überall „$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$“ statt „$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$“.

„ 465. Die Gleichungen (o) beginnen rechts mit „—“

I. Elasticität.

Die Elasticität und deren Gesetze. (§ 64.)

1. Aufstellung der Gleichungen des Gleichgewichtes.

Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen der Kräfte, welche an einem Körper angreifen, wird im Allgemeinen abgesehen von einer Veränderung der gegenseitigen Lage der kleinsten Theile dieses Körpers. Diese Vernachlässigung ist aber nur so lange gestattet, als sie sich auf Grössen bezieht, die im Vergleich mit den zu besprechenden als unmerklich klein erscheinen. Wenn wir nun aber einen Körper nicht als starr, sondern als elastisch betrachten, so müssen wir die kleinen Gestaltsveränderungen, denen der Körper unterworfen ist, berücksichtigen. Bei Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen unter Berücksichtigung dieser Veränderungen begnügen wir uns abermals mit einer Annäherung, indem wir die Verschiebungen der kleinsten Theile des Körpers als so klein betrachten, dass höhere als die erste Potenz gegen diese wiederum verschwinden. Indem wir ferner die Verschiebungen klein setzen gegen die Dimensionen des Körpers, schliessen wir aus unserer Betrachtung alle die Körper aus, denen die Eigenschaft der Elasticität im hohen Grade zukommt, wie z. B. Kautschuk, da uns für deren Studium die erfahrungsmässige Kenntniss noch fehlt.

Wir denken uns aus dem Innern eines Körpers ein sehr kleines rechtwinkliges Parallelepipedum herausgeschnitten, und zwar durch Ebenen, welche parallel sind den Coordinatenebenen eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und bezeichnen die Kanten desselben mit dx, dy, dz. Auf dieses Körperelement wirken Kräfte verschiedener Art, einmal nämlich giebt es solche, welche auf die Masse wirken, z. B. die Schwerkraft, dann solche, welche an dessen Oberfläche angreifen. Letztere, die Spannungen, sind hervorgerufen durch die Verschiebungen der einzelnen Moleküle und entgegengesetzt den äusseren Kräften, sie sind also jedenfalls verschieden an verschiedenen Punkten des Körpers und damit Funktionen der Coordinaten des Punktes, an dem sie angreifen. In Bezug auf diese Spannungen können wir jedenfalls die Annahme machen, dass sie von derselben Ordnung sind, wie die Oberflächen, auf die sie wirken, so dass wir sie darstellen können als ein Produkt, dessen einer Faktor die Oberfläche und dessen anderer eine

Grösse ist, welche die Kraft auf die Flächeneinheit bezeichnet. Analoges lässt sich bestimmen über die auf die Masse wirkenden Kräfte, so dass diese für ein Volumenelement ein Kleines der dritten Ordnung werden.

Die Oberflächenkräfte müssen nun mit den Kräften auf die Masse im Gleichgewichte sein. Daraus geht hervor, dass die ersteren bis auf unendlich Kleines sich selbst im Gleichgewicht halten, oder doch diese Kräfte an verschiedenen Seiten des unendlich kleinen Parallelepipedums nur um eine unendlich kleine Grösse differiren. Die Spannungen müssen sich also innerhalb des Körpers stetig ändern, da sie sich für unendlich kleine Veränderungen des Ortes auch nur um unendlich Kleines ändern.

Im Allgemeinen werden diese Spannungen nicht senkrecht auf die Oberfläche wirken. Wir zerlegen jede in eine Kraft senkrecht zur Ebene und in eine parallel derselben. Die zur Ebene senkrechte Componente heisst Normalspannung und zwar entweder Zug oder Druck, je nachdem sie die auf beiden Seiten der Ebene liegenden Theile zu entfernen oder zu nähern strebt. Die in der Ebene selbst liegende Componente heisst Schub- oder Tangentialspannung.

Die Spannungen seien mit P bezeichnet und zwar je nachdem sie wirken auf Ebenen senkrecht zur x, y, z Axe mit P_x, P_y, P_z. Die Normalspannungen werden mit N und die Tangentialspannungen mit T bezeichnet.

Wir zerlegen nun sämmtliche Spannungen in drei Componenten parallel den Coordinatenaxen. N_1, N_2, N_3 bezeichnen die Normalspannungen auf die Flächeneinheit der Elemente, $dy\,dz$, $dx\,dz$, $dx\,dy$, und T_{xy}, T_{xz}; T_{yx}, T_{yz}; T_{zx}, T_{zy}, die auf dieselben Flächeneinheiten bezogenen Tangentialspannungen zerlegt nach den Coordinatenaxen, so dass der erste Index die Coordinate bezeichnet, auf der die Ebene senkrecht steht, in der die Componente wirkt und der zweite die Richtung derselben giebt. Es ist mithin

$$P_x^2 = N_1^2 + T_{xy}^2 + T_{xz}^2,$$
$$P_y^2 = N_2^2 + T_{yx}^2 + T_{yz}^2,$$
$$P_z^2 = N_3^2 + T_{zx}^2 + T_{zy}^2.$$

Die Kräfte, welche auf die Masseneinheit wirken, sollen auch nach den Coordinatenaxen zerlegt und deren Componenten durch X, Y, Z bezeichnet werden.

Nach den oben gemachten Erörterungen über die Veränderungen dieser Spannungen ändern sich diese Componenten so, dass sie für Ebenen des Parallelepipedums, welche von den ihnen parallelen um dx, dy, dz entfernt sind, folgende Werthe erhalten:

$$N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx, \quad T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx, \quad T_{xz} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} dx,$$
$$N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy, \quad T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} dy, \quad T_{yz} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} dy,$$
$$N_3 + \frac{\partial N_3}{\partial z} dz, \quad T_{zx} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} dz, \quad T_{zy} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} dz.$$

Diese Spannungen wirken den ersten entgegen. Versetzen wir nun sämmtliche Spannungen sowie die Componenten der von Aussen wirkenden Kräfte nach dem Schwerpunkte des Parallelepipedums, so erhalten wir, wenn wir mit dx dy dz dividiren, als Gleichgewichtsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \qquad \text{(A.)} \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen, welche die Bedingung enthalten, dass keine Drehung stattfinden soll, werden sich zusammensetzen aus Grössen, die unendlich klein der ersten und zweiten Ordnung sind. Letztere Grössen aber sollen unserer Annahme nach wegfallen. Die Gleichungen werden nach Division durch dx dy dz folgende:

Keine Drehung um die x Axe: $T_{yz} = T_{zy}$,
- - - - y - : $T_{xz} = T_{zx}$,
- - - - z - : $T_{xy} = T_{yx}$.

Dadurch reduciren sich die neun Spannungen auf sechs von einander verschiedene Grössen.

Zu diesen Gleichungen kommen nun noch drei andere, welche sich auf die Körperoberfläche beziehen; denn es wird nicht immer möglich sein, einen Körper in lauter Parallelepipeda zu zerlegen. Nehmen wir ein Oberflächenelement ABC, welches begrenzt ist von Ebenen parallel den Coordinatenebenen. Das Körperelement begrenzt von ABC und den genannten drei Ebenen hat die Form eines Tetraeders. Die Spannungen auf die den Coordinatenebenen parallelen Ebenen sind dann Grössen der zweiten Ordnung, ebenso die auf die äussere Fläche ABC wirkende Kraft, während die auf die Masse wirkende Kraft ein unendlich kleines der dritten Ordnung ist und also gegen die anderen Kräfte vernachlässigt werden muss. Sei nun P die Kraft, welche auf die Einheit der Körperoberfläche wirkt, und seien $\pi, \varkappa, \varrho$ die Winkel deren Richtung mit den Coordinatenaxen, so sind, wenn mit p, q, r die Winkel bezeichnet werden, welche die Normale zu ABC mit den Axen bildet, die zu den x, y, z Axen senkrechten Begrenzungselemente ABC cos p, ABC cos q, ABC cos r. Man erhält also nach Division mit ABC die Gleichgewichtsgleichungen:

$$\begin{aligned} N_1 \cos p + T_{xy} \cos q + T_{xz} \cos r &= P \cos \pi, \\ T_{yx} \cos p + N_2 \cos q + T_{yz} \cos r &= P \cos \varkappa, \qquad \text{(B.)} \\ T_{zx} \cos p + T_{zy} \cos q + N_3 \cos r &= P \cos \varrho. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen bedeuten die Spannungen auf die Oberfläche projicirt auf die drei Axen und die linken Seiten die Projectionen der Kräfte, welche auf eine Fläche senkrecht zu den Axen wirken, auf die Normale derselben Oberfläche. Dieses damit gefundene allgemeine Princip heisst: Sind AB und AC zwei beliebige Richtungen, so ist für den

Punkt A die nach AB genommene Spannung auf die zu AC senkrechte Ebene gleich der nach AC genommenen Spannung auf die zu AB senkrechte Ebene.

Die gefundenen Gleichungen können leicht auf Bewegung übertragen werden, wenn die Trägheitskräfte nach dem Princip von D'Alembert eingeführt werden, nachdem die Verschiebungen bestimmt worden sind. Die Untersuchung der so abgeleiteten Gleichungen findet sich in der Wellenbewegung.

Es ist klar, dass die sechs Gleichungen (A) und (B) nicht zur Bestimmung der sechs Spannungen ausreichen; denn das System (B), welches an der Oberfläche stattfindet, kann nur zur Bestimmung der willkürlichen Constanten, welche bei der Integration von (A) hereinkommen, genommen werden.

2. Einführung der Verschiebungen für die Spannungen.

Wir bezeichnen die Verschiebungen parallel den Coordinatenaxen mit u, v, w, so dass durch Einführung dieser Grössen die sechs Unbekannten auf drei reducirt werden.

Die Coordinaten der dem Anfangspunkt zugewandten Ecke unseres Parallelepipedums seien x, y, z. Durch die Verschiebungen, welche die äusseren Kräfte bewirken, werden die Coordinaten dieses Punktes $x + u$, $y + v$, $z + w$. Die Verschiebungen sind nun für die verschiedenen Punkte eines Körpers im Allgemeinen verschieden, sie sind Functionen des Ortes desselben, also von x, y, z und zwar können wir annehmen, dass sie stetige Functionen der Coordinaten sind; denn wenn wir auch zugeben müssen, dass jeder Körper zusammengesetzt ist aus getrennt liegenden Molekülen, so können wir dann noch die Verschiebungen beziehen auf die zwischen den materiellen Theilchen liegenden Punkte und diese durch u, v, w bestimmen.

Man erhält nun die Verschiebungen der anderen drei Ecken des Parallelepipedums, welche an die obige anstossen, und die Coordinaten

$$\begin{array}{lll} x + dx, & y, & z, \\ x, & y + dy, & z, \\ x, & y, & z + dz \end{array} \text{ haben,}$$

wenn man in den Funktionen u, v, w setzt 1) $x + dx$ statt x, 2) $y + dy$ statt y und 3) $z + dz$ statt z. Nach dem Taylor'schen Lehrsatze sind demnach mit Berücksichtigung der nach dem Obigen erlaubten Vernachlässigungen die Coordinaten der drei verschobenen Ecken:

$$\begin{array}{lll} x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, & x + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, & z + w + \frac{\partial w}{\partial x} dx, \\ x + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, & y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy, & z + w + \frac{\partial w}{\partial y} dy, \\ x + u + \frac{\partial u}{\partial z} dz, & y + v + \frac{\partial v}{\partial z} dz, & z + dz + w + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{array}$$

Man erhält dann die Projectionen der verschobenen und verlängerten Kanten, wenn man die Coordinaten des verschobenen ersten Eckpunktes von den eben gefundenen Werthen abzieht. Diese Projectionen sind:

$$\begin{array}{lll} \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx, & \frac{\partial v}{\partial x} dx, & \frac{\partial w}{\partial x} dx, \\ \frac{\partial u}{\partial y} dy, & \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy, & \frac{\partial w}{\partial y} dy, \\ \frac{\partial u}{\partial z} dz, & \frac{\partial v}{\partial z} dz, & \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) dz. \end{array} \qquad \text{(C.)}$$

Die Quadrate der Kanten sind nun die Summen der Quadrate ihrer Projectionen. Dann erhält man das Quadrat der veränderten Kanteneinheiten, wenn man mit dx^2, dy^2, dz^2 dividirt. Bezeichnet man ferner die Längeneinheitsänderung (specifische Längenänderung) projicirt auf die Axen mit α, β, γ, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 &= (1+\alpha)^2, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 &= (1+\beta)^2, \qquad \text{(D.)} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 &= (1+\gamma)^2. \end{aligned}$$

Wenn ferner a, b, c die Richtungen der Kanten des ursprünglichen und a′, b′, c′ die des verschobenen Parallelepipedums und die nebeneinander gesetzten Buchstaben die Winkel dieser Richtungen bedeuten, so ist

$$\cos b'c' = \cos b'x \cos c'x + \cos b'y \cos c'y + \cos b'z \cos c'z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\cos b'a' = \cos b'x \cos a'x + \cos b'y \cos a'y + \cos b'z \cos a'z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right),$$

$$\cos c'a' = \cos c'x \cos a'x + \cos c'y \cos a'y + \cos c'z \cos a'z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right),$$

wo φ, ψ, χ unserer Annahme nach nur kleine Winkel sein können. Die cos der Winkel, welche die neuen Kanten des Parallelepipedums mit den Coordinaten bilden, findet man, indem man die unter (C.) genannten Projectionen durch die Längen unter (D.) dividirt. Dies ausgeführt giebt die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{(1+\beta)(1+\gamma)}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) &= \frac{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}}{(1+\alpha)(1+\beta)}, \qquad \text{(E.)} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial z}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x}}{(1+\gamma)(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke in (D.) und (E.) können wir unserer Annahme nach vereinfachen; denn es sind nach dieser die Grössen α, β, γ, φ, χ, ψ kleine Grössen und im Allgemeinen auch u, v, w und deren Differentialquotienten. Dies ist freilich nicht mehr der Fall, wenn eine oder zwei Dimensionen des Körpers sehr klein werden, denn bei diesen kann, wenn auch die Verschiebungen in den Elementen sehr klein sind, durch Zusammensetzung der Elementenverschiebungen doch die räumliche Verschiebung des Ganzen gross werden. Es sind ferner, da die hier genannten Winkel sehr klein sind, dieselben als Längen ausgedrückt, die Grössen der Verschiebungen, so dass wir dann eine Beziehung zwischen dem Coefficienten der Ausdehnung und Verschiebung finden können. (Vergl. § 73, 3.) Vernachlässigen wir demnach die höheren Potenzen und Produkte der Differentialquotienten, so erhalten wir statt der Gleichungen (D.) und (E.) folgende:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varphi &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \beta &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \chi &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \psi &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \tag{F.}$$

Mit Hülfe dieser Grössen kann leicht die Aenderung der Volumeneinheit, die mit V bezeichnet werden soll, berechnet werden. Aus dem ursprünglichen Volumen dx dy dz wird nämlich

$$dx\,dy\,dz\,(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma),$$

also ist aus der Volumeneinheit geworden

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma).$$

Vernachlässigen wir nun bei der Entwickelung die Produkte, so ergiebt sich

$$V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Zur Lösung unserer Hauptaufgabe, die Spannungen durch die Verschiebungen auszudrücken, müssen wir überlegen, dass jedenfalls die Veränderung, welche die Entfernung zweier benachbarter Moleküle, also die Verlängerung α, welche jede Längeneinheit erfährt, von der Spannung, die wir mit P bezeichnen, abhängt und umgekehrt. Dies sei angedeutet durch $P = f(\alpha)$. Verschwindet α, so muss auch P aufhören. Weil ferner α eine sehr kleine Grösse ist, so kann $f(\alpha)$ nach Potenzen von α entwickelt werden und in dieser Reihe, in der ein Glied ohne α, da für $\alpha = 0$ auch $P = 0$, nicht vorhanden ist, können die höheren Potenzen von α gegen die erste vernachlässigt werden, so dass also ist $P = E.\alpha$. (cf. Nr. 6.) Dasselbe gilt auch bei kleinen Veränderungen, wie wir sie hier annehmen, wenn α negativ ist, also P nicht Zug sondern Druck ist. Eine diesem analoge Betrachtung lässt sich machen in Bezug auf die Spannung, welche entsteht, wenn die einzelnen Querschnitte sich gegeneinander verschieben. Es folgt daraus, dass die Spannung, welche durch eine mässig grosse Winkelveränderung φ

hervorgebracht wird, diesem Winkel proportional gesetzt werden kann, also $P = F\varphi$. Nach dem allgemeinen mechanischen Principe (§ 228), dass eine Reihe von Ursachen, deren jede einzelne eine sehr kleine Wirkung hervorruft, in ihrem Zusammentreffen nur die Summe jener Einzelwirkungen erzeugt, wird man dann unter Berücksichtigung der Gleichungen (F.) den betreffenden Spannungen folgende Ausdrücke geben können.

$$N = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y} + C\frac{\partial w}{\partial z} + D\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + E\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + F\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$
$$T = \mathfrak{A}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{B}\frac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{C}\frac{\partial w}{\partial z} + \mathfrak{D}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \mathfrak{F}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \quad \text{(G.)}$$

In diesen Gleichungen, die ebenso für die drei verschiedenen N und T aufzustellen sind, giebt es demnach 36 unbestimmte Coefficienten, die bei homogenen Körpern constant sind, sonst aber von einem Punkt zum andern veränderlich sind.

In diesen allgemeinen Ausdrücken werden nun für Körper von constanter Elasticität, wie unter 5. gezeigt werden soll, einige der Coefficienten verschwinden, andere einander gleich werden.

3. Bestimmung der Spannungen bei vorhandener Dehnung oder Torsion.

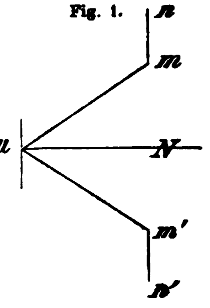
a) Unterwerfen wir einen festen Körper, der homogen und von constanter Elasticität ist, einer Gestaltsänderung, so dass alle Moleküle parallel der z Axe proportional ihrer Entfernung von der xy Ebene verschoben sind, d. h. unterwerfen wir den Körper einer Dehnung, so können wir das Gesetz der Verschiebung ausdrücken durch

$$u = o, \quad v = o, \quad w = cz,$$

wo c constant ist.

Bestimmen wir nun die elastischen Spannungen auf ein Element $\tilde{\omega}$ senkrecht zur x Axe, also die Grössen N_1, T_{xz}, T_{xy}.

Sei μ (Fig. 1) ein Punkt des Elementes $\tilde{\omega}$, dessen Normale μN parallel der x Axe ist, und m ein Punkt auf der einen Seite von $\tilde{\omega}$. Legt man eine Ebene durch die Normale μN und die Linie μm und zieht in derselben eine Linie mμ', so dass $\angle$ mμN $=$ $\angle$ m'μN ist, so muss sich in der Entfernung μm' $=$ μm in m' in Folge der vorausgesetzten Homogenität des Körpers ein materieller Punkt befinden. Geben wir nun dem Körper als Ganzen eine der Ausdehnung entgegengesetzte Bewegung, bis μ in seine alte Lage zurückkehrt, so kommen die Punkte m und m' nicht in die alte Lage, sondern der eine Punkt m bleibt noch um ebensoviel unter der alten Lage als der andere m' über dieselbe gekommen ist. Seien n und n' die so erlangten Orte der Massenpunkte m und m'. Die beiden Spannungen, welche von den Punkten n und 'n ausgehen und Folge der Verrückungen von mn und m'n' sind, werden



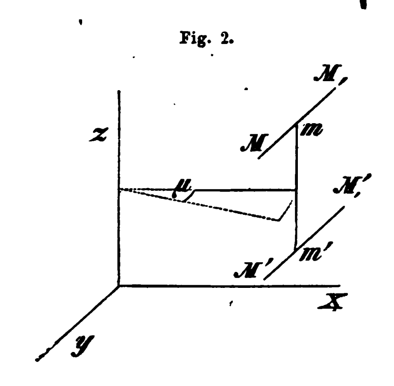
proportional sein den Projectionen der Linien mn und m'n' auf die Linien μm und μm', welche einander gleich sind. Die beiden Punkte m und m', die der Voraussetzung gemäss gleiche Massen haben, bringen auf μ zwei gleiche Anziehungen hervor, von denen die eine in der Richtung μm, die andere nach μm' wirkt, so dass deren Resultante senkrecht zu $\tilde{\omega}$ ist. Dasselbe, was hier von den beiden Punkten m und m' gesagt ist, muss gelten von allen Punktpaaren. Es ergiebt sich also das allgemeine Resultat: Wenn die Verschiebung gegeben ist durch die obigen Formeln, so sind von den drei Spannungen N_1, T_{xy}, T_{xz} nur vorhanden N_1, während T_{xy}, T_{xz} sind $= 0$.

b) Unterwerfen wir einen homogenen Körper von constanter Elasticität einer Drehung um die zAxe, so dass jedes Molekül in einer Ebene parallel der xyEbene einen Bogen beschreibt, der proportional der Entfernung des Punktes von der zAxe und der Entfernung von der xyEbene ist.

Diese Verschiebung ist gegeben durch $u = -cyz$, $v = cxz$, $w = 0$, wo c constant ist.

Man suche dann die Grösse der Werthe N_1, T_{xy}, T_{xz}. Sei μ (Fig. 2) ein Molekül des Körpers, m und m' zwei in Bezug auf die Normale auf das Element senkrecht zu x symmetrisch gelegene Punkte in einer Meridianebene. Diese Punkte m und m' können wegen der angenommenen Homogenität des Körpers betrachtet werden als die Projectionen je zweier anderer materieller Punte $MM_,$ und $M'M_,'$, von denen M und M' ebensoweit vor der Meridianebene liegen, als $M_,$ und $M_,'$ hinter derselben sind. Bringt man nun auf den ganzen Körper, nachdem die oben angegebene Torsion stattgefunden hat, eine Rotation um die zAxe an, welche μ in seine erste Lage zurückbringt und die Elasticitätsverhältnisse unverändert lässt, so werden die Verschiebungen von M, $M_,$, M', $M_,'$ in Bezug auf μ Bogen von gleichen Halbmessern beschreiben, aber die der Punkte M und $M_,$ werden von hinten vor die Meridianebene gehen und M' und $M_,'$ werden noch hinten bleiben. Daraus geht hervor, dass M und $M_,'$ sich von μ entfernt haben, während $M_,$ und M' sich diesem Punkte genähert haben. Die Abstände μM, $\mu M_,$, μM', $\mu M_,'$ sind aber einander gleich; die Projectionen der Verschiebungen auf diese Linien sind also auch gleich. Die vier elastischen Wirkungen auf μ, welche von diesen Punkten ausgehen, haben demnach gleiche Intensitäten, aber zwei sind Anziehungen, gerichtet nach μM und $\mu M_,'$, welche sich zusammensetzen auf der Normale zu $\tilde{\omega}$, die beiden anderen sind Abstossungen, gerichtet nach $M_,\mu$ und $M'\mu$, die sich auf der Normale zu $\tilde{\omega}$ zusammensetzen. Diese beiden Resultanten, die absolut gleich

Fig. 2.



aber relativ entgegengesetzt sind, heben sich demnach auf. Zu demselben Resultate kommen wir durch Betrachtung aller denkbaren Gruppen von Massentheilchen; es ist daher die ganze Resultante oder die gesuchte elastische Kraft auf das Element senkrecht zu x verschwunden, d. h. $N_1 = o$, $T_{xy} = o$, $T_{xz} = o$.

Ueber N_3, T_{zx}, T_{zy} können wir bei Beibehaltung desselben Verschiebungsgesetzes auch ein Resultat erhalten. Nehmen wir in der Ebene unseres Elementes, das der eingeführten Bezeichnung gemäss senkrecht zur x Axe ist, von dem Punkte μ einen Punkt m in Entfernung μm in der Meridianebene, so können wir diesen als die Projection zweier Punkte M und $M_,$ ansehen. Machen wir dann die dem obigen entsprechende Zurückdrehung, so haben wir zwei Wirkungen, die an Intensität gleich, aber entgegengesetzt sind, ihre Resultante ist dann senkrecht auf die Meridianebene und horizontal. Dasselbe gilt von allen Gruppen M und $M_,$. Es ist mithin nur vorhanden T_{zy}, während $N_3 = o$ und $T_{zx} = o$ ist.

Für dieses Verschiebungsgesetz gilt also:

$$N_1 = N_3 = T_{xy} = T_{xz} = T_{zx} = o \text{ und bleibt nur } T_{zy}.$$

4. Ausdrücke der Spannungen für ein anderes Coordinatensystem.

Das neue Coordinatensystem sei bezeichnet durch x′, y′, z′ und alle Grössen in diesem Coordinatensystem seien von denen im alten unterschieden durch einen Accent.

Werden dann die cos der Winkel, welche die Lage der neuen Coordinatenaxen gegen die alten bestimmen, mit m, n, p bezeichnet, so geben die bekannten Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ y &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \\ z &= p_1 x' + p_2 y' + p_3 z', \end{aligned}\right\} \quad (\alpha.)$$

$$\left.\begin{aligned} u' &= m_1 u + n_1 v + p_1 w, \\ v' &= m_2 u + n_2 v + p_2 w, \\ w' &= m_3 u + n_3 v + p_3 w. \end{aligned}\right\} \quad (\beta.)$$

Man erhält nun die neuen Differentialquotienten als Functionen der alten, indem man differenzirt die Function u′, v′, w′ als Functionen von u, v, w nach (β.), welche sind Functionen von x, y, z, die wiederum nach (α.) Functionen von x′, y′, z′ sind.

Diese Rechnung gibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} = m_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_1^2 \frac{\partial v}{\partial y} + p_1^2 \frac{\partial w}{\partial z} + n_1 p_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ + p_1 m_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + m_1 n_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned} \quad (\gamma.)$$

$\frac{\partial v'}{\partial y'}$, $\frac{\partial w'}{\partial z'}$, wird dann aus $\frac{\partial u'}{\partial x'}$, wenn wir statt des Index 1 setzen 2, 3.

$$\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'}, = 2\, m_2\, m_3 \frac{\partial u}{\partial x} + (n_2\, p_3 + n_3\, p_2)\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+ 2\, n_2\, n_3 \frac{\partial v}{\partial y} + (p_2\, m_3 + p_3\, m_2)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad (\delta.)$$
$$+ 2\, p_2\, p_3 \frac{\partial w}{\partial z} + (m_2\, n_3 + m_3\, n_2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)..$$

Daraus folgt $\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'}$ und $\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'}$ durch Vertauschung der Indices 2, 3 mit 3, 1 und 1, 2.

Wie die N und T sind die Componenten der Elasticitätskräfte auf Elemente, die senkrecht stehen auf den alten Axen, so sind die N′ und T′ die Componenten auf Elemente, die senkrecht stehen zu den neuen Axen. Bezeichnen wir nun die Componenten der letzteren Elasticitätskräfte nach den alten Axen durch X'_i, Y'_i, Z'_i, so erhalten wir nach dem aus Nr. 1 (B.) geschlossenen Satze folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
X'_1 &= m_1\, N'_1 + m_2\, T'_{xy} + m_3\, T'_{xz} = m_1\, N_1 + n_1\, T_{xy} + p_1\, T_{xz},\\
Y'_1 &= n_1\, N'_1 + n_2\, T'_{xy} + n_3\, T'_{xz} = m_1\, T_{xy} + n_1\, N_2 + p_1\, T_{yz},\\
Z'_1 &= p_1\, N'_1 + p_2\, T'_{xy} + p_3\, T'_{xz} = m_1\, T_{xz} + n_1\, T_{yz} + p_1\, N_3,\\
X'_2 &= m_1\, T'_{xy} + m_2\, N'_2 + m_3\, T'_{yz} = m_2\, N_1 + n_2\, T_{xy} + p_2\, T_{xz},\\
Y'_2 &= n_1\, T'_{xy} + n_2\, N'_2 + n_3\, T'_{yz} = m_2\, T_{xy} + n_2\, N_2 + p_2\, T_{yz}, \quad (\varepsilon.)\\
Z'_2 &= p_1\, T'_{xy} + p_2\, N'_2 + p_3\, T'_{yz} = m_2\, T_{xz} + n_2\, T_{yz} + p_2\, N_3,\\
X'_3 &= m_1\, T'_{xz} + m_2\, T'_{yz} + m_3\, N'_3 = m_3\, N_1 + n_3\, T_{xy} + p_3\, T_{xz},\\
Y'_3 &= n_1\, T'_{xz} + n_2\, T'_{yz} + n_3\, N'_3 = m_3\, T_{xy} + n_3\, N_2 + p_3\, T_{yz},\\
Z'_3 &= p_1\, T'_{xz} + p_2\, T'_{yz} + p_3\, N'_3 = m_3\, T_{xz} + n_3\, T_{yz} + p_3\, N_3.
\end{aligned}$$

Man findet daraus die N′ und T′ durch Addition von drei Gleichungen einer jeden Gruppe, wenn dieselben vorher respective durch m_i, n_i, p_i, wo i nach der Reihe 1, 2, 3 ist, multiplicirt worden sind, und man bedenkt, dass $m_i^2 + n_i^2 + p_i^2 = 1$ ist.

1) $N'_1 = m_1^2\, N_1 + n_1^2\, N_2 + p_1^2\, N_3 + 2\, n_1\, p_1\, T_{yz} + 2\, p_1\, m_1\, T_{xz} + 2\, m_1\, n_1\, T_{xy}$.

Daraus ergiebt sich N'_2 und N'_3 durch Vertauschung der Cos Indices 1 mit 2 und 3.

2) $T'_{yz} = m_2\, m_3\, N_1 + n_2\, n_3\, N_2 + p_2\, p_3\, N_3 + (n_2\, p_3 + n_3\, p_2)\, T_{yz} + (p_2\, m_3 + p_3\, m_2)\, T_{xz} + (m_2\, n_3 + m_3\, n_2)\, T_{xy}$.

Daraus ergiebt sich T_{zx} und T_{xy} durch Vertauschung der Cos Indices 2, 3 mit 3, 1 und 1, 2.

Aus den Gleichungen (γ.) folgt durch Addition bei Berücksichtigung der bekannten Gleichung zwischen den m, n, p, dass ist

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = V.$$

Die kubische Ausdehnung ist also stets gleich der Summe der drei zu einander senkrechten linearen Ausdehnungen.

Die drei Gleichungen 1) geben

$$N_1 + N'_2 + N'_3 = N_1 + N_2 + N_3.$$

5. Vereinfachung der Coefficienten der Spannungen für Körper von constanter Elasticität.

Die 36 Coefficienten der Formel (G.) reduciren sich zunächst durch folgende Betrachtung. Handelt es sich um N_1, also die Normalspannung auf ein Element senkrecht zu x, so wird in Bezug auf diese u eine andere Rolle spielen, als v und w, und letztere werden wiederum in Bezug auf diese Spannung denselben Einfluss haben, es werden demnach erstens die Coefficienten von $\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$ dieselben sein, aber verschieden von dem Coefficienten von $\frac{\partial u}{\partial x}$. Eben deswegen wird $\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$ einen Coefficienten haben, der verschieden ist von den Coefficienten der Binome $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, die wiederum denselben Coefficienten haben müssen. Da ferner bei einer Umänderung der Benennung der Axen N_1 entweder übergeht in N_2 oder N_3, so können die Coefficienten der drei Normalspannungen nicht von einander verschieden sein, so dass wir nun statt der dort eingeführten 18 Coefficienten nur 4 von einander verschiedene behalten. Eine ähnliche Betrachtung reducirt die für die Tangentialspannungen eingeführten 18 Coefficienten, so dass wir im Ganzen noch 8 von einander verschiedene behalten, die sich wie folgt zusammenstellen lassen:

	$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\partial w}{\partial z}$	$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$	$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$	$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$
N_1	A.	B	B	D	E	E.
N_2	B.	A	B	E	D	E.
N_3	B.	B	A	E	E	D.
$T_{yz} = T_{zy}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}$.	$\mathfrak{D}$.	$\mathfrak{E}$.	$\mathfrak{E}$.
$T_{xz} = T_{zx}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$.	$\mathfrak{E}$.	$\mathfrak{D}$.	$\mathfrak{E}$.
$T_{xy} = T_{yx}$	$\mathfrak{B}$.	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{E}$.	$\mathfrak{E}$.	$\mathfrak{D}$.

Mittel zur weiteren Vereinfachung liefert 3.

Nach a) ist

$$T_{xy} = 0, \; T_{xz} = 0.$$

Unsere Tafel giebt aber mit Berücksichtigung der dort gegebenen Werthe von u, v, w:

$$T_{xy} = \mathfrak{A}c, \; T_{xz} = \mathfrak{B}c.$$

Da nun c nicht gleich 0 ist, so muss $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0$ sein.

Nach b) ist

$$N_1 = 0, \; N_3 = 0, \; T_{xy} = 0, \; T_{xz} = 0.$$

Unsere Tafel giebt aber für $y = 0$ mit Berücksichtigung der dort angegebenen Werthe von u, v, w:

$$N_1 = Dcx,\ N_3 = Ecx,\ T_{xy} = \mathfrak{E}cx,\ T_{xz} = \mathfrak{E}cx,$$

folglich muss sein $D = E = \mathfrak{E} = 0$.

Es bleibt mithin nur

$$N_1 = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y} + B\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$N_2 = B\frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial v}{\partial y} + B\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$N_3 = B\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y} + A\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$T_{yz} = T_{zy} = \mathfrak{D}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$T_{xz} = T_{zx} = \mathfrak{D}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \mathfrak{D}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Auf diese Ausdrücke wenden wir nun die Transformationsresultate von 4. an.

Wegen der vorausgesetzten Homogenität und Constanz der Elasticität muss gelten z. B.

$$N'_1 = A\frac{\partial u'}{\partial x'} + B\frac{\partial v'}{\partial y'} + B\frac{\partial w'}{\partial z'}.$$

Man findet aber mit Hülfe der Transformationsformel (1.) nach einiger leichten Umänderung:

$$N'_1 = B\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) + (A-B)\left(m_1^2\frac{\partial u}{\partial x} + n_1^2\frac{\partial v}{\partial y} + p_1^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$+ 2\mathfrak{D}\left[n_1 p_1\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + p_1 m_1\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + m_1 n_1\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right],$$

$$= B\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) + (A-B)\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \text{Coeff. von } 2\mathfrak{D}\right)$$

$+ 2\mathfrak{D}$ Coeff., wenn 4. (γ.) berücksichtigt wird.

Setzt man dann $2\mathfrak{D} = A - B$, so wird

$$N'_1 = B\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) + (A-B)\frac{du'}{dx'},\ \text{d. i. wie verlangt,}$$

$$= A\frac{\partial u'}{\partial x'} + B\frac{\partial v'}{\partial y'} + B\frac{\partial w'}{\partial z'}.$$

Es bleiben mithin nur zwei noch weiter zu bestimmende Coefficienten übrig, A und B.

6. Bestimmung der Coefficienten A und B.

Unterwerfen wir einen prismatischen Körper einer Zugkraft in der Richtung seiner Längsaxe, die auf die Einheit der Fläche $= P$ sei, so wird derselbe in seiner Längsrichtung, die mit der z Achse zusammenfalle, einen Zug erleiden und gleichzeitig eine Quercontraction.

Die Verschiebungen nach den Coordinatenaxen lassen sich dann ausdrücken durch:

$$u = -ax, \quad v = -ay, \quad w = cz.$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe ist:

$$N_1 = N_2 = Bc - (B + A)\,a, \quad N_3 = Ac - 2\,Ba.$$

Da nun unserer Annahme zu Folge die N_1 und N_2 überall dieselben und an der Oberfläche $= 0$ sind, während daselbst $N_3 = P$ ist, so gilt:

$$Bc - (B + A)\,a = 0. \quad P = Ac - 2\,Ba.$$

Daraus ergiebt sich

$$a = \frac{BP}{A\,(A + B) - 2\,B^2}, \quad c = \frac{P\,(B + A)}{A\,(A + B) - 2\,B^2}.$$

Nun ist nach § 65 $c = EP$, also muss sein:

$$E = \frac{A + B}{A\,(A + B) - 2\,B^2}.$$

Setzen wir ferner nach § 65 $a = \mu c$, wo also μ ist das Verhältniss der Quercontraction zur Längenausdehnung, so finden wir

$$\mu E = \frac{B}{A\,(A + B) - 2\,B^2}.$$

Die Einführung dieser durch Experimente zu bestimmenden Werthe von E und μ ergiebt dann mit Hülfe der letzteren Gleichungen:

$$A = \frac{(1 - \mu)}{E\,(1 + \mu)\,(1 - 2\,\mu)}, \quad B = \frac{\mu}{E\,(1 + \mu)\,(1 - 2\,\mu)}.$$

Die Spannungen erhalten dann, wenn noch die Volumenänderung V eingeführt wird, die folgenden einfachen Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{E\,(1 + \mu)}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1 - 2\,\mu}\,V\right],\\
N_2 &= \frac{1}{E\,(1 + \mu)}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{1 - 2\,\mu}\,V\right],\\
N_3 &= \frac{1}{E\,(1 + \mu)}\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1 - 2\,\mu}\,V\right],\\
T_{yz} &= T_{zy} = \frac{1}{2\,E(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
T_{xz} &= T_{zx} = \frac{1}{2\,E(1+\mu)}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),\\
T_{xy} &= \quad = \frac{1}{2\,E(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned}\right\}\quad (H.)$$

Daraus findet man dann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha = E\,[N_1 - \mu\,(N_2 + N_3)], \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi = 2\,E\,(1 + \mu)\,T_{yz},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \beta = E\,[N_2 - \mu\,(N_3 + N_1)], \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \chi = 2\,E\,(1 + \mu)\,T_{zx},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \gamma = E\,[N_3 - \mu\,(N_1 + N_2)], \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \psi = 2\,E\,(1 + \mu)\,T_{xy}.$$

7. Gleichgewichtsgleichungen durch die Verschiebungen ausgedrückt.

Die gesuchten Gleichungen werden erhalten, wenn die Werthe (H.) in (A.) und (B.) eingesetzt werden. Wir führen statt des Elasticitätscoefficienten E ein den Elasticitätsmodul. Nach § 65 ist dieser $m = \frac{1}{E}$. Wir setzen in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Schreibweise statt m immer E.

$$\frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial V}{\partial x}\right\}+X=0,$$
$$\frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial V}{\partial x}\right\}+Y=0, \qquad (A')$$
$$\frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial V}{\partial z}\right\}+Z=0,$$
$$\frac{E}{2(1+\mu)}\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{1-2\mu}V\right)\cos p+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos q+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos r=P\cos\pi,\right.$$
$$\frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos p+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{1-2\mu}V\right)\cos q+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos r=P\cos\varkappa,\right. \qquad (B')$$
$$\frac{E}{2(1+\mu)}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos p+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos p+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\mu}{1-2\mu}V\right)\cos r=P\cos\varrho.\right.$$

Somit sind statt der 6 unbekannten Grössen N und T nur noch 3, nämlich u, v, w, vorhanden. Diese Gleichungen können nun auch leicht auf Bewegungen mit Hülfe des Princips von D'Alembert erweitert werden, indem man statt X, Y, Z sagt:

$$X - d\frac{d^2u}{dt^2},\quad Y - d\frac{d^2v}{dt^2},\quad Z - d\frac{d^2w}{dt^2},$$

wo d die Masse der Volumeneinheit oder die Dichtigkeit und t die Zeit bezeichnet.

Diese Gleichungen müssen auch noch gelten, wenn eine oder zwei Dimensionen gegen die noch übrigen verschwinden, nur gehören dann noch weitere Bedingungen hinzu, welchen die Verschiebungen genügen müssen, es müssen nämlich dieselben, wenn man die Verschiebungen des ganzen Körpers betrachten will, so beschaffen sein, dass derselbe nicht zerstört wird, also die Continuität des aus Elementen bestehenden Ganzen gewahrt bleibe.

8. Stellungsfläche.

Sind für einen Punkt des Körpers die Grössen N und T bekannt, so findet man die Grösse und Richtung der Spannung P auf ein Element und die Lage der Ebene, auf die sie wirkt, durch die Gleichungen (B.); denn π, $\varkappa$, ϱ bestimmen die genannte Richtung und p, q, r die Lage der Ebene.

P^2 erhält man, indem man die Gleichungen (B.) quadrirt, addirt und bedenkt, dass

$$\cos^2\pi + \cos^2\varkappa + \cos^2\varrho = 1 \text{ ist.}$$

$$P^2 = N_1^2 \cos^2 p + N_2^2 \cos^2 q + N_3^2 \cos^2 r + 2(N_1 T_{xy} + N_2 T_{xy} + T_{xz} T_{yz}) \cos p \cos q$$
$$+ 2(N_1 T_{xz} + N_3 T_{xz} + T_{xy} T_{yz}) \cos p \cos r \qquad (I.)$$
$$+ 2(N_2 T_{yz} + N_3 T_{yz} + T_{xy} T_{xz}) \cos q \cos r.$$

Ist gegeben die Richtung dieser Kraft durch die Winkel π, $\varkappa$, ϱ, so bleibt uns noch zu finden die Lage der Ebene, auf welche sie wirkt, also die Winkel p, q, r, so dass die cos dieser Winkel aus der Gleichung (I.) eliminirt werden können. Die Berechnung der Functionen dieser Winkel führt dann zu folgenden Ausdrücken:

$$\begin{aligned} N \cos p &= P(A \cos \pi + F \cos \varkappa + E \cos \varrho), \\ N \cos q &= P(F \cos \pi + B \cos \varkappa + D \cos \varrho), \qquad (K.) \\ N \cos r &= P(E \cos \pi + D \cos \varkappa + C \cos \varrho), \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung geschrieben ist

$$N = N_1 N_2 N_3 - 2 T_{xy} T_{xz} T_{yz} - N_1 T_{yz}^2 - N_2 T_{xz}^2 - N_3 T_{yx}^2,$$
$$A = N_2 N_3 - T_{yz}^2, \quad D = T_{xz} T_{xy} - N_1 T_{yz},$$
$$B = N_3 N_1 - T_{xz}^2, \quad E = T_{xy} T_{yz} - N_2 T_{xz},$$
$$C = N_1 N_2 - T_{xy}^2, \quad F = T_{yz} T_{xz} - N_3 T_{xy}.$$

Diese Gleichungen lassen eine geometrische Deutung zu. Um nämlich zu finden die Ebenen, auf die eine der Richtung nach gegebene Spannung wirkt, denken wir uns um einen Punkt herum nach allen möglichen Richtungen die Spannungen gezeichnet und um den Punkt als Mittelpunkt eine Fläche f construirt, deren Gleichung ist:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fxy + 2Dyz + 2Exz - \text{Const.} = f(xyz) = 0 \quad (L.),$$

so ist $\quad x : y : z = \cos \pi : \cos \varkappa : \cos \varrho.$

Dann ist

$$\begin{aligned} \cos p : \cos q : \cos : r = {} & A \cos \pi + F \cos \varkappa + E \cos \varrho \\ & : F \cos \pi + B \cos \varkappa + D \cos \varrho \\ & : E \cos \pi + D \cos \varkappa + C \cos \varrho \\ = {} & \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Diese Proportion ist aber das Kennzeichen dafür, dass p, q, r die Richtung der Normale an die Fläche (L.) im Punkte x, y, z derselben bestimmt. Somit ist die Tangentialebene an die Fläche (L.) im Punkt x, y, z diejenige Fläche, auf welche die Spannung, gerichtet vom Mittelpunkt der Fläche nach dem Berührungspunkt, wirkt.

Es ergiebt sich hieraus folgende allgemeine Bestimmung: Legt man durch den Mittelpunkt der Fläche (L.) eine Ebene, so giebt der Radiusvector derselben nach dem Berührungspunkt, der dieser Ebene parallelen Tangentialebene die Richtung der darauf stattfindenden Spannung oder kurz die Richtung der elastischen Spannung fällt zusammen mit dem der Ebene conjugirten Durchmesser.

Diese Fläche (L.) des zweiten Grades, die also jedenfalls einen Mittelpunkt hat, aber nicht ein Ellipsoid sein muss, heisse Stellungsfläche.

9. Elasticitäts- oder Spannungsellipsoid.

Die unter 7. gebrauchten Gleichungen geben dann noch eine Vorstellung über die Grösse der Spannungen. Tragen wir nämlich auf den gezeichneten Richtungen der Spannungen die Grössen derselben auf, so ist

$$x = P \cos \pi, \; y = P \cos \varkappa, \; z = P \cos \varrho.$$

Dadurch verwandeln sich die Gleichungen (K.) in

$$N \cos p = Ax + Fy + Ez,$$
$$N \cos q = Fx + By + Dz,$$
$$N \cos r = Ex + Dy + Cz.$$

Werden diese Gleichungen quadrirt und addirt, so erhält man

$$N^2 = (Ax + Fy + Ez)^2 + (Fx + By + Dz)^2 + (Ex + Dy + Cz)^2. \qquad \text{(M.)}$$

Diese Gleichung repräsentirt immer ein Ellipsoid, welches **Elasticitätsellipsoid (Spannungsellipsoid)** genannt wird.

Hiermit ist folgendes allgemeine Theorem gefunden: Wenn man durch einen Punkt eines Körpers sämmtliche mögliche Ebenen legt und die auf sie wirkenden Spannkräfte der Richtung und Grösse nach als Radien einer Fläche betrachtet, so ist diese ein Ellipsoid.

In Verbindung dieser Fläche mit der Fläche (L.) erhalten wir folgendes Theorem:

Nimmt man einen beliebigen Radius der Fläche (M.) und zeichnet die zu dieser Richtung conjugirte Ebene in (L.), so ist dies die Ebene, auf welcher der Richtung und Grösse nach die Spannung wirkt, welche vorgestellt ist durch den obigen Radius.

10. Hauptspannungen.

Zur genaueren Bestimmung der Spannungen dient ferner die Untersuchung, ob es Ebenen giebt, auf die die Spannungen senkrecht wirken, die also entweder Zug- oder Druckkräfte werden. Giebt es solche, so fällt für dieselben p, q, r zusammen mit π, $\varkappa$, ϱ. Die Bestimmung der Lage dieser Ebenen und der Grösse der betreffenden Spannungen muss also gefunden werden aus den Gleichungen (B.), wenn statt π, $\varkappa$, ϱ gesetzt wird p, q, r.

Die Gleichsetzung dieser Werthe giebt:

$$(N_1 - P) \cos p + T_{xy} \cos q + T_{xz} \cos r = 0,$$
$$T_{xy} \cos p + (N_2 - P) \cos q + T_{yz} \cos r = 0, \qquad \text{(N.)}$$
$$T_{zx} \cos p + T_{zy} \cos q + (N_3 - P) \cos r = 0.$$

Diese Gleichungen mit $\cos^2 p + \cos^2 q + \cos^2 r = 1$ reichen hin zur Bestimmung der vier Unbekannten p, q, r und P. Die Elimination der Verhältnisse der cos giebt

$$\begin{vmatrix} N_1 - P & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & N - P & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & N_3 - P \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$\Theta = (N_1 - P)(N_2 - P)(N_3 - P) + 2\, T_{xy}\, T_{xz}\, T_{yz} - (N_3 - P)\, T_{xy}^2 - (N_2 - P)\, T_{xz}^2 - (N_1 - P)\, T_{yz}^2 = 0,$$

oder entwickelt

$$-\Theta = P^3 - [N_1 + N_2 + N_3] P^2 + [N_1 N_2 + N_1 N_3 + N_2 N_3 - T_{xy}^2 - T_{xz}^2 - T_{yz}^2]\, P + [N_1 N_2 N_3 + T_{xy}\, T_{xz}\, T_{yz} - N_1 T_{yz}^2 - N_2 T_{xz}^2 - N_3 T_{xz}^2] = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung P_1, P_2, P_3 geben dann P nicht allein der Grösse, sondern auch dem Vorzeichen nach, welches entscheidet, ob Zug oder Druck vorhanden ist. Die Gleichung hat jedenfalls eine reelle Wurzel, es soll aber bald bewiesen werden, dass alle drei reell sind. Die aus dieser Gleichung berechneten Spannungen nennt man die Hauptspannungen.

Diese Gleichung giebt nach dem in der Theorie der Gleichungen behandelten Gesetz über die Abhängigkeit der Coefficienten von den Wurzeln sogleich drei Relationen über die verschiedenen Spannungen.

Da die Wahl der Coordinatenaxen für unsere Entwickelung gleichgültig ist, so würde man dieselbe Gleichung erhalten, wie auch diese liegen. Bezeichnen wir nun die Componenten N und T nach einem anderen System mit Accenten, so muss eine dem Obigen analoge Gleichung herauskommen, es müssen also die Coefficienten gleich hoher Potenzen von P einander gleich sein. Dies giebt drei Relationen, von denen die eine ist

$$N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = N_1'^2 + N_2'^2 + N_3'^2,$$

d. h. für jeden Punkt ist die Summe der Quadrate der Normalspannungen nach drei sich rechtwinklig schneidenden Richtungen constant. Dasselbe ist schon in 5. gefunden.

Die Richtungen der Ebenen, auf welche die Hauptspannungen wirken, findet man dann folgendermassen. Bestimmt man aus den drei Gleichungen für p, q, r das Verhältniss der drei cos, so erhält man, wenn man erst die erste, dann die zweite und dann die dritte weglässt:

$$\begin{aligned}
&\cos p : \cos q : \cos r \\
&= (N_2 - P)(N_3 - P) - T_{yz}^2 : T_{yz}\, T_{zx} - T_{yx}(N_3 - P) : T_{xy}\, T_{yz} - T_{xz}(N_2 - P) \\
&= T_{yz}\, T_{zx} - T_{yx}(N_3 - P) : (N_3 - P)(N_1 - P) - T_{zx}^2 : T_{zx}\, T_{xy} - T_{yz}(N_1 - P) \\
&= T_{xy}\, T_{yz} - T_{xz}(N_2 - P) : T_{zx}\, T_{xy} - T_{yz}(N_1 - P) : (N_1 - P)(N_2 - P) - T_{xy}^2 .
\end{aligned}$$

Durch Trennung dieser Proportionen und Anwendung des Satzes, dass, wenn

$$a : b = c : d$$

$$\alpha : \beta = d : e \text{ ist, gilt}$$

$a\alpha : b\beta = c : e$, erhält man aus den obigen Proportionen, dass die 6 verschiedenen Ausdrücke auf der rechten Seite sich verhalten wie die Quadrate und Produkte dieser cos. Man kann demnach setzen:

$$\begin{aligned}
m \cos^2 p &= (N_2 - P)(N_3 - P) - T_{yz}^2, & m \cos q \cos r &= T_{xz}\, T_{xy} - T_{yz}(N_1 - P), \\
m \cos^2 q &= (N_3 - P)(N_1 - P) - T_{zx}^2, & m \cos r \cos p &= T_{yx}\, T_{yz} - T_{zx}(N_2 - P), \\
m \cos^2 r &= (N_1 - P)(N_2 - P) - T_{xy}^2, & m \cos p \cos q &= T_{zy}\, T_{zx} - T_{xy}(N_3 - P).
\end{aligned}$$

Den Factor m können wir dann bestimmen mit Hülfe der vierten noch zu erfüllenden Gleichung $\cos^2 p + \cos^2 q + \cos^2 r = 1$. Dies giebt:

$$m = (N_2 - P)(N_3 - P) + (N_3 - P)(N_1 - P) + (N_1 - P)(N_2 - P) - T_{yz}^2 - T_{zx}^2 - T_{xy}^2 = -\frac{\partial\Theta}{\partial P}.$$

Damit erhalten wir:

$$\cos p = \sqrt{[(N_2 - P)(N_3 - P) - T_{yz}^2] : \left(-\frac{\partial\Theta}{\partial P}\right)},$$

$$\cos q = \sqrt{[(N_3 - P)(N_1 - P) - T_{zx}^2] : \left(-\frac{\partial\Theta}{\partial P}\right)},$$

$$\cos r = \sqrt{[(N_1 - P)(N_2 - P) - T_{xy}^2] : \left(-\frac{\partial\Theta}{\partial P}\right)}.$$

Die Vorzeichen dieser cos bestimmen sich durch die anderen aus den Proportionen abgeleiteten Gleichungen. Es bleibt aber dann noch ein Vorzeichen unbestimmt. Dies thut aber keinen Eintrag; denn wenn man bei allen cos das Vorzeichen in das entgegengesetzte verwandelt, so heisst dies nur, dass die Normale nach der entgegengesetzten Richtung gezeichnet ist, also die Lage der Ebene immer noch dieselbe bleibt. Sei nun zu genauerer Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier Hauptspannungen P_1 und P_2 mit φ der Winkel bezeichnet, den sie miteinander bilden, und $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$ seien die Winkel derselben mit den Coordinatenaxen. Dann hat man

$$\cos\varphi = \cos p_1 \cos p_2 + \cos q_1 \cos q_2 + \cos r_1 \cos r_2.$$

Einen anderen Ausdruck für diesen Winkel erhalten wir, wenn wir in die drei Bedingungsgleichungen (N) die Werthe P_1, p_1, q_1, r_1 einsetzen, dieselben respective mit p_2, q_2, r_2 multipliciren, dann addiren. Diese Rechnung giebt:

$$P_1 \cos\varphi = N_1 \cos p_1 \cos p_2 + N_2 \cos q_1 \cos q_2 + N_3 \cos r_1 \cos r_2 + T_{yz}(\cos q_1 \cos r_2 + \cos r_1 \cos q_2) + T_{zx}(\cos r_1 \cos p_2 + \cos p_1 \cos r_2) + T_{xy}(\cos p_1 \cos q_2 + \cos q_1 \cos p_2).$$

Wenn man aber in (N) die Werthe P_2, p_2, q_2, r_2 einsetzt, die Gleichungen mit p_1, q_1, r_1 resp. multiplicirt, so erhält man links $P_2 \cos\varphi$ und rechts denselben Werth wie für $P_1 \cos\varphi$. Es ist mithin

$$P_1 \cos\varphi = P_2 \cos\varphi.$$

Wofern also nicht $P_1 = P_2$ ist, muss, damit diese Gleichung richtig ist, $\varphi = 90^0$ sein, d. h. je zwei Hauptspannungen, wenn sie nicht einander gleich sind, müssen aufeinander senkrecht stehen, mithin stehen alle drei aufeinander senkrecht.

Mit Hülfe der Gleichung

$$0 = \cos p_1 \cos p_2 + \cos q_1 \cos q_2 + \cos r_1 \cos r_2,$$

welche die Bedingung $\varphi = 90^0$ giebt, lässt sich nun beweisen, dass die Gleichung $\Theta = 0$, welche die drei Hauptspannungen giebt, drei reelle Wurzeln haben muss. Wären nämlich P_1 und P_2 conjugirt imaginär, so müssten es auch die ihnen entsprechenden $\cos p_1$ und $\cos p_2$ etc. sein. Die

Produkte zweier conjugirter Werthe geben aber die Summe zweier Quadrate, es müssten also die Summen von Quadraten gleich 0 sein, was unmöglich ist.

11. Vereinfachung der gewonnenen Gleichungen.

Alle Entwickelungen, die bis jetzt gemacht worden sind, waren ganz unabhängig von der Wahl des Parallelepipedums, wir können dasselbe also auch so nehmen, dass dessen Kanten parallel den Hauptspannungen sind. Dann sind zum Gleichgewicht nur nöthig Zug- oder Druckkräfte, es verschwinden mithin alle die Kräfte, welche mit T bezeichnet sind, und die N_1, N_2, N_3 werden nun ersetzt durch P_1, P_2, P_3. Dadurch vereinfachen sich die A, B, C, D, E, F in 8. und es wird

$N = P_1 P_2 P_3$, $A = P_2 P_3$, $B = P_3 P_1$, $C = P_1 P_2$ und $D = E = F = 0$.

Diese Vereinfachung giebt dann statt der Gleichungen (L.) und (M), wenn die neuen Coordinaten mit ξ, η, ζ bezeichnet werden,

$$\frac{\xi^2}{P_1}+\frac{\eta^2}{P_2}+\frac{\zeta^2}{P_3}=\text{Const.},$$

$$\frac{\xi^2}{P_1^2}+\frac{\eta^2}{P_2^2}+\frac{\zeta^2}{P_3^2}=1.$$

Die Wahl der hier auftretenden Const. ist nur abhängig von der Art der Hauptspannungen. Sind dieselben gleichartig, also entweder lauter Zug- oder Druckkräfte, d. h. alle positiv oder negativ, so ist die Stellungsfläche ein Ellipsoid, dessen Hauptaxen proportional den Quadratwurzeln der Hauptspannungen sind. Ist eine der Hauptspannungen den anderen entgegengesetzt, so erhält man je nach der Wahl der Constanten ein hyperbolisches (mit einer Schale) oder elliptisches (mit zwei Schalen) Hyperboloid, die getrennt werden durch deren Asymptotenkegel

$$\frac{\xi^2}{P_1}+\frac{\eta^2}{P_2}+\frac{\zeta^2}{P_3}=0.$$

Dass es bei der Construction der Stellungsfläche nicht auf einen bestimmten Werth der Constanten ankommt, ist selbstverständlich, da für alle mit veränderten Constanten construirten Flächen die Lage der Ebenen mit ihren conjugirten Durchmessern dieselbe ist.

Der eben genannte Kegel ist noch besonders durch Folgendes interessant. Für einen Radius des Elasticitätsellipsoides, der mit dieser Kegeloberfläche zusammenfällt, ist die Ebene durch ihn, welche den Kegel berührt, conjugirt und es wirkt mithin die Kraft tangential. Deshalb nennt man diesen Kegel **Gleitungskegel**.

Wie der Gleitungskegel alle Ebenen giebt, in denen Tangentialkräfte wirken, so entscheidet auch die Fläche (L) ganz allgemein über die Art der elastischen Spannungen, wenn die Art der Hauptspannungen bekannt ist. Wenn nämlich der beliebig gezogene Radius des Elasticitätsellipsoides trifft das Hyperboloid mit einem Mantel, so repräsentirt er eine Kraft, wie die ist, welche doppelt in den Hauptspannungen vorkommen. Trifft der Radius

das andere Hyperboloid, so entspricht er einer Kraft, wie sie unter den Hauptspannungen nur einmal vorkommt.

12. Elasticitätsfläche.

Die Einführung der Hauptspannungen und der neuen Coordinaten vereinfacht auch den Ausdruck (L). Es ergiebt sich nämlich dann

$$P^2 = P_1^2 \cos^2 p + P_2^2 \cos^2 q + P_3^2 \cos^2 r.$$

Die Grösse dieser Kraft ist gleich dem auf der Ebene, auf die sie wirkt, senkrecht errichteten Radiusvector einer Fläche, deren Gleichung ist

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = P_1^2 \xi^2 + P_2^2 \eta^2 + P_3^2 \zeta^2.$$

Denn es ist dann das Quadrat eines solchen Radiusvectors

$$P^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

ferner ist

$$\cos p = \frac{\xi}{P}, \ \cos q = \frac{\eta}{P}, \ \cos r = \frac{\zeta}{P}, \text{ also}$$

$$\xi = P \cos p, \ \eta = P \cos q, \ \zeta = P \cos r.$$

Setzt man diese erhaltenen Werthe in die Gleichung der Elasticitätsfläche ein, so erhält man

$$(P^2 \cos^2 p + P^2 \cos^2 q + P^2 \cos^2 r)^2 = P_1^2 P^2 \cos^2 p + P_2^2 P^2 \cos^2 q + P_3^2 P^2 \cos^2 r,$$

oder nach Division mit P^2, und da

$$\cos^2 p + \cos^2 q + \cos^2 r = 1 \text{ ist},$$

$$P^2 = P_1^2 \cos^2 p + P_2^2 \cos^5 q + P_3^2 \cos^2 r,$$

wie zu beweisen war.

Diese Fläche heisst **Elasticitätsfläche**. Sie ist der Ort der Fusspunkte der Senkrechten vom Mittelpunkte des Elasticitätsellipsoides auf die Tangentialebenen an dasselbe. Es ist nämlich die Gleichung der Berührungsebene im Punkte ξ', η', ζ'

$$\frac{\xi \xi'}{P_1^2} + \frac{\eta \eta'}{P_2^2} + \frac{\zeta \zeta'}{P_3^2} = 1,$$

mithin die Länge des Perpendickels vom Mittelpunkt

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi'^2}{P_1^4} + \frac{\eta'^2}{P_2^4} + \frac{\zeta'^2}{P_3^4}}},$$

und die cos der Winkel, welche diese Linie mit den Axen bildet, sind einmal

$$\frac{\xi'}{P_1^2} p, \qquad \frac{\eta'}{P_2^2} p, \qquad \frac{\zeta'}{P_3^2} p,$$

und dann

$$\frac{\xi}{p}, \qquad \frac{\eta}{p}, \qquad \frac{\zeta}{p};$$

mithin ist

$$\xi = \frac{\xi'}{P_1^2} p^2, \qquad \eta = \frac{\eta'}{P_2^2} p^2, \qquad \zeta = \frac{\zeta'}{P_3^2} p^2, \text{ oder}$$

$$P_1^2 \xi^2 = \frac{\xi'^2}{P_1^2} p^4, \quad P_2^2 \eta^2 = \frac{\eta'^2}{P_2^2} p^4, \quad P_3^2 \zeta^2 = \frac{\zeta'^2}{P_3^2} p^4.$$

Diese Gleichungen geben durch Addition mit Rücksicht auf die Gleichung des Elasticitätsellipsoides

$$P_1^2 \xi^2 + P_2^2 \eta^2 + P_3^2 \zeta^2 = p^4 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2.$$

13. Hauptschubspannungen.

Nach (B) ist die Normalcomponente von P:

$$P \cos \pi \cos p + P \cos \varkappa \cos q + P \cos \varrho \cos r.$$

Es ist aber für unser Coordinatensystem nach (B.)

$$P \cos \pi = P_1 \cos p, \quad P \cos \varkappa = P_2 \cos q, \quad P \cos \varrho = P_3 \cos r,$$

mithin für dasselbe Coordinatensystem

$$\mathfrak{N} = P_1 \cos^2 p + P_2 \cos^2 q + P_3 \cos^2 r.$$

Die Tangentialspannung $\mathfrak{T}$ findet sich dann unter Berücksichtigung des in 12. gefundenen Ausdruckes. Es ist

$$\mathfrak{T}^2 = P^2 - \mathfrak{N}^2$$
$$= P_1^2 \cos^2 p + P_2^2 \cos^2 q + P_3^2 \cos^2 r - (P_1 \cos^2 p + P_2 \cos^2 q + P_3 \cos^2 r)^2.$$

Zur Bestimmung des Max. und Min. von $\mathfrak{T}$ ist dieser eben gefundene Werth als Function von p, q, r zu betrachten. Die Untersuchung der singulären Werthe von $\mathfrak{T}$ führt zu folgenden Bedingungsgleichungen:

$$[(P_1 - P_3) \cos 2p + 2 (P_2 - P_3) \cos^2 q] \sin 2p = 0,$$
$$[(P_2 - P_3) \cos 2q + 2 (P_1 - P_3) \cos^2 q] \sin 2q = 0.$$

Daraus lassen sich die folgenden ausgezeichneten Werthe von p, q, r zusammenstellen, welche diesen Gleichungen genügen:

	p	q	r
1)	0	90	90
2)	90	0	90
3)	90	± 45	± 45
4)	90	90	0
5)	± 45	90	± 45
6)	± 45	± 45	90.

Von diesen Werthen geben 1), 2), 4) ein Min.; denn diese Richtungen bestimmen die Axen, in denen es nur Normalspannungen giebt. 3), 5), 6) geben Maxima, also befinden sich dieselben in den Ebenen, von denen jede durch eine Axe des Spannungsellipsoides geht und die Winkel der anderen halbirt. Diese Haupttangentialspannungen oder Hauptschubspannungen sind:

1) für $p = 90$ $\mathfrak{T}' = \frac{1}{2}(P_2 - P_3)$,
2) - $q = 90$ $\mathfrak{T}'' = \frac{1}{2}(P_3 - P_1)$,
3) - $r = 90$ $\mathfrak{T}''' = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)$.

14. Specielle Fälle der Hauptspannungen.

1. Es seien zwei der Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$ einander gleich, d. h. zwei Hauptspannungen seien einander gleich, aber nicht $= 0$ und von der dritten verschieden.

Wir bezeichnen diese beiden einander gleichen Spannungen mit P_{12} und die ihren Ebenen zugehörigen Winkel mit p_{12}, q_{12}, r_{12}, so muss auch $\frac{\partial \Theta}{\partial P_{12}} = 0$ sein, d. h. der Factor $m = 0$ von 9., und damit verschwindet auch der Zähler der Ausdrücke unter der Quadratwurzel für die Cos von p_{12}, q_{12}, r_{12}. Die dritte Hauptspannung steht senkrecht auf den einander gleichen; denn es ist mit den früheren Bezeichnungen

$P_3 \cos \varphi = P_3 (\cos p_{12} \cos p_3 + \cos q_{12} \cos q_3 + \cos r_{12} \cos r_3) = P_{12} \cos \varphi$, mithin, da P_3 nicht gleich P_{12}, $\cos \varphi = o$, d. h. $\varphi = 90°$.

Das Elasticitätsellipsoid und die Stellungsfläche sind, wenn wir nun die in 10. eingeführten Coordinaten mit x, y, z bezeichnen:

$$\frac{x^2 + y^2}{P_{12}^2} + \frac{z^2}{P_3^2} = 1 \text{ und}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{P_{12}} + \frac{z^2}{P_3} = \text{Const.}$$

Beides sind demnach Rotationsflächen, deren Rotationsaxe mit der Richtung der ungleichen Spannung zusammenfällt, während die anderen unbestimmt liegen in der zu ihr senkrechten Richtung.

Die Richtung der ungleichen Hauptspannung kann nun folgendermassen gefunden werden. Da $m = 0$ für die gleichen Spannungen gefunden worden ist, so erhält man

$$N_1 = P_{12} = \frac{T_{xy} T_{xz}}{T_{yz}}, \quad N_2 - P_{12} = \frac{T_{xy} T_{yz}}{T_{xz}}, \quad N_3 - P_{12} = \frac{T_{xz} T_{yz}}{T_{xy}}.$$

Setzt man diese Werthe in (N) ein, so erhält man die eine Gleichung

$$T_{xy} T_{xz} \cos p_{12} + T_{xy} T_{yz} \cos q_{12} + T_{xz} T_{yz} \cos r_{12} = 0.$$

Da ferner die ungleichen Spannungen senkrecht aufeinander stehen, muss sein

$$\cos p_3 \cos p_{12} + \cos q_3 \cos q_{12} + \cos r_3 \cos r_{12} = 0,$$

mithin können wir schreiben

$$T_{xy} T_{xz} = s \cos p_3, \quad T_{xy} T_{yz} = s \cos q_3, \quad T_{xz} T_{yz} = s \cos r_3,$$

wo s ein Factor ist, der gefunden wird durch Quadriren und Addiren dieser Gleichungen, nämlich

$$s^2 = \frac{1}{T_{xy}^2 T_{xz}^2 + T_{xy}^2 T_{yz}^2 + T_{xz}^2 T_{yz}^2}.$$

So haben wir also die Grössen p_3, q_3, r_3 bestimmt, durch deren Einsetzung in (N) man endlich erhält

$$P_3 = P_{12} + \frac{T_{xy}^2 T_{xz}^2 + T_{xy}^2 T_{yz}^2 + T_{xz}^2 T_{yz}^2}{T_{xy} T_{xz} T_{yz}} = P_{12} + \frac{1}{n^2 T_{xy} T_{xz} T_{yz}}.$$

2. Seien alle drei Hauptspannungen einander gleich, dann werden die den elastischen Zustand charakterisirenden Flächen Kugeln, deren Gleichungen sind, wenn die Hauptspannungen mit P bezeichnet werden,

$$x^2 + y^2 + z^2 = P^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = P.\ \text{Const.}$$

Die Richtung der Ebenen, auf denen nur Normalspannungen wirken, sind aber ganz unbestimmt, es wirken also auf alle Ebenen senkrechte Kräfte, es ist mithin

$$N_1 = N_2 = N_3 = P, \quad T_{yz} = T_{xz} = T_{yz} = 0.$$

3. Sei eine der Hauptspannungen $= 0$, während die anderen untereinander verschieden sind. In diesem Falle giebt es eine Ebene, auf welche keine elastischen Kräfte wirken, nämlich diejenige, welche senkrecht zu der Richtung ist, wo die Hauptspannung $= 0$ ist. Da nun nach 1. die elastischen Spannungen auf jede andere Ebene projicirt auf die Normale dieser Ebene gleich sein muss der Projection dieser Spannung auf die Normale einer jeden solchen Ebene und diese Projection immer 0 ist, so müssen alle elastischen Spannungen in der Ebene liegen, auf welche keine Spannung ausgeübt wird.

Die Betrachtung der Grösse der Spannungen auf beliebig gelegte Ebenen vereinfachen wir, wenn wir die Ebene der elastischen Spannungen zur xyEbene nehmen, dann sind $N_3 = T_{yz} = T_{xz} = 0$.

Dasselbe Resultat giebt auch Gleichung Θ, denn wenn eine Wurzel derselben $= 0$ sein soll, so muss

$$N_1 N_2 N_3 + 2\, T_{xy} T_{xz} T_{yz} - N_1 T_{yz}^2 - N_2 T_{xz}^2 - N_3 T_{xy}^2 = 0$$

sein. Dies aber kann erstens stattfinden bei $N_3 = o$, wenn $T_{yz} = T_{xz} = 0$ ist, und zweitens, wenn $N_2 = 0$, $N_3 = 0$, $T_{yz} = 0$. Dieser zweite Fall soll im Nächsten (4.) untersucht werden.

Die vorhandenen Spannungen P_1 und P_2, welche senkrecht zu einander sein müssen, mögen die Richtung der x und y Axe haben. Die charakterisirenden Gleichungen sind dann

$$\frac{x^2}{P_1^2} + \frac{y^2}{P_2^2} = 1 \text{ und } \frac{x^2}{P_1} + \frac{y^2}{P_2} = \text{Const.}$$

Sind die Spannungen übereinstimmend, Zug oder Druck, so ist die Stellungsfläche eine Ellipse, sind sie aber entgegengesetzt, Hyperbeln mit den Asymptoten.

Untersucht man also in diesem Falle die Grösse und Richtung der Spannung auf eine Ebene, so kommt es nicht an auf die Neigung derselben gegen diese Ebene, welche alle Spannungen enthält, sondern nur auf deren Spur in dieser Ebene.

4. Ist eine Hauptspannung $= 0$ und die beiden anderen gleich gross, so combiniren sich die Resultate von 2 und 3. Aus der Gleichung Θ folgt dann

$$N_1 N_2 N_3 + 2\, T_{xy} T_{xz} T_{yz} - N_1 T_{yz}^2 - N_2 T_{xz}^2 - N_3 T_{xy}^2 = 0,$$
$$N_1 + N_2 + N_3 = 0.$$

Dies ist erreicht, wenn

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0, \quad T_{xy} = T_{yz} = 0.$$

Es bleibt also nur T_{xz}, mithin haben wir dann reine Schubspannung oder Torsion und es ist

$$-P^3 + P\, T_{xy}^2 = o, \text{ also } P_1 = 0, \; P_2 = + T_{xz}, \; P_3 = - T_{xz}.$$

Von den beiden Hauptspannungen ist demnach die eine ein Zug, die

Da nun aber die Differentialquotienten von u, v, w klein gegen 1 sind, so wird man nur einen Fehler höherer Ordnung begehen, wenn man in den Gliedern, wo diese stehen, h, k, l vertauscht mit h′, k′ l′, so dass man erhält

$$\begin{aligned} h &= +h'\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}k'-\frac{\partial u}{\partial z}l', \\ k &= -h'\frac{\partial v}{\partial x}+k'\left(1-\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial v}{\partial z}l', \\ l &= -h'\frac{\partial w}{\partial x}-k'\frac{\partial w}{\partial y}+l'\left(1-\frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Werden nun diese Werthe in die ursprüngliche Kugelgleichung eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \zeta^2 = &\left[\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)h'-\frac{\partial u}{\partial y}k'-\frac{\partial u}{\partial z}l'\right]^2 \\ &+\left[-\frac{\partial v}{\partial x}h'+\left(1-\frac{\partial v}{\partial y}\right)k'-\frac{\partial v}{\partial z}\right]^2 \\ &+\left[-\frac{\partial w}{\partial x}k'-\frac{\partial w}{\partial y}k'+\left(1-\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]^2 \end{aligned} \qquad \text{(P.)}$$

als die gesuchte Gleichung des Verschiebungsellipsoides, die sich bei Vernachlässigung kleiner Grössen der zweiten Ordnung umformen lässt in

$$\begin{aligned} \zeta^2 = &\left(1-2\frac{\partial u}{\partial x}\right)h'^2-2\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)k'l' \\ &+\left(1-2\frac{\partial v}{\partial y}\right)k'^2-2\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)l'h' \\ &+\left(1-2\frac{\partial w}{\partial z}\right)l'^2-2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)h'k', \end{aligned}$$

oder mit Benutzung der Bezeichnung von 2.:

$$\begin{aligned} \zeta^2 = &(1-2\alpha)h'^2-2\varphi k'l' \\ &+(1-2\beta)k'^2-2\chi l'h' \\ &+(1-2\gamma)l'^2-2\psi h'k'. \end{aligned}$$

Wie in 14. kann aus (P.) gefolgert werden, dass die Parenthesen $= 0$ gesetzt und h′, k′, l′ als laufende Coordinaten gedacht, Ebenen bedeuten, deren Schnittlinien conjugirte Durchmesser sind. Vor der Verschiebung sind die Gleichungen dieser Ebenen $h' = o$, $k' = 0$, $l' = 0$, also die Coordinatenebenen selbst und deren Schnittlinien die Coordinatenaxen. Die Coordinatenaxen sind aber nach unserer ganz willkürlich genommenen Lage derselben irgend drei zu einander senkrechte Linien. Der hierdurch gefundene Satz heisst: Durch die Verschiebung wird aus einer Kugel ein Ellipsoid und zwar so, dass je drei senkrechte Linien nach der Verschiebung conjugirte Durchmesser werden. Da nun dieses Ellipsoid noch drei senkrechte conjugirte Durchmesser hat, so müssen auch drei senkrechte Ebenen sich nicht geändert haben, d. h. es muss drei Ebenen geben, die keine Verschiebung erleiden.

Um nun die Lage des Verschiebungsellipsoides mit dem des Elasticitätsellipsoides zu vergleichen führen wir in dasselbe die Spannungen ein. Nach 6. erhalten wir dann

$$\zeta^2 = (h'^2 + k'^2 + l'^2)\left(1 + 2\mu \frac{N_1 + N_2 + N_3}{E}\right) - 2\frac{1+\mu}{E}(N_1 h'^2 + N_2 k'^2 + N_3 l'^2)$$
$$+ 2 T_{yz} k' l' + 2 T_{zx} l' h' + 2 T_{xy} l' k'.$$

Beziehen wir diese Fläche auf das Coordinatensystem, welches bestimmt ist durch die Hauptspannungen, so ist

$$T_{yz} = T_{zx} = T_{xy} = o \text{ und } N_1 = P_1, \; N_2 = P_2, \; N_3 = P_3,$$

also

$$\zeta^2 = (h'^2 + k'^2 + l'^2)\left(1 + 2\mu \frac{P_1 + P_2 + P_3}{E}\right) - 2\frac{d+\mu}{E}(P_1 h'^2 + P_2 k'^2 + P_3 l'^2)$$

Es fallen also, da in diesen Gleichungen die Produkte $h'k'$, $h'l'$, $k'l'$ nicht mehr vorkommen, die Hauptaxen des Verschiebungsellipsoides mit denen des Elasticitätsellipsoides zusammen.

Aus den letzten Gleichungen ergeben sich den Hauptspannungen analog die Hauptausdehnungen (Hauptlängenänderungen)

$$\zeta\sqrt{\frac{E}{E - 2P_1 + 2\mu(P_2 + P_3)}} = \text{nährungsweise } \zeta\left(1 + \frac{P_1 - \mu(P_2 + P_3)}{E}\right),$$

$$\zeta\sqrt{\frac{E}{E - 2P_2 + 2\mu(P_1 + P_3)}} = \quad " \quad \zeta\left(1 + \frac{P_2 - \mu(P_1 + P_3)}{E}\right),$$

$$\zeta\sqrt{\frac{E}{E - 2P_3 + 2\mu(P_1 + P_2)}} = \quad " \quad \zeta\left(1 + \frac{P_3 - \mu(P_1 + P_2)}{E}\right).$$

Analog Dem, was über die Hauptspannungen gesagt ist, lassen sich Folgerungen über Hauptgleitungen aufstellen.

Literatur zu § 64—75.

Beer, Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität. Leipzig 1869.

Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862.

Grashof, Die Festigkeitslehre. Berlin 1866.

Kirchhoff, Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. Crelle's Journal. 40. 18.

— Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. Crelle's Journal. 56.

— Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig 1876.

Lamé, Leçons sur la théorie mathematique de l'élasticité. Paris, 2. éd. 1866.

Riemann, Partielle Differentialgleichungen, herausgegeben von Hattendorff. Braunschweig 1869.

Saint-Vénant, Mém. sur la torsion des prismes. 1855.

— Mém. sur la flexion des prismes. 1856. Liouville Journ. 2. série. Tom. I.

Scheffler, Theorie der Festigkeit gegen das Zerknicken. Braunschweig 1858.

Schlömilch, Theorie der Kettenbrückenlinien. Programm d. polytech. Schule zu Dresden. 1855.

Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. Braunschweig.

Winkler, Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit. Prag 1867.

Zug- und Druckelasticität (Normalelasticität). (§. 65.)

Ausser einer am Ende des Körpers angebrachten Kraft wirke auf das Innere eine Kraft.

Wir setzen hierbei voraus, dass alle Punkte eines Querschnittes gleiche Spannungen erfahren, dass also die am Ende angebrachte Kraft P, welche $\pm$ ist, je nachdem sie zu verlängern oder zu verkürzen sucht, und auch die auf das Innere wirkende Kraft über die Querschnitte sich gleichmässig vertheilt, damit die ebenen Querschnitte ihre Form nicht ändern. Dies wird um so mehr erfüllt sein, je kleiner der Querschnitt ist. Die auf die Einheit des Volumens bezogene Kraft sei mit Π bezeichnet. Beziehen wir dann unseren Körper auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt im festen Ende ist und dessen Längsaxe mit der x Axe zusammenfällt, so ist die Ausdehnung dx′ eines Längselementes dx zu berechnen durch die Proportion

$$dx : dx' = Eq : P + \int_x^l \Pi q\, dx, \text{ also}$$

$$dx' = \frac{1}{Eq}\left(P + \int_x^l \Pi q dx\right) dx,$$

wo $E = \frac{1}{E}$ (§ 64, 6.) $= m$ ist.

Die Gesammtausdehnung Δl des Stabes von oben bis zu x ist demnach

$$\Delta l = \int_0^x \frac{1}{Eq}\left(P + \int_x^l \Pi q\, dx\right) dx.$$

Dies giebt für einen constanten Querschnitt:

$$\Delta l = \frac{1}{Eq} Px + \frac{1}{Eq}\int_0^x \left(\int_x^l \Pi q\, dx\right) dx.$$

a) Der Stab befinde sich in verticaler Stellung und sei ausser der am Ende angebrachten Kraft P der Schwere unterworfen. Wenn dann γ das Gewicht der Volumeneinheit bedeutet, ist $\Pi = \pm\gamma$, je nachdem das freie Ende nach unten oder nach oben gewandt ist. Dann ist

$$\Delta l = \frac{1}{Eq} P \pm \frac{\gamma}{E}\left(lx - \frac{1}{2}\right) x^2,$$

und damit die Gesammtausdehnung

$$\lambda = \frac{Pl}{Eq} \pm \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Wenn wir endlich G, das Gesammtgewicht, statt γ einführen, so ist

$$\lambda = \frac{1}{Eq}(P \pm \tfrac{1}{2} G),$$

also die Ausdehnung, die man erhalten würde, wenn am Ende die Kraft $P \pm \frac{1}{2} G$ wirkte.

b) Ein zu einer Drehungsaxe senkrecht gestellter Stab sei mit einem Endpunkte fest in dieser gelegen und drehe sich gleichförmig mit einer Winkelgeschwindigkeit w um dieselbe. In dieser Lage befinden sich die Speichen eines rotirenden Rades. Dann ist $\Pi = \frac{\gamma}{g} w^2 x$, mithin

$$\Delta l = \int_0^x \frac{1}{Eq}\left(P + \int_x^l \frac{\gamma q}{g} w^2 x\, dx\right) dx.$$

$$= \frac{1}{Eq} Px + \frac{\gamma}{Eg} \frac{w^2}{2}\left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3\right).$$

Die Gesammtausdehnung ist dann

$$\lambda = \frac{1}{Eq} Pl + \frac{\gamma . w^2 l^3}{3\, Eg},$$

$$= \frac{1}{Eq}\left(P + \frac{G.\, w^2 l^2}{3}\right).$$

Vergleiche hierzu Anhang I. A. Nr. 8.

Biegungselasticität. (§. 67.)

1. Aufstellung der Gleichung.

Wir beziehen einen prismatisch geformten Balken von der Länge l, der an einem Ende fest eingefügt, am anderen frei ist, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in dem festen Punkte des Balkens ist und dessen x Axe mit der ungebogenen Lage des Balkens zusammenfällt.

Fig. 3.

Sei P (Fig. 3) die am freien Ende B des Balkens angreifende Kraft, die den $\angle\ \varphi$ mit der horizontalen Richtung macht. In Folge der Biegung entstehen in den Fasern oberhalb und unterhalb der neutralen Schicht Spannungen, von denen die oberen mit $p_1, p_2 \ldots$, die unteren mit $p_1', p_2' \ldots$ bezeichnet werden mögen.

Seien ferner $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_1', \alpha_2' \ldots$ die Winkel, welche die Tangenten an die gebogenen Fasern mit der x Axe bilden, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$P \cos \varphi + \Sigma\, p_n \cos \alpha_n + \Sigma\, p_n' \cos \alpha_n' = 0,$$

$$P \sin \varphi + \Sigma\, p_n \sin \alpha^n + \Sigma\, p_n' \sin \alpha_n' = 0.$$

Die Momentengleichungen sind, wenn unter z die Entfernungen der Angriffspunkte der Spannkräfte von der x Axe und v die von der y Axe verstanden werden: $P \sin \varphi\, (l - x) - \Sigma\, p_n z_n - \Sigma\, p'_n z'_n = 0,$

$$\Sigma\, p_n v_n - \Sigma\, p'_n z'_n = 0.$$

Die letzte dieser Gleichungen muss von selbst erfüllt sein, wenn wir annehmen, dass P in der xy Ebene liegt und der zu biegende Körper gegen diese Ebene symmetrisch ist. Diese Bedingungen sollen im Folgenden immer erfüllt sein und ausserdem wollen wir, um die Umtersuchung weiter zu vereinfachen, annehmen, dass die durch diese Kraft hervorgebrachte Biegung so gering sei, dass die Winkel α als sehr klein betrachtet werden können. Die zweite der oben aufgestellten Gleichungen wird dann $P \sin \varphi = 0$. Wenn wir nun zunächst diese Gleichung ganz unberücksichtigt lassen, so heisst dies, es soll ganz abgesehen werden von einer Verschiebung der Querschnitte gegen einander. Wenn wir ferner also nur Biegung betrachten, so müssen wir auch noch $\varphi = 90^\circ$ setzen. Dadurch reduciren sich unsere Gleichungen auf

$$0 = \Sigma . p_n, \quad P(l - x) = \Sigma . p_n z_n .$$

Die weitere Untersuchung muss sich zunächst auf die Grössen p erstrecken. Diese Kräfte entstehen durch Verlängerung und Verkürzung der Fasern, sind also den Gesetzen der Normalelasticität unterworfen. Setzen wir nun zunächst voraus, was für viele Materialien richtig ist, dass diese beiden Spannungen gleich sind, und bezeichnen wir mit S die Spannungen der Querschnittseinheit in der Einheit der Entfernung von der neutralen Schicht, so ist $p_n = S q_n z_n$, wenn q_n den Querschnitt der Faser in der Entfernung z_n bezeichnet. Damit werden unsere Gleichungen:

$$0 = S \Sigma q_n z_n, \quad P(l - x) = S \Sigma q_n z_n^2.$$

Ohne nun weiter den Werth S zu kennen, folgt aus der ersten Gleichung, da S eine constante, von dem Materiale und der angebrachten Kraft abhängige Grösse ist, nach den Lehren vom Schwerpunkte von Ebenen, dass die neutrale Schicht durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht.

Zur Bestimmung von S nehmen wir noch an, dass jeder ebene Querschnitt nach der Biegung eben bleibt, bezeichnen dann die Länge eines Stückes der Faser in der Entfernung z_n von der neutralen Schicht und λ_n deren Verlängerung, so ist $\lambda_n : \lambda = S z_n\, q_n : E q_n$, also $S z_n = \frac{z_n}{\lambda} . E$. Ferner ist, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie bedeutet:

$$\varrho : \lambda = z_n : \lambda_n \text{ oder } \frac{\lambda_n}{\lambda} = \frac{z_n}{\varrho}, \text{ mithin}$$

$$S z_n = \frac{z_n}{\varrho} . E, \text{ also } S = \frac{E}{\varrho}.$$

Die zweite noch weiter zu erörternde Gleichung verwandelt sich dadurch in die folgende:

$$P(l - x) = \frac{E}{\varrho} . \Sigma q_n z_n^2 \text{ oder } \varrho P (l - x) = E . \Sigma q_n z_n^2.$$

Die Grösse $E \Sigma q_n z_n^2$, die wir mit E T oder W bezeichnen wollen, ist eine Grösse, die erstens wegen E vom Material und zweitens wegen $\Sigma q_n z_n^2$ von der Form des Querschnittes abhängt. Die Berechnung der Grössen T für solche Querschnitte, die in der Lehre von der Elasticität und Festigkeit häufig vorkommen, siehe 14. Die Grösse E T nennt man das Biegungsmoment des Körpers. Entsprechend der Grösse $P(l - x)$, welche man Kraftmoment nennt, giebt man der Grösse $\frac{ET}{\varrho}$ den Namen Spannungsmoment, so dass demnach die obige Gleichung heisst: das Kraftmoment ist gleich dem Spannungsmoment. Vergl. Anhang I. A. 6., 8.

Wir haben hier und im Folgenden meistens eine Kraft P eingeführt und wenn vom Moment gesprochen wird, diese Kraft mit dem Hebelarm multiplicirt. Man hat auch statt dessen für das Moment den Buchstaben M eingeführt, so dass dann P ist $\frac{dM}{dx}$.

2. Gleichung der elastischen Linie, wenn der Balken mit einem Ende fest eingefügt ist.

Wir gehen aus von der in 1. entwickelten Gleichung, wenn wir den Anfang der x Axe an das freie Ende versetzen,

$$\varrho\, Px = E \Sigma q_n z_n^2 = W.$$

Diese erhält, nachdem ϱ durch Einführung des Coordinaten eines Punktes der Curve ausgedrückt ist, folgende Form:

$$\frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}} Px = W.$$

Berücksichtigen wir nun die oben angegebene Annahme, dass die Krümmung des Balkens nur eine sehr geringe sein soll, so ist $\frac{dy}{dx}$ gegen 1 verschwindend klein. Die obige Gleichung reducirt sich damit auf

$$W \frac{d^2y}{dx^2} = Px.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert, wenn zur Bestimmung der Constanten beachtet wird, dass für $x = l$, ist $\frac{dy}{dx} = 0$ und $y = 0$.

$$Wy = \frac{1}{2} P \left(\frac{1}{3} x^3 - l^2 x + \frac{2}{3} l^3\right).$$

Nehmen wir nun wieder den Coordinatenanfang an dem festen Punkt des Balkens, so müssen wir statt x schreiben $l - x$ und es wird aus der obigen Gleichung

$$Wy = \frac{1}{2} Px'^2 \left(l - \frac{x'}{3}\right).$$

Hiernach finden wir die Herabbiegung des äussersten Punktes des Balkens f, Pfeil genannt, wenn $x' = l$ ist, $f = \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl^3}{W}$.

Nach Berechnung des betreffenden T nach § 133 und § 67, 14. folgt, wenn der Querschnitt ist

1) rechteckförmig, $f = 4 \frac{l^3}{bh^3} \frac{P}{E}$,

2) kreisförmig, $f = \frac{4}{3} \frac{l^3}{\pi r^4} \cdot \frac{P}{E}$,

3) hohlrechteckförmig, $f = 4 \frac{l^3}{bh^3 - b_1 h_1^3} \frac{P}{E}$,

4) kreisringförmig, $f = \frac{4}{3} \cdot \frac{l^3}{\pi (r^4 - r_1^4)} \frac{P}{E}$.

Ist der Balken einer gleichförmig vertheilten Last unterworfen oder ist das Gewicht des Balkens die biegende Kraft, so ist, wenn G die ganze Last ist, die wir uns selbstverständlich am Schwerpunkte angreifend denken müssen,

$$W \frac{d^2 y}{dx'^2} = \frac{G}{l} \frac{(l - x'^2)}{2}.$$

Daraus folgt:

$$Wy = \frac{G}{2l}\left(\frac{l^2 x'^2}{2} - \frac{l x'^3}{3} + \frac{x'^4}{3.4}\right),$$

mithin

$$f = \frac{3}{8} \cdot \frac{Gl}{W}.$$

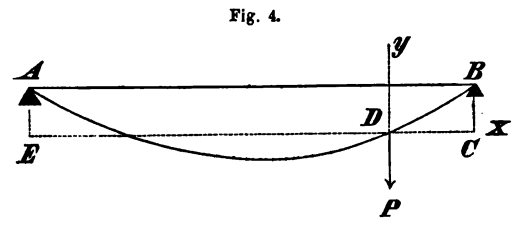
Ist ausserdem noch die Kraft P am Ende angebracht, so müssen wir die eben gefundenen Werthe von y addiren.

Sind mehrere Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten angebracht, so hat man die einzelnen Stücke des Balkens zwischen den Angriffspunkten besonders zu betrachten nach der Art, wie es in den folgenden Nummern geschieht.

3. Elastische Linie eines an den Endpunkten unterstützten Balkens.

Sei $AB = l$ (Fig. 4) die Länge des Balkens, der erstens durch eine gleichförmig vertheilte Last G, dann durch eine in D, welcher Punkt um e von der Mitte entfernt ist, wirkende Kraft P gebogen werde.

Fig. 4.



Wir beziehen die elastische Linie auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in dem verschobenen Punkt D liegt, dessen x Axe mit der Richtung des nicht gebogenen Stabes zusammenfällt. Um nun diese Untersuchung auf 2. zurückzuführen, denken wir uns den Punkt D fest und lassen auf den Balken die in A und B ausgeübten Druckkräfte

als biegende Kräfte wirken. Bezeichnen wir diese mit P_b, P_a, so ist zu deren Bestimmung nach den Gesetzen der Statik:

$$P_b l = P\left[\frac{l}{2} + e\right] + G\frac{l}{2},$$

$$P_b + P_a = P + G, \text{ mithin}$$

$$P_b = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}G + \frac{Pe}{l},$$

$$P_a = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}G - \frac{Pe}{l}.$$

Wenn wir nun die beiden Theile des Balkens DB und DA besonders betrachten, so haben wir in den Formeln von 2. nur zu setzen die Werthe P_a, P_b, $\frac{1}{2}l + e$, $\frac{1}{2}l - e$ für P und l. Bedenken wir ferner, dass der Balken in D für beide Theile dieselbe Tangente hat und nennen wir ε den vorläufig noch unbekannten Winkel dieser Tangente mit der Abscissenaxe, so ist die Gleichung der elastischen Linie für

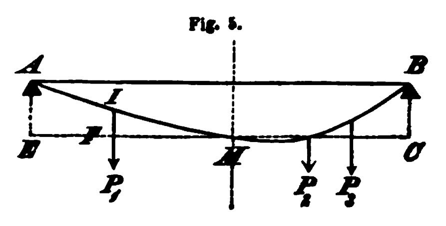
$$\text{DA:} \quad Wy = \left(P\frac{\frac{1}{2}l - e}{l} + \frac{1}{2}G\right)\left[\left(\frac{1}{2}l + e\right)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]$$
$$-\frac{G}{l}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}l + e\right)^2 x^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}l + e\right)x^3 + \frac{1}{24}x^4\right] - Wx \operatorname{tag} \varepsilon,$$

$$\text{DB:} \quad Wy = \left(P\frac{\frac{1}{2}l + e}{l} + \frac{1}{2}G\right)\left[\left(\frac{1}{2}l - e\right)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]$$
$$-\frac{G}{l}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}l - e\right)^2 x^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}l - e\right)x^3 + \frac{1}{24}x^4\right] + Wx \operatorname{tag} \varepsilon.$$

Die hierin noch enthaltene Unbekannte ε kann berechnet werden, wenn berücksichtigt wird, dass die Punkte A und B in der Horizontalen liegen müssen, dass also AE = BC ist. Diese Werthe erhält man, wenn man in die Gleichungen für DA und DB setzt $\frac{1}{2}l + e$ und $\frac{1}{2}l - e$. Die Rechnung giebt dann

$$\operatorname{tag} \varepsilon = \frac{P}{W}\frac{2e(\frac{1}{4}l^2 - e^2)}{3l} - \frac{Ge}{2lW}\left(\frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{3}e^2\right).$$

Leicht lässt sich diese Untersuchung verallgemeinern für den Fall, dass mehrere Kräfte wirken. Es mögen, um den Gang der Rechnung anzudeuten, an einem Balken, AB = l (Fig. 5) die Kräfte P_1, P_2, P_3 respective in den Entfernungen e_1, e_2, e_3 vom Mittelpunkte M angreifen. Wir denken uns den Mittelpunkt fest und führen statt des in A und in B stattfindenden Druckes P_a und P_b die entgegengesetzten Kräfte als Biegungskräfte ein. Wie oben ist



$$P_b . l = P_1\left(\frac{1}{2}l - e_1\right) + P_2\left(\frac{1}{2}l + e_2\right) + P_3\left(\frac{1}{2}l + e_3\right),$$

$$P_b + P_a = P_1 + P_2 + P_3.$$

Man findet nun die Gleichung für MI:

$$Wy = \frac{1}{2} P_1 \left(e_1 x^2 - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2} P_a \left(\frac{1}{2} l x^2 - \frac{1}{3} x^3\right) + x \operatorname{tg} \varepsilon,$$

worin jetzt noch tg ε unbekannt ist. Daraus lässt sich dann finden FI und tg ε_1, wenn mit ε_1 die Neigung der Tangente an I gegen die xAxe bezeichnet wird. Mit Berücksichtigung dieser Werthe ist dann gegeben die Gleichung der Linie AI:

$$Wy = -\frac{1}{2} P_a \left[\left(\frac{1}{2} l - e_1\right) x^2 - \frac{1}{3} x^3\right] + x \operatorname{tg} \varepsilon_1 + FI.$$

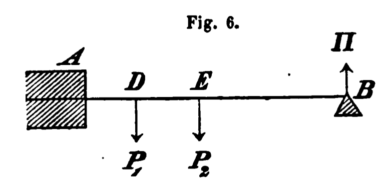
Daraus kann man dann AE berechnen.

Ebenso findet man auf der anderen Seite von M die Gleichungen der einzelnen Curventheile und endlich den Werth BC. Die noch unbestimmte Grösse ε ergiebt sich endlich aus der Gleichung AE = BC.

Es ist dann eine rein geometrische Untersuchung, den tiefsten Punkt des gebogenen Balkens zu finden. Bei einer beweglichen Kraft P ist e als veränderlich zu betrachten.

4. Die elastische Linie eines an einem Endpunkte unterstützten, am andern fest eingefügten Balkens.

Fig. 6.



Der Balken AB = l (Fig. 6) sei in A fest eingeklemmt und liege in B auf. Es wirken die Kräfte P_1, P_2 ..... in den Entfernungen e_1, e_2, ... von A und ausserdem die gleichförmig vertheilte Last G.

Wir führen statt des unbekannten Druckes auf die Stütze B die demselben entgegengesetzte Kraft Π ein, so ist zunächst für AD:

$$W \frac{d^2y}{dx^2} = P_1 (e_1 - x) + P_2 (e_2 - x) + \ldots + \frac{G}{2l} (l - x)^2 - \Pi (l - x).$$

Daraus ergiebt sich durch Integration mit Rücksicht darauf, dass für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = y = 0$.

$$Wy = P_1 \left(\frac{1}{2} e_1 x^2 - \frac{1}{6} x^3\right) + P_2 \left(\frac{1}{2} e_2 x^2 - \frac{1}{6} x^3\right) + \ldots.$$
$$+ \frac{G}{2l} \left(\frac{1}{2} l^2 x^2 - \frac{1}{3} l x^3 + \frac{1}{12} x^4\right) - \Pi \left(\frac{1}{2} l x^2 - \frac{1}{6} x^3\right).$$

Hieraus berechnet man die tg des Winkels, den die Tangente an die elastische Linie am Angriffspunkt von P_1 mit der xAxe bildet und auch die Herabbiegung des Punktes D. Mit Hülfe dieser Werthe kann man dann weiter wie oben die Gleichung für das nächste Stück bestimmen. Es enthalten aber alle diese Gleichungen die Unbekannte Π, die dann aus dem letzten Stück berechnet werden kann, da B in der Horizontalen liegt. Nehmen wir nur eine Kraft P_1, so gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

Für AD ist

$$Wy=P_1\left(\frac{1}{2}e_1x^2-\frac{1}{6}x^3\right)+\frac{G}{2l}\left(\frac{1}{2}l^2x^2-\frac{1}{3}lx^3+\frac{1}{12}x^4\right)-\Pi\left(\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{2}x^3\right).$$

Die Neigung der Curve in D ist dann gegeben durch

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{P}{W}\frac{1}{2}e^2+\frac{G}{lW}\left(\frac{1}{2}l^2e-\frac{1}{2}le^2+\frac{1}{6}e^3\right)-\frac{\Pi}{W}\left(le-\frac{1}{2}e^2\right).$$

Die Herabbiegung dieses Punktes ist

$$f=\frac{Pe^3}{3W}+\frac{Ge^2}{24lW}(6l^2-4le+e^2)-\frac{\Pi}{W}\left(\frac{1}{2}le^2-\frac{1}{6}e^3\right).$$

Für den zweiten Theil der Curve ist dann

$$W\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{G}{2l}(l-x)^2-\Pi(l-x).$$

Dies giebt integrirt mit Berücksichtigung der obigen Werthe

$$Wy=P\left(\frac{1}{2}e^2x-\frac{1}{6}e^3\right)+\frac{G}{l}\left(\frac{1}{4}l^2x^2-\frac{1}{6}lx^3+\frac{1}{24}x^4\right)-\Pi\left(\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Setzen wir hier $x=l$, so muss $y=0$ werden. Dies giebt

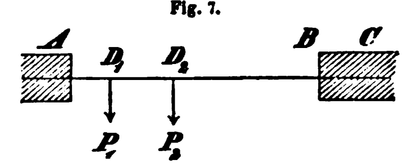
$$\Pi=\frac{Pe^2(3l-e)}{2l^3}+\frac{3}{8}G.$$

Die Discussion der erhaltenen Gleichung giebt dann den tiefsten Punkt und auch die Lage des einen vorkommenden Wendepunktes.

5. Die elastische Linie eines an beiden Endpunkten fest eingfügten Balkens.

Damit es bei diesem Falle noch eine neutrale Faserschicht geben kann, müssen wir annehmen, dass wenigstens das eine Ende horizontal gleiten kann. Wenn nun eine Biegung des Körpers wirklich stattfindet, so wird die Einfügung bei B z. B. bewirken, dass die Tangente an die elastische Linie in diesem Punkte horizontal ist, dass ferner in B ein Druck nach unten ausgeübt wird und das Ende des Balkens in der Einfügung nach oben

Fig. 7.



drückt. Statt dieser noch unbekannten Kräfte nehmen wir gleiche aber entgegengesetzte Kräfte, von denen Π nach oben und Π' in Entfernung $BC=a$ nach unten wirkt. Dann ergeben sich mit den oben schon gebrauchten Bezeichnungen für

$$AD_1: W\frac{d^2y}{dx^2}=\Sigma_{n=1}^{n=n}P_n(e_n-x)+\frac{G}{2l}(l-x)^2-\Pi(l-x)+\Pi'(a+l-x),$$

$$D_1D_2: W\frac{d^2y}{dx^2}=\Sigma_{n=2}^{n=n}P_n(e_n-x)+\frac{G}{2l}(l-x)^2-\Pi(l-x)+\Pi'(a+l-x),$$

. . . .

$$D_nB: W\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{G}{2l}(l-x)^2-\Pi(l-x)+\Pi'(a+l-x).$$

Bei der Integration ist dann zu bedenken, dass beim ersten Theil der Curve für $x = 0$ ist $y = \frac{dy}{dx} = 0$. Für den zweiten Theil hat man dann die aus dem ersten Theil gewonnenen Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ einzusetzen, die man erhält, wenn man nimmt $x = e_1$ u. s. f.

Zur Berechnung von Π und Π' dient dann die letzte Gleichung, in der für $x = l$ sein muss $y = \frac{dy}{dx} = 0$.

Selbstverständlich müssen wir zu demselben Resultate kommen, wenn wir in B beginnen und in A die Kräfte P und P′ mit der Entfernung b einführen.

Die angedeutete Rechnung gestaltet sich für nur eine Kraft wie folgt:

$$Wy = P_1\left(\frac{1}{2}ex^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{G}{2l}\left(\frac{1}{2}l^2x^2 - \frac{1}{3}lx^3 + \frac{1}{12}x^4\right) - \Pi\left(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{6}x^3\right)$$
$$+ \Pi'\left(\frac{1}{2}[a+l]\,x^2 - \frac{1}{6}x^3\right).$$

Die Neigung der Curve an D ist gegeben durch:

$$\operatorname{tag}\varepsilon = \frac{P}{W}\left(\frac{e^2}{2}\right) + \frac{G}{2lW}\left(l^2e - le^2 + \frac{e^3}{3}\right) - \Pi\left(le - \frac{e^2}{2}\right) + \Pi'\left([a+l]\,e - \frac{e^2}{2}\right).$$

Die Herabbiegung dieses Punktes ist:

$$f = \frac{P}{W}\cdot\frac{e^3}{3} + \frac{G}{2lW}\left(\frac{l^2e^2}{2} - \frac{le^3}{3} + \frac{e^4}{12}\right) - \left(\frac{\Pi}{W}\frac{le^2}{2} - \frac{e^3}{6}\right) + \frac{\Pi'}{W}\left(\frac{[a+l]\,e^2}{2} - \frac{e^3}{6}\right).$$

Hierdurch erhält man nun durch Einführung der berechneten Werthe von $\operatorname{tg}\varepsilon$ und f als Gleichung für DB:

$$Wy = P\left(\frac{1}{2}e^2x - \frac{1}{6}e^3\right) + \frac{G}{2l}\left(\frac{1}{2}l^2x^2 - \frac{1}{3}lx^3 + \frac{1}{12}x^4\right) - \Pi\left(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$
$$+ \Pi'\left(\frac{1}{2}[a+l]\,x^2 - \frac{1}{6}x^3\right).$$

Setzt man nun $x = l$, so muss $y = \frac{dy}{dx} = o$ sein. Dies giebt:

$$\Pi' = \frac{1}{12}\cdot\frac{Gl}{a} + P\,\frac{e^2l - e^3}{al^2},$$
$$\Pi = P\left(\frac{3e^2}{l^2} - \frac{2e^3}{l^3} + \frac{e^2}{al} - \frac{e^3}{al^2}\right) + G\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{l}{a}\right).$$

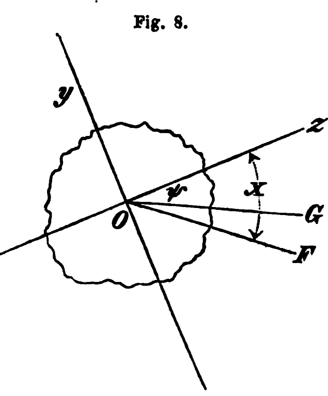
Die Untersuchung der Wendepunkte und der tiefsten Herabbiegung ist dann rein geometrisch.

Die Betrachtung der elastischen Linie bei mehreren Stützpunkten oder Einfügungen ist dann ebenso wie die der speciellen Fälle, die neuen Stützen oder Einfügungen geben Bedingungen zur Bestimmung der Constanten, die bei der Integration der einzelnen Abtheilungen hereinkommen.

6. Die elastische Linie, wenn die Richtung der Kraft den Querschnittt nicht symmetrisch theilt.

Das Coordinatensystem liegt ebenso wie in den vorhergehenden Untersuchungen, d. h. die xAxe hat die Richtung des ungebogenen Balkens, während die y und zAxe mit den Hauptaxen des Querschnittes zusammenfallen. Die angebrachte Kraft befindet sich nun weder in der xz, noch in der xyEbene, sie sei so bestimmt, dass die Axe ihres Momentes OF (Fig. 8) mit der zAxe den $\angle \chi$ bildet. Die Biegung findet dann im Allgemeinen wiederum um eine andere Axe statt, diese heisse OG und bilde mit Oz den unbekannten Winkel ψ, der auch für die verschiedenen Quersshnitte ein verschiedener sein wird. Mit Beibehaltung der unter 1. aufgestellten Bezeichnung ergeben sich dann als Gleichgewichtsbedingungen:

Fig. 8.



$$P \cos \varphi + \Sigma p'_n \cos \alpha_n + \Sigma p'_n \cos \alpha'_n = 0,$$
$$P \sin \varphi + \Sigma p_n \sin \alpha_n + \Sigma p'_n \sin \alpha'_n = 0,$$
$$P \sin \varphi \cos \chi - \Sigma p_n z_n - \Sigma p'_n z'_n = 0.$$
$$- P \sin \varphi \sin \chi - \Sigma p_n y_n - \Sigma p'_n y'_n = 0.$$

Von diesen Gleichungen findet zunächst die zweite hier keine Berücksichtigung, da die in dieser vorkommenden Kräfte nur eine Verschiebung der Querschnitte bewirken, von der abgesehen werden soll. Mit Hülfe der Annahme über Ausdehnung und Zusammenziehung, wie sie 1. gemacht ist, können diese Gleichungen geschrieben werden:

$$P \cos \varphi = \Sigma S q_n,$$
$$Px \sin \varphi \cos \chi = \Sigma S q_n z_n,$$
$$- Px \sin \varphi \sin \chi = \Sigma S q_n y_n.$$

Bezeichnen wir nun mit η die Entfernung der Punkte von der Biegungsaxe OG und mit ϱ den Krümmungshalbmesser der Biegungscurve, so werden diese Gleichungen

$$P \cos \varphi = \frac{E}{\varrho} \Sigma q_n \eta,$$
$$Px \sin \varphi \cos \chi = \frac{E}{\varrho} \Sigma q_n \eta z_n,$$
$$- Px \sin \varphi \sin \chi = \frac{E}{\varrho} \Sigma q_n \eta y_n.$$

Setzen wir $\varphi = 90°$, d. h. nehmen wir nur senkrecht wirkende Kräfte, so wird die erste Gleichung $0 = \Sigma q_n \eta$,
d. h. die Biegungsaxe geht wie oben durch den Schwerpunkt des Querschnittes. Da nun ausserdem

$$\eta = z \cos \psi - y \sin \psi,$$

so sind die noch übrigen Gleichungen

$$Px \cos \chi = \frac{E}{\varrho} \cos \psi \, \Sigma qz^2 - \frac{E}{\varrho} \sin \psi \, \Sigma qyz,$$

$$-Px \sin \chi = \frac{E}{\varrho} \cos \psi \, \Sigma qzy - \frac{E}{\varrho} \sin \psi \, \Sigma qy^2.$$

Weil nun unsere Coordinatenaxen durch die Hauptaxen des Querschnittes gelegt sein sollen, so erlangen unsere Gleichungen, wenn die zu den Axen gehörigen Hauptträgheitsmomente Σqz^2 und Σqy^2 mit T und T′ bezeichnet werden, folgende Form:

$$Px \cos \chi = \frac{E}{\varrho} \cos \psi \, T,$$

$$Px \sin \chi = \frac{E}{\varrho} \sin \psi \, T'.$$

Deren Division liefert die Unbekannte ψ, nämlich

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{T'}{T} \operatorname{tg} \psi.$$

Die Elimination von ψ giebt:

$$\frac{E}{\varrho} = Px \sqrt{\frac{\cos^2 \chi}{T^2} + \frac{\sin^2 \chi}{T'^2}},$$

oder näherungsweise

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Px}{E \sqrt{\frac{\cos^2 \chi}{T^2} + \frac{\sin^2 \chi}{T'^2}}},$$

Diese Gleichungen gelten nun auch noch, wenn nicht blos eine Kraft P wirkt, sondern mehrere nach verschiedenen Seiten senkrecht zur Axe des Balkens, auch wenn zu den verschiedenen Kräften die Widerstandskräfte vorhandener Stützen hinzugerechnet werden. Statt Px hat man dann nur die Summe der Momente aller einzelnen Kräfte zu setzen. Daraus geht aber zugleich hervor, dass der $\angle \chi$ für die verschiedenen Querschnitte ein verschiedener ist, wodurch bewiesen ist, dass die Biegungscurve im Allgemeinen eine Curve doppelter Krümmung ist. Ist $T < T'$ oder $\Sigma qz^2 < \Sigma qy^2$, so ist zugleich T das kleinste und T′ das grösste aller Trägheitsmomente, dann ist eine Biegung um die z Axe mit dem kleinstmöglichen Widerstande verbunden. Man nennt dann die z Axe die Axe der leichtesten Biegung. Man kann daher sagen, wenn die Axe des biegenden Momentes nicht mit einer Hauptaxe des Querschnittes zusammenfällt, dass die wirkliche Biegungsaxe zwischen der Axe der Kraftmomente und der der leichtesten Biegung liegt, und zwar wird sie nach der letzteren bei demselben χ um so mehr abgelenkt, je mehr die Dimensionen des Querschnittes in zwei aufeinander senkrechten Richtungen und somit auch die Hauptträgheitsmomente T und T′ verschieden sind. So kann es kommen, dass bei einer sehr dünnen Platte die Biegungsebene beinahe senkrecht zur Kraftebene ist, d. h. wenn χ nahezu 90° ist, kann doch ψ nahe $= 0$ sein.

Die Gleichung, welche die Lage der Biegungsaxe bestimmt,

$$\operatorname{tag} \chi = \frac{T'}{T} \operatorname{tag} \psi,$$

lässt eine geometrische Deutung zu. Seien e und e' die Trägheitsradien von T und T'. Man construire nun eine Ellipse, deren Axen mit den Hauptaxen des Querschnittes zusammenfallen und den Längen e und e' proportional sind. Die Gleichung einer solchen Ellipse ist

$$\frac{y^2}{e'^2} + \frac{z^2}{e^2} = 1.$$

Suchen wir nun den Punkt derselben, dessen Normale mit der Biegungsebene parallel ist, dessen Normale also mit der y Axe den $\angle \psi$ macht. Die tang des Winkels der Normale mit der y Axe ist

$$-\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg} \psi = \frac{e^2 y}{e'^2 z}.$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung, so erhält man

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{e'^2}{e^2} \cdot \frac{e^2 y}{e'^2 z} = \frac{y}{z},$$

d. h. der Radiusvector nach dem betreffenden Punkt der Ellipse liegt in der Kraftebene. Es ist also die Normale der Biegungsebene parallel der im Durchschnitt der resultirenden Kraft mit der Ellipse an diese gelegten Tangente, oder sie ist die conjugirte Richtung zu der Richtung der resultirenden Kraft, so dass folgender Satz gilt: Trägt man den Trägheitsradius jeder Hauptaxe senkrecht gegen dieselbe vom Schwerpunkt aus an und construirt über diese Strecken als Axen eine Ellipse, so ist die der resultirenden Kraft in Bezug auf dieselbe conjugirte Richtung die Normale der zugehörigen Biegungsebene.

7. Die elastische Linie bei ungleichmässig vertheilter Last.

Wir nehmen, um sogleich den allgemeinsten Fall zu erörtern, einen Balken, der mit seinen beiden Enden fest eingefügt ist. Die ungleichmässig vertheilte Last kann auch so viel bedeuten, als dass der Körper einen veränderlichen Querschnitt hat und das Gewicht desselben zu berücksichtigen ist. Der Einfachheit wegen sehen wir hier ab von einer isolirten Last, da die Berücksichtigung dieser nach den vorhergehenden Nummern leich hinzugefügt werden kann. Um eine Rechnung anzustellen, muss das Gesetz der Querschnitts- oder Belastungsänderung gegeben sein. Bezeichnen wir nun die Last für die Längeneinheit im Abstande ξ von A, dem einen Ende, mit q, wo q ist eine Function von ξ, so ist unter Beibehaltung der Bezeichnungen der vorhergehenden Nummern das Biegungsmoment für einen Querschnitt in der Entfernung x von A : $\int_x^l q d\xi (\xi - x) = X$, und demnach

$$W \frac{d^2 y}{dx^2} = X - (\Pi - \Pi')(l - x) - \Pi' a.$$

Durch einmalige Integration erhalten wir dann

$$\frac{dy}{dx} = \int_x^l \frac{X\,dx}{W} - (\Pi - \Pi')\int_x^l \frac{l-x}{W}\,dx + \Pi' a \int_x^l \frac{dx}{W}.$$

Bedenkt man nun, dass

$$y = x\frac{dy}{dx} - \int_0^x x\frac{d^2y}{dx^2}\,dx,$$

so findet man

$$y = x\int_x^l \frac{x\,dx}{W} - (\Pi - \Pi')\,x\int_x^l \frac{(l-x)}{W}\,dx + \Pi' a\,x\int_x^l \frac{dx}{W}$$

$$-\int_0^x \frac{x\,X\,dx}{W} + (\Pi - \Pi')\int_0^x \frac{x\,(l-x)}{W}\,dx - \Pi' a\int_0^x \frac{x\,dx}{W}.$$

Zur Bestimmung der willkürlich genommenen Grössen haben wir dann wieder, dass $\frac{dy}{dx} = 0$ ist für $x = 0$ und $x = l$; $y = 0$, für $x = 0$ und $x = l$. Dies gäbe eigentlich vier Bedingungen zur Bestimmung von nur zwei Unbekannten $\Pi - \Pi'$ und $\Pi' a$. Es würden also zwei Bedingungen ausreichen. Will man alle vier Bedingungen benutzen, so könnte man die Gleichung noch ableiten, vom anderen Endpunkte anfangend und müsste dann zwei neue Unbekannte für das Ende A einführen.

8. Zusammengesetzte Elasticität.

In den Gleichungen, die in 1. aufgestellt worden sind, ist erstens ein Biegungsmoment vernachlässigt worden, welches sich ergiebt, wenn eine Biegung eingetreten ist, ferner ist in den darauf folgenden Betrachtungen $\varphi = 90^0$ gesetzt worden. Wenn wir nun den allgemeineren Fall betrachten, also die dort auftretenden Grössen nicht mehr vernachlässigen, und annehmen, die Biegung im äussersten Punkte sei f, so erhalten wir statt der dort aufgestellten Gleichungen folgende mit Beibehaltung der eingeführten Bezeichnung:

1) $P \sin\varphi = \Sigma\, p_n \sin\alpha_n + \Sigma\, p'_n \sin\alpha'_n,$

2) $P \cos\varphi = \Sigma\, p_n \cos\alpha_n + \Sigma\, p'_n \cos\alpha'_n,$

3) $P \sin\varphi\,(l - x) + P\cos\varphi\,(f - y) = \Sigma\, p_n z_n + \Sigma\, p'_n z'_n.$

Die im Obigen schon benutzte Annäherung über die Winkel α giebt nun

$$P\cos\varphi = \Sigma\, p_n + \Sigma\, p'_n,$$

$$P\sin\varphi\,(l - x) + P\cos\varphi\,(f - y) = \Sigma\, p_n z_n + \Sigma\, p'_n z'_n.$$

Die aus 1) folgende Gleichung $P\sin\varphi = 0$ muss aus demselben Grund wie unter 1. vernachlässigt werden.

Durch Einführung der Spannungen statt der Kräfte p lassen sich diese Gleichungen unter der Annahme, dass durch Druck und Zug gleiche Spannungen hervorgerufen werden, mit leicht verständlicher Bezeichnung so schreiben

$$P \cos\varphi = \int S\,dq,$$
$$P \sin\varphi\,(l - x) + P\cos\varphi\,(f - y) = \int z_n\,S\,dq.$$

Es ist nun vor Allem nöthig, die Spannung S auszudrücken durch den Elasticitätsmodul E und den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie. Mit den oben schon gebrauchten Bezeichnungen ist

$$S = \frac{\lambda_n}{\lambda} E.$$

Bedeutet nun λ_0 die Längenänderung in der Axe des Balkens, denn es geht hier nicht wie in 1. die neutrale Schicht durch den Schwerpunkt, so ist

$$\lambda \pm \lambda_0 : \lambda + \lambda_n = \varrho : \varrho + z_n,$$
$$\lambda_n = \pm\lambda_0 + (\lambda \pm \lambda_0)\frac{z_n}{\varrho}, \text{ also}$$
$$S = E\left[\frac{\pm\lambda_0}{\lambda} + \frac{\lambda \pm \lambda_0}{\lambda}\,\frac{z_n}{\varrho}\right].$$

Zur Berechnung der noch unbekannten Grösse λ_0 dient die erste der obigen Gleichungen, die sich nun umformt in

$$P \cos\varphi = P\,\frac{\pm\lambda_0}{\lambda}\int dq + E\,\frac{\lambda \pm \lambda_0}{\lambda\varrho}\int z_n\,dq.$$

Da nun das zweite Integral wegen der Lage der Axe durch den Schwerpunkt verschwindet, so ist

$$P\cos\varphi = \frac{\pm E\lambda_0 Q}{\lambda}, \text{ also } \pm\lambda_0 = \frac{\lambda\,P\cos\varphi}{E.Q}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Spannung ein, so erhalten wir

$$S = \frac{P\cos\varphi}{Q} + \frac{EQ + P\cos\varphi}{P}\,\frac{z_n}{\varrho}.$$

Nit Hülfe dieses Ausdrucks verwandelt sich die zweite Gleichgewichtsgleichung in

$$P\sin\varphi\,(l - x) + P\cos\varphi\,(f - y) = \int\frac{P\cos\varphi}{Q}\,z_n\,dq + \int\frac{EQ + P\cos\varphi}{Q}\,\frac{z_n^2\,dq}{\varrho},$$
$$= \frac{ET}{\varrho} + \frac{P\cos\varphi\,T}{Q\varrho}.$$

Diese Gleichung ist anders angeordnet:

$$\frac{1}{Q\varrho} = \frac{P\sin\varphi\,(l - x) + P\cos\varphi\,(f - y)}{T\,(EQ + P\cos\varphi)}.$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks ist es nun möglich, die Lage der neutralen Schicht gegen die Ebene durch die Schwerpunktsaxe zu bestimmen. Führen wir nämlich diesen Werth von ϱ in die Spannung ein, so erhalten wir:

$$S = \frac{P\cos\varphi}{Q} + \frac{P\sin\varphi\,(l - x) + P\cos\varphi\,(f - y)}{T}\,z_n.$$

Bezeichnet nun z die gesuchte Entfernung der neutralen Schicht von der Axe der Schwerpunkte, so ist, da für diese $S = 0$ ist,

$$0 = \frac{P\cos\varphi}{Q} + \frac{P\sin\varphi\,(l - x) + P\cos\varphi\,(f - y)}{T}\,z, \text{ also}$$

$$z = -\frac{T}{Q[(l-x)\,\mathrm{tg}\,\varphi + f - y]}.$$

Ist $\varphi = 90^\circ$, so ist, wie in 1. bewiesen ist, $z = 0$.

Die Lage der neutralen Schicht ist demnach nicht abhängig von der Grösse der Kraft, sondern nur von deren Richtung. Da $l - x$ und $f - y$ immer positive Grössen sind, so hängt das Vorzeichen von z auch im Allgemeinen von φ ab.

Nehmen wir nun an, die Richtung der Kraft bilde mit dem Prisma einen spitzen Winkel, also φ sei zwischen 0 und 90°, so ist z immer negativ, also liegt die neutrale Schicht immer unter der Schwerpunktsaxe. Es verdient bemerkt zu werden, dass für unsere Entwickelung vorher das Vorzeichen von λ_0 ganz unbestimmt gelassen worden ist, also hierdurch das negative Zeichen von λ_0 als unrichtig nachgewiesen ist. Es werden also mehr Schichten ausgedehnt als zusammengezogen. Wenn nun aber die angebrachte Kraft nach der anderen Seite wirkt, also φ ein stumpfer Winkel ist so wirken die Momente entgegengesetzt. Um diese Betrachtung zu vereinfachen schreiben wir dann, indem wir den spitzen Nebenwinkel φ' von φ einführen, also $\varphi = 180 - \varphi'$,

$$P \sin\varphi' (l - x) - P \cos\varphi' (f - y) = \int z_n S\, dq.$$

Somit geht die obige Gleichung über in

$$P \sin\varphi' (l - x) - P \cos\varphi' (f - y) = + \frac{ET}{\varrho} - \frac{P \cos\varphi' T}{Q\varrho}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{Q\varrho} = \frac{P \sin\varphi' (l - x) - P \cos\varphi' (f - y)}{+ T(EQ - P\cos\varphi')},$$

$$S = + \frac{P\cos\varphi'}{Q} + \frac{P \sin\varphi' (l-x) - P\cos\varphi' (f-y)}{T.} z_n,$$

$$S = 0, \text{ wenn } z_n = -\frac{T}{Q[(l-x)\,\mathrm{tg}\,\varphi' - (f-y)]}.$$

Dieser Werth von z_n wird auch immer negativ sein, da mit φ' auch f abnimmt. Also sind auch dann noch selbstverständlich mehr ausgedehnte als zusammengedrückte Schichten vorhanden.

Aus dem eben berechneten Werth von z geht noch hervor, dass die Entfernung der Punkte, in denen keine Spannung ist, von der Axe nicht überall dieselbe ist, dass sie sogar ausserhalb des Körpers zu liegen kommt und für $x = l$ und $x = f$ im Unendlichen liegt. Es kann also hier eigentlich von einer neutralen Schicht nicht gesprochen werden.

9. Die Biegungscurve der Axe, wenn es ausser einem Biegungsmoment noch einen Druck giebt.

Die Gleichung zur Bestimmung derselben ist die in der vorigen Nummer aufgestellte Gleichung, wenn noch die Bedingung, dass $0 > \varphi > 90^\circ$ ist, hinzugenommen wird.

$$\frac{T(QE + P\cos\varphi)}{Q\varrho} = P\sin\varphi\,(l - x) + P\cos\varphi\,(f - y).$$

Dies vereinfacht sich, wenn erstens zur Abkürzung $\frac{T(QE + P\cos\varphi)}{Q}$ mit V bezeichnet und dann die Biegung so gering angenommen wird, dass $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt werden kann. Es wird

$$V\frac{d^2y}{dx^2} = P\sin\varphi\,(l - x) + P\cos\varphi\,(f - y).$$

Um das Integral dieser Gleichung zu finden, betrachten wir zunächst

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P\cos\varphi}{V}(f - y),$$

deren Integral können wir setzen

$$y = f + A\cos\beta x + B\sin\beta x.$$

Die Einführung dieses Werthes in diese Differentialgleichung giebt $\beta^2 = \frac{P\cos\varphi}{V}$, während A und B noch ganz willkürlich bleiben. Betrachtet man nun A und B als zwei Veränderliche, so können wir zunächst für A und B eine beliebige Bedingung setzen, diese sei, dass $\frac{dy}{dx}$ dieselbe Form wie oben erhält. Die Ausführung der Differentiation giebt

$$\frac{dy}{dx} = -A\beta\sin\beta x + B\beta\cos\beta x + \frac{dA}{dx}\cos\beta x + \frac{dB}{dx}\sin\beta x,$$

also nach der ersten Bedingung:

$$\frac{dA}{dx}\cos\beta x + \frac{dB}{dx}\sin\beta x = 0.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\beta^2\cos\beta x - B\beta^2\sin\beta x - \frac{dA}{dx}\beta\sin\beta x + \frac{dB}{dx}\beta\cos\beta x,$$

also nach der zweiten Bedingung und mit Berücksichtigung der schon erhaltenen Gleichungen

$$-\frac{dA}{dx}\sin\beta x + \frac{dB}{dx}\cos\beta x = (l - x)\sqrt{\frac{P\sin^2\varphi}{V\cos\varphi}}.$$

Daraus erhält man

$$\frac{dA}{dx} = -(l - x)\sqrt{\frac{P\sin^2\varphi}{V\cos\varphi}}\sin\beta x, \qquad \frac{dB}{dx} = (l - x)\sqrt{\frac{P\sin^2\varphi}{V\cos\varphi}}\cos\beta x,$$

Mithin

$$A = \int_x^l (l - x)\sqrt{\frac{P\sin^2\varphi}{V\cos\varphi}}\sin\beta x\,dx + A_0,$$

$$B = -\int_x^l (l - x)\sqrt{\frac{P\sin^2\varphi}{V\cos\varphi}}\cos\beta x\,dx + B_0.$$

Die Gleichung der gesuchten Linie ist also:

$$y = f + A_0\cos\beta x + B_0\sin\beta x + \cos\beta x\int_x^l (l - x)\sqrt{\frac{P\sin^2\varphi}{V\cos\varphi}}\sin\beta x\,dx$$
$$- \sin\beta x\int_x^l (l - x)\sqrt{\frac{P\sin^2\varphi}{V\cos\varphi}}\cos\beta x\,dx,$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$y = f + A_0' \cos \beta x + B_0' \sin \beta x - (l - x) \operatorname{tag} \varphi,$$

wo A_0' und B_0' die Integrationsconstanten sind, verbunden mit den durch die Ausführung der Integration hereingekommenen, und f die Grösse der Ausbiegung bedeutet.

Zur Bestimmung dieser Grössen haben wir zunächst, dass für $x = l$ sein muss $y = f$, also ist

$$0 = A_0 \cos \beta l + B_0 \sin \beta l. \quad \odot$$

Weitere Bedingungen erhalten wir durch die vorgeschriebene Befestigung.

a) Das Prisma sei mit dem einen Ende fest eingefügt. Dann ist für $x = 0$ auch $y = \frac{dy}{dx} = 0$, also

$$0 = f + A_0' - l \operatorname{tg} \varphi, \quad 0 = B_0' \beta + \operatorname{tg} \varphi.$$

Dies giebt mit Hülfe der schon gefundenen Gleichung $\odot$:

$$B_0' = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\beta}, \quad A_0' = \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \beta l}{\beta}, \quad f = \operatorname{tg} \varphi \left(l - \frac{\operatorname{tg} \beta l}{\beta}\right).$$

Setzt man aber $\varphi = 0$, so erhält man

$$A_0' = -f, \; B_0' = 0 \text{ und } = -f \cos \beta l.$$

Diese letzte Bedingung ist erfüllt, wenn $f = 0$ ist, wie es der Natur der Sache entspricht, denn es kann dann keine Biegung eintreten. Der Bedingung ist aber genügt durch $\cos \beta l = 0$ oder $\beta l = \sqrt{\frac{P \cos \varphi}{V}}\, l = \frac{2n + 1}{2} \pi$. Es würde dann der Gleichung genügt durch jede beliebige Grösse von f, was offenbar ein absurdes Resultat ist. Dies kann nur so gedeutet werden, dass für diesen Fall, wenn doch in Folge irgend welcher theoretisch nicht vorgesehener Fälle eine Biegung eintritt, die obige Vernachlässigung, nach der $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ist und die Winkel α als verschwindend angenommen sind, nicht passen, dass also die eintretende Biegung nicht mehr als klein betrachtet werden kann.

b) Sei für $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varepsilon$. Dann ist

$$A^0 = -f + l \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \beta B_0 + \operatorname{tg} \varphi.$$

Diese Gleichungen verbunden mit $\odot$ geben:

$$B_0' = \frac{1}{\beta}(\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \varphi), \quad A_0' = -\frac{\operatorname{tg} \beta l}{\beta}(\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \varphi),$$

$$f = l \operatorname{tag} \varphi + \frac{\operatorname{tg} \beta l}{\beta}(\operatorname{tg} \varepsilon - \operatorname{tg} \varphi).$$

Die Gleichung der Biegungscurve für den blossen Druck, also $\varphi = 0$, ist dann

$$y = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\beta}\left[\sin \beta x + \operatorname{tg} \beta l\,(1 - \cos \beta x)\right].$$

Man übersieht, dass der oben angegebene Weg auch noch passt, wenn statt $P \sin \varphi (l - x)$ ganz allgemein ein Biegungsmoment M gegeben ist, dann hat man zu setzen:

$$A = + \int_x^l \frac{M}{\sqrt{V.P \cos \varphi}} \sin \beta x + A_0,$$

$$B = - \int_x^l \frac{M}{\sqrt{V.P \cos \varphi}} \cos \beta x + B_0.$$

10. Biegungscurve der Axe, wenn es ausser dem Biegungsmoment einen Zug giebt.

Als Ausgangspunkt haben wir dieselben Gleichungen wie oben, nur müssen wir hier φ zwischen 90° und 180° nehmen, oder wenn wir auch hier für φ den spitzen Winkel nehmen, setzen die entgegengesetzten Vorzeichen beim cos. Es ist demnach

$$\frac{T(QE - P \cos \varphi)}{Q\varrho} = P \sin \varphi (l - x) - P \cos \varphi (f - y),$$

oder mit denselben Abkürzungen und Annäherungen wie oben

$$V \frac{d^2y}{dx^2} = P \sin \varphi (l - x) - P \cos \varphi (f - y).$$

Wir untersuchen zunächst die Gleichung:

$$V \frac{d^2y}{dx^2} = - P \cos \varphi (f - y).$$

Deren Integral sei

$$y = f + Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$

Die dem Obigen analogen Rechnungen geben dann

$$\alpha^2 = \frac{P \cos \varphi}{V.},$$

$$\frac{dA}{dx} e^{\alpha x} + \frac{dB}{dx} e^{-\alpha x} = 0,$$

$$\frac{dA}{dx} e^{\alpha x} - \frac{dB}{dx} e^{-\alpha x} = (l - x) \sqrt{\frac{P \sin^2 \varphi}{V \cos \varphi.}}.$$

Mithin ist

$$\frac{dA}{dx} e^{\alpha x} = \tfrac{1}{2} (l - x) \sqrt{\frac{P \sin^2 \varphi}{V \cos \varphi.}},$$

$$\frac{dB}{dx} e^{-\alpha x} = - \tfrac{1}{2} (l - x) \sqrt{\frac{P \sin^2 \varphi}{V \cos \varphi.}}, \text{ oder}$$

$$A = - \int_x^l e^{-\alpha x} \tfrac{1}{2} (l - x) \sqrt{\frac{P \sin^2 \varphi}{V \cos \varphi}} dx + A_0,$$

$$B = \int_x^l e^{\alpha x} \tfrac{1}{2} (l - x) \sqrt{\frac{P \sin^2 \varphi}{V \cos \varphi}} dx + B_0.$$

Die Gleichung der gesuchten Curve ist also

$$y = f + A_0 e^{\alpha x} + B_0 e^{-\alpha x} - e^{\alpha x} \int_x^l e^{-\alpha x} \tfrac{1}{2}(l - x) \sqrt{\frac{P \sin^2 \varphi}{V \cos \varphi}}\, dx$$

$$+ e^{-\alpha x} \int_x^l e^{\alpha x} \tfrac{1}{2}(l - x) \sqrt{\frac{P \sin^2 \varphi}{V \cos \varphi}}\, dx,$$

oder nach Ausführung der oben angedeuteten Integration

$$y = f + A_0' e^{\alpha x} + B_0' e^{-\alpha x} - \operatorname{tg} \varphi\, (l - x).$$

Die Bestimmung der darin noch vorkommenden Unbekannten geschieht nun analog dem Obigen.

a) Der Stab ist unten fest eingefügt, also für $x = 0$ ist $y = 0, \frac{dy}{dx} = 0$ und für $x = l$ ist $y = f$, so ist

$$0 = f + A_0' + B_0' - \operatorname{tg} \varphi l,\ 0 = \alpha (A_0' - B_0') + \operatorname{tg} \varphi,\ f = f + A_0' e^{\alpha l} + B_0' e^{-\alpha l}.$$

Setzt man aber $\varphi = 0$, so erhält man

$$A_0' = B_0' = f = 0,$$

also kann eine Biegung unter diesen Umständen nicht stattfinden, wenn nicht irgend eine andere Kraft dieselbe bewirkt.

b) Ist für $x = 0$ auch $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tag} \varepsilon$ und für $x = l$, $y = f$, so ist $0 = f + A_0' + B_0'$, $\operatorname{tg} \varepsilon = \alpha (A_0' - B_0')$ und $f = f + A_0' e^{\alpha l} + B_0' e^{-\alpha l}$. Dies giebt dann

$$f = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\alpha} \frac{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}}{a^{\alpha l} + e^{-\alpha l}},\quad A_0' = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon\, e^{-\alpha l}}{\alpha \left(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}\right)},\quad B_0' = -\frac{\varepsilon\, e^{\alpha l}}{\alpha \left(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}\right)}.$$

Setzt man dann $\varphi = 0$, also nur Zug, so ist

$$y = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\alpha} \frac{\left[e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}\right] - \left[e^{\alpha (l - x)} - e^{-\alpha (l - x)}\right]}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}.$$

Dieselbe Bemerkung wie zu 10. kann hier gemacht werden. Es ist dann

$$A = -\int_x^l \frac{M}{\sqrt{V . P \cos \varphi}} e^{-\alpha x} dx + A_0,$$

$$B = \int_x^l \frac{M}{\sqrt{V . P \cos \varphi}} e^{\alpha x} dx + B_0.$$

11. Excentrischer Druck.

Die Ausgangsgleichung in 9. lässt sich sofort übertragen auf einen excentrischen Druck, wenn wir setzen $\varphi = 0$ und mit b bezeichnen die Entfernung des Angriffspunktes von der Axe. Diese Grösse b ist nach den obigen Betrachtungen einzuführen, da sonst eine Biegung nur mit Hinzunahme einer anderen Kraft stattfinden kann. Die zu integrirende Gleichung ist dann

$$\frac{T(QE+P)}{Q\varrho} = P(f+b-y), \text{ oder, wenn } V = \frac{T(QE+P)}{Q} \text{ ist,}$$

$$V\frac{d^2y}{dx^2} = P(f+b-y).$$

Deren Integral setze man $y = (f+b) + A\cos\beta x + B\sin\beta x$, wo nach den obigen Rechnungen sich ergiebt $\beta^2 = \frac{P}{V}$.

Zur Bestimmung der noch unbekannten Grössen A und B haben wir, wenn der Stab unten befestigt ist,

$$y = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } y = f \text{ für } x = b, \text{ also}$$

$$0 = f+b+A,\ 0 = B\beta,\ f = f+b+A\cos\beta l + B\sin\beta l.$$

Dies giebt

$$A = -\frac{b}{\cos\beta l},\ B = 0,\ f = b\left(\frac{1-\cos\beta l}{\cos\beta l}\right),$$

also ist

$$y = \frac{b}{\cos l\sqrt{\frac{P}{V}}}\left(1-\cos\sqrt{\frac{P}{V}}\,x\right).$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann berechnet werden:

1) Wie gross muss die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft von der Axe sein, damit der Balken eine gewisse Ausbiegung erfährt?

$$b = \frac{f\cos l\sqrt{\frac{P}{V}}}{1-\cos l\sqrt{\frac{P}{V}}}.$$

2) Wie gross muss die Kraft sein, welche bei gegebener Verrückung vom Schwerpunkte den Balken um eine bestimmte Grösse durchbiegt?

$$P = \frac{EQ}{\frac{Ql^2}{T\left(\arccos\frac{b}{b+f}\right)^2} - 1}.$$

3) Wie gross muss die Länge des Körpers sein, der unter gegebenen Verhältnissen eine bestimmte Durchbiegung erfährt?

$$l = \frac{\sqrt{\frac{PQ}{(2Q+1)T}}}{\arccos\frac{b}{b+f}}.$$

Für die Lage der Schicht, in der keine Spannung existirt, erhält man hier nach 8.:

$$z = -\frac{T\cos l\sqrt{\frac{P}{V}}}{\cos x\sqrt{\frac{P}{V}}}.$$

12. Excentrischer Zug.

Der Natur der dann entstehenden Biegung zufolge ist hier die in 11. eingeführte Grösse b von f abzuziehen, so dass wir, wenn die im Obigen eingeführten abgekürzten Bezeichnungen beibehalten werden, als Gleichung erhalten:

$$V\frac{d^2y}{dx^2} = -P(f - b - y).$$

Deren Integral ist nach 10.:

$$y = f - b + Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}, \quad \alpha^2 = \frac{P}{V}.$$

Zur Bestimmung von A, B und f haben wir $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$ und $y = f$ für $x = l$, also

$$0 = f - b + A + B, \quad 0 = \alpha(A - B), \quad f = f - b + Ae^{\alpha l} + Be^{-\alpha l}.$$

Dies giebt

$$A = B = \tfrac{1}{2}(b - f), \quad f = b - \frac{2b}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}},$$

$$\frac{b}{e^{l\sqrt{\frac{P}{V}}} + e^{-l\sqrt{\frac{P}{V}}}}\left(e^{x\sqrt{\frac{P}{V}}} + e^{-x\sqrt{\frac{P}{V}}} - 2\right)$$

13. Excentrisch schräg wirkende Kraft.

1) Die Componente in der Richtung des Balkens ist eine Druckkraft. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung ist

$$V\frac{d^2y}{dx^2} = P\sin\varphi(l - x) + P\cos\varphi(f + b - y)$$

und nach 9.

$$x = f + b + A_0\cos\beta x + B_0\sin\beta x - \operatorname{tg}\varphi(l - x).$$

2) Die Componente in der Richtung des Balkens ist eine Zugkraft. Nach 10. ist dann

$$V\frac{d^2y}{dx^2} = P\sin\varphi(l - x) - P\cos\varphi(f - b - y).$$

$$y = f - b + A_0e^{\alpha x} + B_0e^{-\alpha x} - \operatorname{tg}\varphi(l - x).$$

14. Berechnung der Trägheitsmomente.

In § 134 findet sich die Berechnung des T für ein Rechteck $= \frac{1}{12}h^3b$.

Da dann ist $Q = bh$, so erhält man $T = \frac{1}{12}\cdot Qh^2$.

1) Kreuzförmiger Querschnitt. Fig. 9.

Die Dimensionen des Querschnittes seien so wie es an der Figur angedeutet ist bezeichnet und die Linie T bedeute immer die Axe, auf die das Trägheitsmoment bezogen wird.

$$T = \frac{1}{12}\left\{b' h^3 + (b - b') h'^3\right\}.$$

Fig. 9.

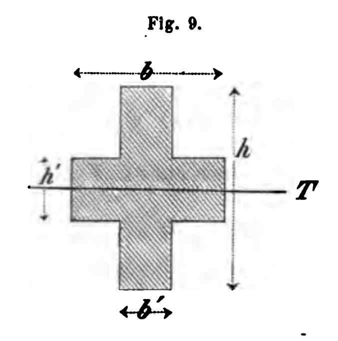
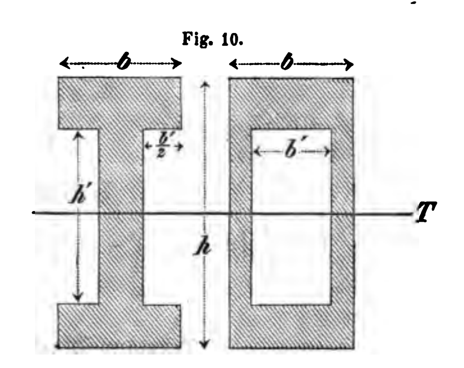


Fig. 10.



2) Doppelt-Tförmiger und hohler rechteckiger Querschnitt. Fig. 10.

$$T = \frac{1}{12}\left\{b h^3 - b' h'^3\right\}.$$

Fig. 11.

3) Doppelt-rechteckiger (Idealer Iförmiger) Querschnitt. Fig. 11.

Hierbei hat man sich natürlich beide Theile durch eine Verstrebung verbunden zu denken, die wegen ihres geringen Einflusses auf das Trägheitsmoment vernachlässigt wird.

$$T = \frac{1}{12} b\,(h^3 - h'^3),$$

4) Kreisförmiger Querschnitt.

$$\frac{1}{2} T = \int_{-r}^{+r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2 - x^2}} y^2 dy = \frac{1}{8} r^4 \pi,$$

$$T = \frac{1}{4} r^4 \pi = \frac{1}{4} Q r^2.$$

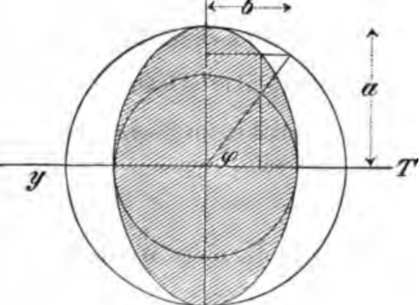
5) Hohlkreisförmiger Querschnitt.

$$T = \frac{1}{4} \pi (r^4 - r'^4).$$

6) Elliptischer Querschnitt. Fig. 12.

$$T = 4 \int_0^a y x^2 dx.$$

Fig. 12.





Nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipse ist

$$y = b \cos \varphi, \quad x = a \sin \varphi, \quad dx = a \cos \varphi \, d\varphi,$$

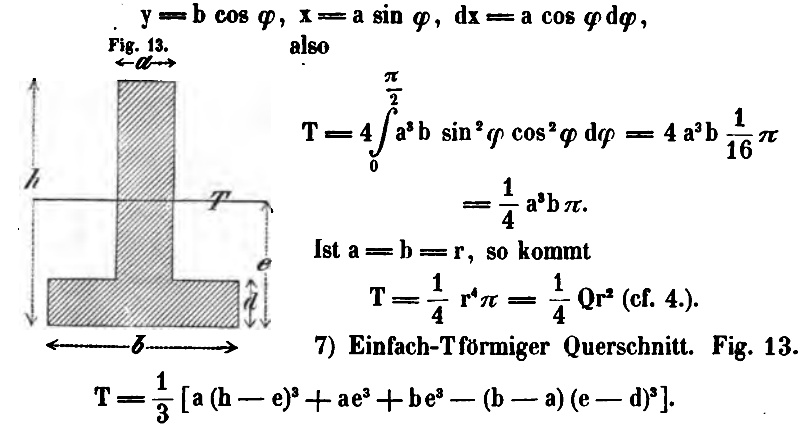


Fig. 13.

also

$$T = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 b \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi = 4\, a^3 b \frac{1}{16} \pi$$

$$= \frac{1}{4} a^3 b \pi.$$

Ist $a = b = r$, so kommt

$$T = \frac{1}{4} r^4 \pi = \frac{1}{4} Q r^2 \text{ (cf. 4.).}$$

7) Einfach-Tförmiger Querschnitt. Fig. 13.

$$T = \frac{1}{3} [a (h - e)^3 + a e^3 + b e^3 - (b - a)(e - d)^3].$$

Torsions-Elasticität. (§ 68.)

An dem einen Ende eines cylinderförmigen Körpers von der Länge l, der mit dem anderen Ende fest eingefügt ist, denken wir uns eine Kraft am Hebelarme a senkrecht zur Längsaxe angebracht, die den Körper zu drehen sucht. Es sollen die Gleichgewichtsbedingungen der angebrachten Kraft und der Torsionsspannung aufgestellt werden. Durch diese Kraft wird der freie Querschnitt so verdreht, dass nun jede vorher gerade Faser die Form einer Schraubenlinie hat. Wir können uns die Elemente dieser Schraubenlinie wie die Stufen einer Wendeltreppe vorstellen. Jedes Element hat gegen das vorhergehende eine kleine Seitenverschiebung erfahren, deren Grösse durch den $\angle \psi$ gemessen wird, wenn wir mit ψ den kleinen Winkel bezeichnen, um den die vorher gerade Faser sich gedreht hat. Die dadurch hervorgebrachte Spannung S können wir diesem Winkel und dem Querschnitt der Faser dq proportional setzen, also $S = G \psi \, dq$, wo G den Schubelasticitätsmodul bezeichnet. Der Zusammenhang dieser Grösse G mit E ist § 73, 3. erörtert.

Wenn nun r der Halbmesser des verdrehten Querschnittes ist und $\mathfrak{D}$ den Torsionswinkel bedeutet, so ist tang $\psi = \frac{r \mathfrak{D}}{l}$, oder, da ψ immer klein sein wird, selbst wenn $\mathfrak{D}$ gross ist, denn im letzteren Fall wird dann l gegen r sehr gross sein,

$$\psi = \frac{r \mathfrak{D}}{l}.$$

Dadurch geht der obige Werth S über in:

$$S = G . \frac{r \mathfrak{D}}{l} dq.$$

Alle Fasern des letzten Querschnittes, an dem die Kraft P angreift, streben in ihre natürliche Lage zurück mit Kräften, welche durch den gefundenen Ausdruck dargestellt sind und dem Querschnitt parallel und gegen r senkrecht wirken. Das ganze Drehungsmoment dieser Spannung muss nun im Fall des Gleichgewichtes dem von Aussen wirkenden Moment gleich sein. So erhält man

$$Pa = G \frac{\mathfrak{D}}{l} \int r^2 dq = \frac{G\mathfrak{D}}{l} T.$$

Obgleich diese Formel nur streng für einen kreisförmigen Querschnitt gilt, lässt sich dieselbe doch angenähert auch auf andere Querschnitte übertragen, aber nur so lange, als man die Verschiebung innerhalb der Querschnitte vernachlässigen darf. Genaueres siehe Anhang A. 8., 9.

Die Einführung der T für die verschiedenen Querschnitte giebt also näherungsweise, wenn derselbe ist:

1) ein Rechteck: $Pa = \frac{\mathfrak{D}}{l} G (b^2 + h^2) \frac{bh}{12}$,

2) ein Kreis: $Pa = \frac{\mathfrak{D}}{l} . G . \frac{1}{2} \pi r^4$,

3) ein Kreisring: $Pa = \frac{\mathfrak{D}}{l} . G \frac{1}{2} \pi (r^4 - r_1^4)$.

Zugfestigkeit. (§ 70.)

1. Maximalbelastung, wenn ausser einer am Ende angebrachten Kraft eine auf das Innere wirkt.

Nach § 65 ist die Spannung auf die Querschnittseinheit:

$$\frac{P}{q} \pm \frac{1}{q} \int_x^l \Pi q \, dx.$$

Dieser Ausdruck ist zur Bestimmung des Maximums der Kraft, die dem Körper zugemuthet werden darf, gleichzusetzen entweder dem Tragmodul t oder dem Festigkeitscoefficienten F.

Erwähnt muss werden, dass diese Formeln nur richtig sind, wenn die Spannung sich gleichmässig über den Querschnitt vertheilt. Dies ist um so mehr erreicht, je kleiner die Querschnitte sind.

a) Ist die auf das Innere wirkende Kraft das Eigengewicht des Körpers, so ist die Spannung:

$$\frac{P}{q} \pm \int_x^l \gamma q \, dx,$$

also bei unveränderlichem Querschnitte:

$$\frac{P}{q} \pm \gamma q (l - x).$$

Diese ist also am grössten,

1) wenn P und γ nach derselben Seite wirken, bei $x = 0$. Die Festigkeitsgleichung ist dann:

$$t[F] = \frac{P}{q} + \gamma l.$$

Daraus ergiebt sich

$$P = (t - \gamma l)\, q \text{ als das Maximum von P.}$$

Ist nun $t \gtreqless \gamma l$ oder $l \lesseqgtr \frac{t}{\gamma}$, so wird der Körper durch sein eigenes Gewicht zur oder über die Elasticitätsgrenze ausgedehnt.

2) Wenn P und γ nach entgegengesetzten Seiten wirken, ist die Spannung

$$\frac{P}{q} - \gamma q\,(l - x)$$

am grössten, wenn $x = l$ ist, es muss also

$$t[F] = \frac{P}{q} \text{ sein.}$$

b) Die auf das Innere wirkende Kraft ist eine Centrifugalkraft, dann ist nach § 65 die Spannung

$$\frac{P}{q} + \frac{\gamma}{g} w^2 \frac{l^2 - x^2}{2}.$$

Das Maximum der Spannung tritt hier ein, weil P dasselbe Zeichen hat wie die Centrifugalkraft, am festen Ende des Stabes, wo $x = 0$ ist; dann ist

$$t[F.] = \frac{P}{q} + \frac{\gamma}{g} \frac{w^2 l^2}{2}.$$

Ist $P = 0$, so ist demnach das Maximum der Winkelgeschwindigkeit

$$w = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2\, g q t}{\gamma}}.$$

2. Maximalbelastung bei excentrischem Zug.

Nach § 67, 12. ist

$$S = \frac{P}{Q} + \frac{EQ - P}{Q} \frac{z_n}{\varrho}, \text{ wo } \varrho = - \frac{T(EQ - P)}{QT(f - b - y)}.$$

Das Minimum des absoluten Werthes von ϱ ist demnach da, wo $y = 0$ ist, also an der Befestigung und ist dieses

$$\varrho = \frac{T(EQ - P)}{QP(f - b)}.$$

Also ist

$$t = \frac{P}{Q} + \frac{P(f - b)\, c}{T}.$$

Nach Einführung des für f gefundenen Werthes ist dann

$$t = \frac{P}{Q} + \frac{P}{T} \frac{2\, bc}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{P}{V}}.$$

3. Untersuchung des Drahtes.

Einen Draht haben wir uns zu denken als einen Kern, der umgeben ist von einer Kruste, die durch das Ziehen fester geworden ist. Sei d der Gesammtdurchmesser und δ die Dicke der Kruste. Bezeichnen wir nun die Spannungen der Querschnittseinheit des Kernes mit S_1 und die der Kruste mit S_2, ferner die entsprechenden Elasticitätsmoduli mit E_1 und E_2 und mit P die angebrachte Kraft, dann ist:

$$P = S_2 \pi (d\delta - \delta^2) + S_1 \pi \left(\frac{d}{2} - \delta\right)^2.$$

Da nun die Ausdehnungen $\varDelta l$ von Kern und Kruste wegen des bleibenden Zusammenhanges dieselben sind, so ist

$$\varDelta l = \frac{S_1 l}{E_1} = \frac{S_2 l}{E_2}, \text{ also } S_1 : S_2 = E_1 : E_2.$$

Es ist demnach

$$S_1 = \frac{PE_1}{\pi \left\{E_2 (d\delta - \delta^2) + E_1 \left(\frac{d}{2} - \delta\right)^2\right\}},$$

$$S_2 = \frac{PE_2}{\pi \left\{E_2 (d\delta - \delta^2) + E_1 \left(\frac{d}{2} - \delta\right)^2\right\}}.$$

Denken wir uns den Tragmodul t im ganzen Querschnitt constant, so muss $P = t\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$ sein, setzen wir aber den Tragmodul des Kernes allein $t_\varkappa$, so muss bei der Maximalbelastung $S_1 = t_\varkappa$ sein. Es ist mithin

$$t_\varkappa = \frac{t\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 . E_1}{\pi \left\{E_2 (d\delta - \delta^2) + E_1 \left(\frac{d}{2} - \delta\right)^2\right\}},$$

also näherungsweise, wenn δ^2 gegen $d\delta$ vernachlässigt wird,

$$t = t_\varkappa + \frac{4 t_\varkappa (E_2 - E_1)}{E_1 d}, \text{ folglich}$$

$$P = \pi t_\varkappa d \left(\frac{d}{4} + \frac{E_2 - E_1}{E_1}\right).$$

P ist demnach selbstverständlich grösser, als wenn wir den Gesammttragmodul $t_\varkappa$ nehmen.

4. Körper von gleichem Widerstande. Schachtgestänge.

Wenn wir den Querschnitt des Körpers veränderlich setzen, so werden die in § 65 gemachten Voraussetzungen noch gelten, wenn wir nur die Dimensionen des Querschnittes klein nehmen. Wir behalten also die Annahme bei, dass im ganzen Querschnitt die Spannung überall dieselbe sei, und stellen uns die Aufgabe: Nach welchem Gesetze müssen sich die Quer-

schnitte eines Körpers ändern, wenn alle gleich stark in Anspruch genommen werden sollen. Körper, die dieser Bedingung genügen, nennen wir Körper von **gleichem Widerstande**.

Nach § 65 erhalten wir, da die Spannung im Querschnitte q sein muss tq, die Gleichung

$$tq = P + \int_x^l \Pi q \, dx,$$

wo nun q veränderlich ist.

Aus der eben aufgestellten Gleichung ergiebt sich durch Differentiation

$$t\,dq = -\Pi q . dx, \quad \text{oder} \quad \frac{dq}{q} = -\frac{\Pi}{t}\,dx.$$

Deren Integral ist

$$\log q = \frac{1}{t}\int_x^l \Pi \, dx + C.$$

Zur Bestimmung der Constanten bedenke man, dass, wenn Q den letzten Querschnitt, wo $\Pi = 0$ ist, bezeichnet, gelten muss $tQ = P$. Also ist

$$\log Q = C = \log \frac{P}{t}.$$

Das gesuchte Gesetz ist also enthalten in der Gleichung:

$$\log q - \log \frac{P}{t} = \frac{1}{t}\int_x^l \Pi \, dx, \quad \text{oder}$$

$$q = \frac{P}{t} e^{\frac{1}{t}\int_x^l \Pi dx} = Q . e^{\frac{1}{t}\int_x^l \Pi dx}.$$

Es ist demnach die Form der Querschnitte gleichgültig, wenn nur die Schwerpunkte derselben auf der Längsaxe liegen.

a) $\Pi = \gamma$, so ist

$$q = \frac{P}{t} e^{\frac{\gamma}{t}(l-x)} = Q e^{\frac{\gamma . Q}{P}(l-x)}$$

$$= Q\left(1 + \frac{Q\gamma(l-x)}{P} + \frac{1}{2}\left[\frac{Q\gamma(l-x)}{P}\right]^2 \dots\right).$$

b) $\Pi = \frac{\gamma}{g} w^2 x$,

$$q = \frac{P}{t} e^{\frac{\gamma w^2}{2tg}(l^2 - x^2)} = Q e^{\frac{\gamma . Q w^2}{2Pg}(l^2 - x^2)}$$

$$= Q\left(1 + \frac{\gamma Q w^2}{2Pg}(l^2 - x^2) + \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma Q w^2}{2Pg}(l^2 - x^2)\right]^2 \dots\right).$$

Eine leichte Rechnung giebt den genäherten Werth der Materialersparniss, wenn solche Körper von gleichem Widerstand statt prismatischer genommen werden.

5. Schachtgestänge.

Wie gross sind die Querschnitte der n Stücke von der Länge l eines Gestänges zu verfertigen, wenn die Beanspruchung am oberen Ende eines jeden prismatischen Stückes dieselbe sein soll.

Mit Beibehaltung der oben eingeführten Bezeichnungen ist, wenn $q_1, q_2, q_3 \ldots q_n$ die Querschnitte von unten nach oben sind,

$$P + q_1 l\gamma = t q_1, \qquad q_1 = \frac{P}{t - l\gamma},$$

$$P + q_1 l\gamma + q_2 l\gamma = t q_2, \qquad q_2 = q_1 \left(1 + \frac{l\gamma}{t - l\gamma}\right),$$

$$P + q_1 l\gamma + q_2 l\gamma + q_3 l\gamma = t q_3, \qquad q_3 = q_1 \left(1 + \frac{l\gamma}{t - l\gamma}\right)^2,$$

u. s. w., also

$$q_n = q_1 \left(1 + \frac{l\gamma}{t + l\gamma}\right)^{n-1}$$

$$= q_1 \left[1 + (n - 1 \frac{l\gamma}{t} + (n - 1)_2 \left(\frac{l\gamma}{t}\right)^2 \ldots\right].$$

6. Kettenbrücke und Telegraphendrähte.

Sei bei einer Kettenbrücke G das Gewicht der Längeneinheit der Brückenbahn sammt deren Maximalbelastung mit Einschluss des auf die Längeneinheit reducirten Gewichtes der Tragstangen.

Wir beziehen die Bahncurve auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt im tiefsten Punkt liegt und dessen x Axe horizontal ist. Mit Beibehaltung der oben eingeführten Bezeichnungen sind demnach die Gleichungen, welche die Kettenlinie bestimmen:

$$d\left(S \frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad \text{und} \quad d\left(S \frac{dz}{ds}\right) = \gamma q \, ds + G \, dx.$$

Die Integration der ersten Gleichung liefert, wenn man mit Θ den Winkel bezeichnet, den die Tangente mit der z Axe bildet, und mit S_0 die Spannung im tiefsten Punkte:

$$S \sin \Theta = S_0.$$

Dies in die zweite Gleichung eingesetzt giebt, da $\sin \Theta = \frac{dx}{ds}$ ist,

$$S_0 d\left(\frac{dz}{dx}\right) = \gamma q \, ds + G \, dx.$$

Die Integration dieser Gleichung führt auf transcendente Ausdrücke. Wir begnügen uns deshalb mit einer Näherungsrechnung. Wir setzen zunächst $\frac{dz}{dx} = z'$, so wird die Gleichung

$$S_0 \, dz' = (\gamma q \sqrt{1 + z'^2} + G) \, dx,$$

mithin

$$S_0 \int \frac{dz'}{\gamma q \sqrt{1 + z'^2} + G} = x + \text{Const.}$$

Da nun im Allgemeinen bei der scharf gespannten Kette die Kettenlinie eine flache Curve sein wird und der Winkel Θ nur wenig von 90° entfernt ist, mithin auch cot $\Theta = z'$ sehr klein gegen 1 ist, so können wir z'^2 gegen 1 vernachlässigen und erhalten

$$S_0 \int \frac{dz'}{\gamma q + G} = x + \text{Const.},$$

$$\frac{S_0}{\gamma q + G} \cdot \frac{dz}{dx} = x + \text{Const.}$$

Hier ist nun zunächst Const. $= \Theta$, denn für $x = 0$ muss $z' = 0$ sein, woraus folgt, da auch für $x = 0$ $z = 0$ ist,

$$z = \frac{G + \gamma q}{2 S_0} x^2, \text{ also}$$

$$S = S_0 \sqrt{1 + \left[\left(\frac{G + \gamma q}{S_0}\right) x\right]^2}.$$

Daraus kann nun berechnet werden der nöthige Querschnitt, wenn die Spannung nicht den Tragmodul überschreiten darf.

Sei die Entfernung der beiden durch eine Kettenbrücke zu verbindenden Punkte 2a, ferner die grösste Herabbiegung b, welche in der Regel $^1/_{14}$ bis $^1/_{12}$ der Spannweite beträgt, so ist

$$b = \frac{G + \gamma q}{2 S_0} a^2, \quad (*)$$

mithin die grösste Spannung im Aufhängepunkt:

$$S_a = S_0 \sqrt{1 + \left(\frac{G + \gamma q}{S} a\right)^2} = S_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2 b}{a}\right)^2},$$

also, wenn diese grösste Spannung auf die Querschnittseinheit gleich dem Tragmodul gesetzt wird,

$$t = \frac{S_0 \sqrt{a^2 + 4 b^2}}{aq}.$$

Mit Hülfe der Gleichung (*) kann dann S_0 entfernt werden, so dass man erhält:

$$t = \frac{(G + \gamma q) \sqrt{a^2 + 4 b^2}\, a}{2 bq}, \text{ also}$$

$$q = \frac{aG \sqrt{a^2 + 4 b^2}}{2 tb - a\gamma \sqrt{a^2 + 4 b^2}}.$$

Für Telegraphendrähte ist $G = 0$ und, da für diese Θ sehr wenig von 90° entfernt ist, so ist S_a wenig von S_0 verschieden. Für dieselben folgt also aus (*)

$$b = \frac{\gamma a^2}{2 t}, \text{ oder } t = \frac{\gamma a^2}{2 b}.$$

Es ist klar, dass bei der obigen Berechnung der Querschnitte für die Kettenbrücke, wo also vorausgesetzt wird, dass die Kette überall denselben Querschnitt behalte, erstens zu viel Material verwendet und zweitens auch dadurch die Sicherheit vermindert wird. Es mag daher im Folgenden ein

näherungsweises Gesetz gefunden werden für die Veränderung der Querschnitte, wenn überall die Spannung dieselbe sein soll.

Die zu erfüllende Bedingung ist also

$$\frac{S_0}{q_0} = \frac{S}{q} = t.$$

Daraus ergiebt sich nach den obigen Gleichungen

$$q = \frac{S q_0}{S_0} = \frac{S q_0}{S \sin \Theta} = \frac{q_0}{\sin \Theta} = q_0 \frac{ds}{dx} = q_0 \sqrt{1 + z'^2}.$$

Führt man diese Werthe in die zweite Differentialgleichung ein, so erhält man

$$S_0 dz' = [\gamma q_0 (1 + z'^2) + G]\, dx,$$

$$S_0 \int \frac{dz'}{\gamma q_0 (1 + z'^2) + G} = x + \text{Const.},$$

$$\frac{S_0}{\sqrt{(G + \gamma q_0)\gamma q_0}} \operatorname{arctag} \frac{z' \sqrt{\gamma q_0}}{\sqrt{G + \gamma q_0}} = x + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ ist $z' = 0$, also ist Const. $= 0$.

Es ist nun durch Reduction auf z' und nochmaliger Integration:

$$z' = \sqrt{\frac{G + \gamma q_0}{\gamma q_0}} \operatorname{tag} \frac{x \sqrt{(G + \gamma q_0)\gamma q_0}}{S_0}, \quad (**)$$

$$z = \frac{S_0}{\gamma q_0} \log \sec \frac{x \sqrt{\gamma q_0 (G + \gamma q_0)}}{S_0}.$$

Durch Einführung von a und b ist darnach

$$b = \frac{S_0}{\gamma q_0} \log \sec \frac{a \sqrt{\gamma q_0 (G + \gamma q_0)}}{S_0}.$$

Da nun $t = \frac{S_0}{q_0}$ sein soll, so ist

$$b = \frac{t}{\gamma} \log \sec \frac{a \sqrt{\gamma q_0 (G + \gamma q_0)}}{t q_0},$$

wo, wenn a und b gegeben sind, q_0 die einzige Unbekannte ist, die man wie folgt berechnen kann. Man setze

$$\frac{a \sqrt{\gamma q_0 (G + \gamma q_0)}}{t q_0} = \varphi,$$

wo der Hülfswinkel im Bogenmaass bestimmt ist durch die Gleichung

$$\log \sec \varphi = \frac{b\gamma}{t}.$$

Dann ist

$$q_0 = \frac{\frac{G}{\gamma}}{\left(\frac{\varphi t}{a\gamma}\right)^2 - 1}, \quad S_0 = t \cdot q_0.$$

Diese Werthe in (**) eingesetzt geben z' und damit endlich nach der oben aufgestellten Gleichung für q dieselben für die zugehörigen x.

Bruchfestigkeit. (§ 71.)

1. Bruchmoment. Widerstandsmoment.

Nach § 67, 1. ist die Spannung in der Entfernung z_n von der neutralen Schicht in der Querschnittseinheit $S.z_n = \frac{z_n . E}{\varrho}$. Daraus geht hervor, dass diese Spannung am grössten ist in der von der neutralen Schicht am meisten entfernten Schicht. Sei diese Entfernung c, so ist $S.c = \frac{c}{\varrho}.E$.

Diese Spannung darf nun entweder den Tragmodul t oder den Coefficienten der absoluten Festigkeit F multiplicirt mit dem Sicherheitscoefficienten n nicht überschreiten. Es ist demnach $t = \frac{c}{\varrho}.E$.

Im Folgenden ist immer t gesetzt, will man dann F und n einführen, so hat man statt dessen nur nF in die Formeln einzusetzen.

Setzt man nun diesen Werth $E = \frac{\varrho t}{c}$ in dem § 67, 1. Biegungsmoment genannten Ausdruck ein, so erhält man $T\frac{\varrho t}{c}$, d. h. das Bruchmoment.

Aus der Gleichung

$$t = \frac{c}{\varrho} E, \text{ oder } \varrho = \frac{cE}{t}$$

ergiebt sich der kleinstmögliche Werth, den ϱ annehmen kann. Man wird demnach, wenn die Biegungslinie bekannt ist, den gefährlichsten Punkt, den Bruchpunkt, finden, wenn man sucht, wo ϱ ein Minimum ist.

Setzt man in $t = \frac{c}{\varrho} E$ statt ϱ den Werth aus § 67, 1. $\varrho = \frac{ET}{Px}$, so erhält man $Px = \frac{t.T}{c}$ als das grösste Moment, welches der Körper ertragen kann. Dieses Moment nennt man Widerstandsmoment.

2. Maximalbelastung.

a) Der Balken ist an einem Ende eingefügt.

Nach den Formeln § 67, 2. ist $\varrho = \frac{W}{Px}$, also ist der Bruchpunkt bei $x = l$, d. h. am Befestigungspunkt, dann ist $P = \frac{tT}{cl}$.

Dies giebt, wenn die T aus § 67, 14. genommen werden, für verschiedene Querschnitte:

1) rechteckförmig: $P = \frac{1}{6} \frac{bh^2}{l} t$,

2) kreisförmig: $P = \frac{1}{4} . \frac{\pi r^3}{l} t$,

3) hohlrechteckförmig: $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h} t$,

4) kreisringförmig: $P = \frac{1}{4} \frac{r^4 - r_1^4}{r} t$.

Ist ausser P eine gleichförmig vertheilte Last G gegeben, so ist der Bruchpunkt auch am Befestigungspunkt und es ist nun zu setzen $\frac{G}{2}$ statt P oder, wenn beides wirkt, $P + \frac{G}{2}$ statt P.

b) Der Balken ist an beiden Enden unterstützt. Nehmen wir zuerst an, der Balken sei durch eine einzige Kraft nicht in der Mitte belastet, dann ist nach § 67, 3.

$$\text{für AD: } \varrho = \frac{W}{P(\frac{1}{2} l - e)\left[\frac{1}{2} l - e - x\right]}.$$

Dieser Werth wird ein Minimum, wenn $x = 0$ ist, also im Punkte D. Dann ist

$$\varrho_1 = \frac{W}{P(\frac{1}{4} l^2 - e^2)}.$$

$$\text{Für BD: } \varrho = \frac{W}{P(\frac{1}{2} l - e)\left[\frac{1}{2} l + e - x\right]}.$$

Dieses wird auch ein Minimum im Punkte D und zwar

$$\varrho_2 = \frac{W}{P(\frac{1}{4} l^2 - e^2)}.$$

Der Bruchpunkt ist also im Aufhängepunkt des Gewichtes und es ergiebt sich als Maximalbelastung:

$$P = \frac{W}{Ec(\frac{1}{4} l^2 - e^2)} t.$$

Dieselben Betrachtungen gelten für den Fall, dass die Last P beweglich ist; dann ist aber e veränderlich und wir erhalten den kleinstmöglichen Werth von P, wenn wir nehmen $e = 0$. Trägt also der Körper für $e = 0$ die Last P, so wird keine Gefahr des Bruches sein, wenn die bewegliche Kraft sich an irgend einem anderen Punkt befindet.

Wenn ausser der isolirten Kraft noch eine gleichmässig verbreitete Last wirkt, so ist nach § 67, 3.:

$$\text{für DA: } \varrho_1 = \frac{W}{\left(P \frac{\frac{1}{2} l - e}{l} + \frac{G}{2}\right)(\frac{1}{2} l + e - x) - \frac{G}{2 l}(\frac{1}{2} l + e - x)^2},$$

$$\text{für DB: } \varrho_2 = \frac{W}{\left(P \frac{\frac{1}{2} l + e}{l} + \frac{G}{2}\right)(\frac{1}{2} l - e - x) - \frac{G}{2 l}(\frac{1}{2} l - e - x)^2}.$$

Man findet dann, dass ϱ_1 ein Minimum wird, wenn

$$e - \frac{P(\frac{1}{2} l - e)}{G} = x \text{ ist.}$$

Dies Minimum kann nur existiren, wenn

$$e > \frac{P}{G}(\tfrac{1}{2}l - e) \text{ ist,}$$

da die Curve nur bis zu $x = 0$ geht. Ist dies nicht der Fall, so erreicht ϱ_1 sein Minimum bei $x = 0$. Die sich hieraus ergebenden Werthe von ϱ_1 sind:

$$\varrho_1' = \frac{W}{\left(P\frac{\frac{1}{2}l - e}{l} + \frac{G}{2}\right)\left[\frac{1}{2}l + \frac{P}{G}(\frac{1}{2}l - e)\right] - \frac{G}{2l}\left[\frac{1}{2}l + \frac{P}{G}(\frac{1}{2}l - e)\right]^2},$$

$$\varrho_1'' = \frac{W}{\left(P + \frac{G}{2}\right)(\frac{1}{4}l^2 - e^2)}.$$

Die Rechnung würde für das Minimum ϱ_2 geben

$$x = -e - \frac{P}{G}(\tfrac{1}{2}l + e).$$

Diesen Werth kann es nicht geben, da die Curve nur bis $x = 0$ geht. Da aber ϱ_2 eine mit x stetig abnehmende Grösse ist, so wird ϱ_2 zu einem Min., wenn $x = 0$ ist. Dann ist:

$$\varrho_2 = \frac{W}{\left(P + \frac{G}{2}\right)(\frac{1}{4}l^2 - e^2)},$$

Ist nun $e \gtreqless \frac{P(\frac{1}{2}l - e)}{G}$, oder $\frac{eG}{\frac{1}{2}l - e} \gtreqless P$,

so ist in D, dem Angriffspunkt der Kraft, der Bruchpunkt und man erhält zur Berechnung der Maximalbelastung:

$$\frac{Wt}{Ec(\frac{1}{4}l^2 - e^2)} = P + \frac{G}{2}.$$

Ist aber $P < \frac{eG}{\frac{1}{2}l - e}$, so ist ϱ_1' vorhanden und man findet dann leicht $\varrho_1' < \varrho_2$, so dass also ϱ_1' das absolute Minimum ist. Zur Berechnung der Maximalbelastung dient dann

$$\frac{Ec}{t} = \frac{W}{\left(P\frac{\frac{1}{2}l - e}{l} + \frac{G}{2}\right)\left[\frac{1}{2}l + \frac{P(\frac{1}{2}l - e)}{G}\right] - \frac{G}{2l}\left[\frac{1}{2}l + \frac{P(\frac{1}{2}l - e)}{G}\right]^2}.$$

c) Ist der Körper auf der einen Seite fest eingefügt, auf der anderen nur unterstützt, so müssen wie vorhin die Curvenstücke besonders betrachtet werden und zwar ist dann der Wendepunkt ein Grenzpunkt eines Curvenstückes. Zur Berechnung der Maximalbelastung ist dann das absolute Min. zu nehmen.

1) Ist nur eine gleichförmig vertheilte Kraft angebracht, so ist das kleinste ϱ bei $x = 0$ und dann erhält man $G = \frac{8Wt}{lEc}$.

2) Ist nur in der Mitte eine Kraft angebracht, so erhält man das kleinste ϱ bei $x = 0$ und dann: $P = \frac{3Wt}{2lEc}$.

d) Ist der Körper beiderseits fest eingefügt, so werden die Rechnungen wegen der zwei Wendepunkte complicirter.

1) Ist $P = 0$, so ist der Bruchpunkt an den Befestigungspunkten und die Maximalbelastung $G = \frac{12\,W\,t}{E\,l\,c}$.

2) Ist $G = 0$, so ist der Bruchpunkt an dem der Last zunächst gelegenen Ende und es ist $P = \frac{W\,l^2\,t}{E\,e^2\,(l - e)\,c}$ oder $\frac{W\,l^2\,t}{E\,e\,(l - e)^2\,c}$.

3. Körper von gleichem Widerstand.

Das Prisma sei mit einem Ende befestigt. Der Körper sei symmetrisch gegen die Horizontalebene, die Schwerpunktsaxe falle mit der x Axe zusammen, deren Anfang im Befestigungspunkt liege. Wir nehmen ferner an, dass die Druckspannung gleich der Zugspannung ist. Da T eine veränderliche Grösse ist, so haben wir nach § 67, 1.:

$$P\,(l - x) = S \,.\, T_{l-x} \text{ und } P\,l = S \,.\, T,$$

wo T_{l-x} abgekürzt das Trägheitsmoment des Querschnittes in der Entfernung $l - x$ vom Befestigungspunkt bedeutet. Soll nun die Spannung überall gleich sein, so ist

$$\frac{l - x}{l} = \frac{T_{l-x}}{T}.$$

1) Der Körper habe zum Querschnitt ein Rechteck mit überall gleicher Breite b. Dann ist also

$$\frac{l - x}{l} = \frac{b \,.\, y^2}{b \,.\, h^2} = \frac{y^2}{h^2},$$

d. i. die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel im Endpunkte liegt.

2) Die Querschnittsrechtecke mögen überall dieselbe Höhe haben, dann ist

$$\frac{l - x}{l} = \frac{z\,h^2}{b\,h^2} = \frac{z}{b},$$

also eine gerade Linie.

Wirkt eine gleichmässig verbreitete Last G, dann ist

$$\frac{G}{2\,l}\,(l - x)^2 = S\,T_{l-x}, \quad \frac{G}{2\,l}\,l^2 = S \,.\, T, \quad \text{also } \frac{(l - x)^2}{l^2} = \frac{T_{l-x}}{T}.$$

1) $\frac{(l - x)^2}{l^2} = \frac{y^2}{h}$, 2 Gerade,

2) $\frac{(l - x)^2}{l^2} = \frac{z}{b}$, Parabel.

Ist der Körper anders unterstützt, so wird man die Rechnung diesem analog vornehmen müssen.

Druckfestigkeit. Zusammengesetzte Festigkeit. Schubfestigkeit. (§ 73.)

1. Druckfestigkeit.

Die Erörterung dieser Festigkeit schliesst sich an § 70, 1. an, indem in den dort aufgestellten Formeln dem P das entgegengesetzte Zeichen zu geben ist.

a) Die Spannung ist $-\frac{P}{q}+\int_x^l \gamma q\, dx$.

Die dort gefundenen Resultate müssen auch hier passen, nur bezieht sich 1. hier auf eine stehende und 2. auf eine hängende Säule.

b) Die Kraft P ist jetzt der Centrifugalkraft entgegengesetzt, wir haben die zu erfüllende Gleichung

$$t\,[F] = -\frac{P}{q}+\frac{\gamma}{g}\,w^2\,\frac{l^2-x^2}{2},\ \text{also}$$

$$P = q\left(\frac{\gamma}{g}\,w^2\,\frac{l^2-x^2}{2}-t\right).$$

In der Praxis wird man hier nicht das Maximum von P bestimmen wollen, denn es bedeutet unser P die Festigkeit des Radkranzes. Diese Gleichung wird vielmehr dazu dienen, für ein gegebenes P das Maximum der Drehgeschwindigkeit zu berechnen.

2. Maximalbelastung bei excentrischem Druck.

Wir müssen hierzu die Gleichungen von § 67, 11. benutzen. Nach diesen findet man

$$S = \frac{P}{Q}+\frac{EQ+P}{Q}\,\frac{z_n}{\varrho},\ \text{wo}\ \varrho = \frac{T\,(EQ+P)}{QP\,(f+b-y)}.$$

Dieses ϱ erreicht sein Minimum für $y = 0$, also am Befestigungspunkt. Es ist mithin zur Maximalbelastung

$$t = \frac{P}{Q}+\frac{P\,(f+b)\,c}{T},$$

oder nach Einführung des Werthes f

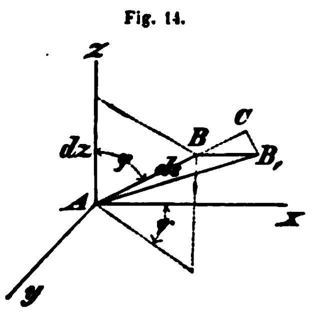
$$t = \frac{P}{Q}+\frac{Pbc}{T\cos l\sqrt{\frac{P}{V}}}.$$

3. Allgemeine Beziehungen zwischen Zug und Verschiebung.

Nennen wir Γ das Maximum der ertragbaren Verschiebung eines Materials und die Kraft, welche diese Maximalverschiebung hervorbringt, den Coefficienten der Schubfestigkeit, T, so ist $T = \Gamma G$, wo G nach § 68 den Coefficient der Schubelasticität bezeichnet. Es ist nun ein Zu-

sammenhang zu finden zwischen Γ und $\frac{\Delta l}{l}$, zwischen G und E und damit dann endlich zwischen T und t.

Suchen wir zunächst irgend eine Verschiebung γ eines Körpers in der Entfernung 1 von der neutralen Schicht auszudrücken durch die Verlängerung λ der Länge l.



Sei AB (Fig. 14) = l ein Stück eines einer Verschiebung unterworfenen Körpers, dessen Richtung mit der z Axe einen Winkel φ macht und dessen Projection auf die neutrale Schicht, die xy Ebene, mit der x Axe den Winkel ψ einschliesst. Das Coordinatensystem ist so gelegt, dass die Verschiebung $BB_{\prime}$ des Punktes B der x Axe parallel ist. Es ist dann $\gamma = \frac{BB_{\prime}}{dz}$. Aus AB ist geworden $AB_{\prime}$. Die Verlängerung finden wir, da die Gesammtveränderung wie früher klein genommen ist, wenn wir $BB_{\prime}$ auf AB projiciren. Es ist also

$$\lambda = BC = BB_{\prime} \cos B_{\prime}BC = BB_{\prime} \cos xAB = BB_{\prime} \sin \varphi \cos \psi, \text{ also}$$

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\gamma dz \sin \varphi \cos \psi}{l} = \frac{\gamma}{2} \sin 2\varphi \cos \psi.$$

Diese Grösse erhält den grössten Werth, wenn $\varphi = 45°$ und $\psi = 0$ ist. Es ist also, wenn Δl das Maximum der Verlängerung bedeutet,

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \Gamma.$$

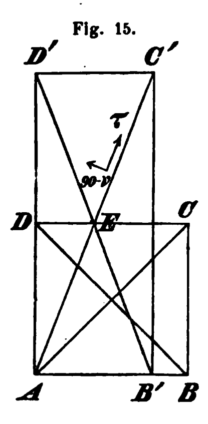
Nun ist aber $\frac{\Delta l}{l} = \frac{t}{E}$, mithin $\frac{t}{E} = \frac{1}{2} \Gamma$. Da ferner $\Gamma = \frac{T}{G}$ gilt, so ist $T = 2t \frac{G}{E}$.

Um eine Beziehung zwischen G und E zu finden, gehen wir von einem rechtwinkligen Parallelepipedum aus, dessen Kanten a, b, c sind, und unterwerfen dasselbe Kräften, welche parallel den Kanten a und b sind und auf die vier zu a b senkrechten Ebenen wirken. Die hier vorhandenen Kräftepaare verwandeln das Reckteck a b in ein Parallelogramm, dessen Winkel $90 \pm \nu$ werden. Die Grösse dieses Winkels ist von der Grösse der die Verschiebung bewirkenden Kraft P sowie von der Natur des Körpers abhängig, und da durch eine mässig grosse Kraft P nur ein kleiner Winkel hervorgebracht wird, so kann man P mit ν proportional setzen, also $P = G.\nu$.

Denken wir uns einen Würfel, dessen Kante a ist durch eine Kraft p auf die Querschnittseinheit ausgedehnt und dann durch eine Diagonalebene ein dreiseitiges Prisma abgeschnitten. In Fig. 15 stelle ABCD den ursprünglichen Schnitt unseres Würfels dar und AB′C′D′ den des ausgedehnten.

Die Schnittebene geht durch die Linie AC′. Damit nun das abgeschnittene dreiseitige Prisma in der angenommenen Gleichgewichtslage bleibe, müssen auf die Schnittebene Kräfte wirken, die Normal- und Tangentialcomponenten haben. Die Tangentialcomponente auf der Einheit des Querschnittes τ muss der nach derselben Richtung betrachteten Componente von p das Gleichgewicht halten. Die Componente von p ist $p \cos 45 = p\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Die Schnittfläche ist $a^2\sqrt{2}$, mithin ist

Fig. 15.



$$\tau \cdot a^2\sqrt{2} = p \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot a^2 \text{ oder } \tau = \frac{p}{2}.$$

Eine Gerade DB, welche vor der Verschiebung senkrecht auf dem Schnitte AC war, d. i. die Diagonale des Quadrates, wird in Folge der Zugkraft verschoben in D′B′, so dass sie nun einen Winkel $90 - \nu$ mit der Schnittebene bildet, d. i. die neue Diagonale, es ist also $\angle D'EC' = 90 - \nu$. Zur Berechnung von ν haben wir nun nach dem Näherungsgesetz der Schubelasticität, wenn statt τ der erhaltene Werth $\frac{p}{2}$ gesetzt ist

$$\nu = \frac{\tfrac{1}{2}p}{G}.$$

Dieser Winkel ν soll nun bestimmt werden aus p, E, und μ, dem Contractionscoefficienten. Die Verlängerung der Seite a ist $\frac{p}{E}a$, die Contraction $\frac{\mu p}{E}a$, also ist

$$\operatorname{tg} B'D'A = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{a\left(1 - \frac{\mu p}{E}\right)}{a\left(1 + \frac{p}{E}\right)}.$$

Das ist näherungsweise

$$\frac{1 - \frac{\nu}{2}}{1 + \frac{\nu}{2}} = \frac{1 - \frac{\mu p}{E}}{1 + \frac{\mu p}{E}},$$

woraus wiederum durch Vernachlässigung von kleinen Grössen höherer Ordnung folgt

$$\nu = \frac{p}{E}(1 + \mu),$$

mithin ist

$$\frac{p}{2G} = \frac{p}{E}(1 + \mu), \quad \text{also } G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

d. i. für $\mu = \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$, $G = \frac{3}{8}E; \frac{2}{5}E$.

Wird dieser Werth von G oben eingesetzt, so erhält man

$$T = \frac{t}{1 + \mu}, \text{ d. i. für } \mu = \frac{1}{3}; \frac{1}{4}, \; T = \frac{3t}{4}; \frac{4t}{5}.$$

4. Bestimmung der Tangentialspannungen in einem horizontalen und verticalen Querschnitt.

Indem wir die im Früheren gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, beziehen wir den stabförmigen Körper auf ein Coordinatensystem, dessen xAxe mit der Längsaxe zusammenfällt, und verlegen den Anfangspunkt in den Befestigungspunkt. Die yAxe soll mit der Biegungsaxe zusammenfallen. Nach § 67, 1. ist die Spannung, welche ein Querschnittsstreifen in der Entfernung z von der xyEbene und der Dicke dz erfährt,

$$Szydz = \frac{Eyzdz}{\varrho} = \frac{P(l-x)yzdz}{T}.$$

Gehen wir nun zum nächsten Querschnitt, der um dx von diesem absteht, so erhalten wir

$$S'zydz = \frac{P(l-x-dx)yzdz}{T}.$$

Diese beiden Spannungen sind selbstverständlich einander nicht gleich, es würde also der zwischen ihnen liegende Körper durch den Ueberschuss beider Spannungen verschoben auf der Ebene parallel der xyEbene in der Entfernung z, wenn der Körper nicht in Folge der Schubfestigkeit Widerstand leistete. Bezeichnen wir dem S analog mit τ die Tangentialspannung in der Entfernung z auf die Querschnittseinheit, so ist

$$\tau ydx = Szydz - S'zydz,$$

$$= \frac{Pyzdxdz}{T}, \text{ also}$$

$$\tau y = \frac{Pyzdz}{T}.$$

Mithin ist die Gesammttangentialspannung im Querschnitt von z bis c

$$\int_z^c \frac{Pyzdz}{T},$$

oder, wenn P, T, y constant sind,

$$\frac{Py}{T}\int_z^c zdz = \frac{P}{T}\int_z^c zdq.$$

Ebenso lässt sich beweisen, dass auch eine Spannung senkrecht auf die Länge stattfinden muss, welche also die benachbarten Querschnitte gegen einander verschiebt. Aus der allgemeinen Theorie der Elasticität folgt, dass diese Spannung der vorhergehenden absolut genommen gleich ist.

5. Tangentialspannungen für verschiedene Querschnittsformen.

1) Der Querschnitt des Körpers sei ein Rechteck, dessen Seiten parallel den Coordinatenaxen sind. b die Breite und h die ganze Höhe.

$$\tau = \frac{P}{Tb}\int_z^{\frac{h}{2}} z\,dq = \frac{P}{T}\int_z^{\frac{h}{2}} z\,dz = \frac{P}{2T}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right].$$

Da nun

$$T = \frac{1}{12}bh^3,\ Q = bh$$

ist, so erhält man

$$\tau = \frac{3}{2}\cdot\frac{P}{Q}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right).$$

Hier ist für $z = 0$

$$\text{Max. } \tau = \frac{3}{2}\,\frac{P}{Q}.$$

Daraus ergiebt sich für einen ringförmig rechteckigen Querschnitt:

$$\text{Max. } \tau = \frac{3}{2}P\left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q'}\right).$$

2) Der Querschnitt ist ein Kreis, dessen Halbmesser r ist. Dann ist

$$\int_z^r z\,dq = \int_z^r \sqrt{r^2 - z^2}\,z\,dz = \frac{1}{3}(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Da ferner $T = \frac{1}{4}\pi r^4$, $Q = \pi r^2$, so ist

$$\tau = \frac{P\,\frac{1}{3}(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}{T\sqrt{r^2 - z^2}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{P}{Q}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right),$$

also für $z = 0$ das Max. $\tau = \frac{4}{3}\cdot\frac{P}{Q}$.

3) Der Querschnitt sei ein Quadrat, dessen Diagonale 2c die Drehungsaxe ist.

$$\int_z^c z\,dq = \int_z^c z(2c - 2z)\,dz = \frac{1}{3}c^3 - cz^2 + \frac{2}{3}z^3.$$

$$T = \frac{1}{3}c^4,\ Q = 2c^2.$$

$$\tau = \frac{\left(\frac{1}{3}c^3 - cz^2 + \frac{2}{3}z^3\right)P}{2(c - z)\frac{1}{3}c^4} = \frac{\left(1 + \frac{z}{c} - 2\frac{z^2}{c^2}\right)P}{Q}.$$

Hier ist für $z = \frac{1}{4}c$ das Max. $\tau = \frac{9}{8}\cdot\frac{P}{Q}$.

4) Der Querschnitt ist doppelt T förmig. Wir benutzen die in Fig. 10 angezeichneten Buchstaben.

$$\int_z^{\frac{h}{2}} zy\,dz = (b - b')\int_z^{\frac{h'}{2}} z\,dz + b\int_{\frac{h'}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,dz,$$

$$= \frac{b - b'}{2}\left[\left(\frac{h'}{2}\right)^2 - z^2\right] + \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h'}{2}\right)^2\right].$$

$$\tau = \frac{P}{8(b-b')T}[(b-b')(h'^2-4z^2)+b(h^2-h'^2)]$$

Da nun $T = \frac{1}{12}(bh^3 - b'h'^3)$, $Q = bh - b'h'$ ist, so ist für $z = 0$

$$\text{Max: } \tau = \frac{3P(bh^2-b'h'^2)(bh-b'h')}{2Q(b-b')(bh^3-b'h'^3)}.$$

6. Vergleich der Biegungsspannungen und horizontalen Schubspannungen in einem Normalquerschnitt.

Wenn man von den verschiedenen Punkten eines Querschnittes die entsprechenden Werthe der Normalspannungen und Tangentialspannungen als gerade Linien senkrecht auf die z Axe aufträgt, so liegen die Endpunkte der Linien, welche den Normalspannungen entsprechen, auf einer Geraden, die durch den 0 Punkt geht, da dieselben proportional der Entfernung von der x Axe zunehmen. Die Endpunkte der Tangentialspannungen liegen auf einer krummen Linie, die nach 5. für einen rechteckförmigen oder kreisförmigen Querschnitt z. B. eine Parabel ist, deren Hauptaxe mit der x Axe zusammenfällt. Die Gesammtspannung wird sich dann ergeben, wenn beide addirt werden. Sie ist ganz allgemein

$$Sz + \tau = \frac{P}{T}\left(xz + \frac{1}{y}\int_z^c z\,dz\right),$$

d. i. für ein constantes y, also einen rechteckförmigen Querschnitt,

$$= \frac{P}{T}\left(xz + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}z^2\right),$$

also ist der Einfluss der Tangentialspannung um so unbedeutender, je grösser x ist.

Es kann nun gefragt werden, wie gross muss das l wenigstens sein, damit man bei Berechnung des Bruches die Tangentialspannung ganz vernachlässigen kann. Für einen rechteckförmigen Querschnitt ist

$$\max.\ \tau = \frac{Ph^2}{8T} \text{ und } \max.\ Sz = \frac{P.l.\frac{h}{2}}{T}.\ \text{Nun ist}$$

$$\max.\ \tau = \mathcal{T} \text{ und } \max.\ Sz = t \text{ und } \mathcal{T} = \frac{1}{1+\mu}t \text{ nach 3.}$$

Wenn demnach

$$\frac{Ph^2}{8T} < \frac{1}{1+\mu}t,$$

so kann die Tangentialspannung vernachlässigt werden, d. h. wenn

$$\frac{Ph^2}{8T} < \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{Pl\frac{h}{2}}{T} \text{ oder } l > (1+\mu)\frac{h}{4}.$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt giebt die analoge Rechnung

$$\frac{P.r^2}{T} < \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{Plr}{T} \text{ oder } l > (1+\mu)\frac{r}{3}.$$

Die hier erhaltenen Werthe von l sind sehr klein, so dass es gerechtfertigt ist, bei den Untersuchungen § 71, 3. von den Schubspannungen ganz abzusehen.

7. Zusammenstellung der Normal- und Tangentialspannungen auf Querschnitte, die nicht vertical oder horizontal sind.

Sei wiederum die y Axe die Biegungsaxe, so können nur Querschnitte, die der y Axe parallel sind, hier betrachtet werden. Der Schnitt sei nun so gelegt, dass er mit der xy Ebene einen Winkel α bildet und die Grösse eines Streifens in der Entfernung z sei y ds, also seine Projectionen auf die yz- und yx Ebene $y\,dz = y\,ds \sin\alpha$, $y\,dx = y\,ds \cos\alpha$. Wir erhalten dann die Tangentialspannung und Normalspannung auf den Elementarstreifen y ds, wenn wir die gleichgenannten Kräfte auf y dz und y dx zerlegen nach den Richtungen, welche senkrecht und parallel dem Streifen y ds sind. Nach dem Früheren wirkt nun auf y dz eine

$$\text{Normalspannung} = \frac{yz.Px}{T}\,dz = \frac{yzPx}{T}\,ds \sin\alpha \text{ und}$$

$$\text{Tangentialspannung} = \frac{P\,dz}{T}\int_z^c yz\,dz.$$

Auf y dx wirkt nur eine

$$\text{Tangentialspannung} = \frac{P\,dx}{T}\int_z^c yz\,dz.$$

Die Normalspannung ist je nach der verschiedenen Lage gegen die neutrale Schicht positiv oder negativ.

Bezeichnen wir nun die Tangentialspannung und die Normalspannung auf die Flächeneinheit des Elementarstreifens mit T und N, so ergiebt sich durch die eben genannte Zerlegung:

$$Ty\,ds = \frac{yzPx}{T}\,ds \sin\alpha\cos\alpha - \frac{P}{T}\,ds \sin^2\alpha\int_z^c yz\,dz + \frac{P}{T}\,ds\cos^2\alpha\int_z^c yz\,dz,$$

$$Ny\,ds = \frac{yzPx}{T}\,ds \sin\alpha\sin\alpha + \frac{P}{T}\,ds\sin\alpha\cos\alpha\int_z^c yz\,dz + \frac{P}{T}\,ds\cos\alpha\sin\alpha\int_z^c yz\,dz.$$

Daraus ergiebt sich durch eine einfache Transformation

$$T = \frac{P}{2\,T}\left[zx\sin 2\alpha + \frac{2\cos 2\alpha}{y}\int_z^c yz\,dz\right],$$

$$N = \frac{P}{2\,T}\left[zx\,(1 - \cos 2\alpha) + \frac{2\sin 2\alpha}{y}\int_z^c yz\,dz\right].$$

Diese Werthe sind Functionen von α, z, x und bei veränderlichem Querschnitte noch von y.

Betrachten wir zunächst die Abhängigkeit von dem $\angle \alpha$. Dann erhalten wir für

$$\operatorname{tag} 2\alpha' = \frac{xyz}{2\int_z^c yz\,dz},$$

also für zwei Winkel von α, die sich um $90°$ unterscheiden,

$$\text{Max. } T = \pm \frac{P\int_z^c yz\,dz}{Ty} \sqrt{1 + \left(\frac{xyz}{2\int_z^c yz\,dz}\right)^2},$$

wo die beiden Vorzeichen dem spitzen und stumpfen Winkel entsprechen. Ferner verschwindet T, wenn

$$\operatorname{tang} 2\alpha_1 = -\frac{2\int_z^c yz\,dz}{xyz},$$

also für ein α, welches liegt zwischen $45°$ und $90°$ und zwischen $135°$ und $180°$.

$$\text{Für } \operatorname{tg} 2\alpha'' = -\frac{2\int_z^c yz\,dz}{xyz} = -\cot 2\alpha' \text{ ist}$$

$$\text{Max. } N = \frac{Pzx}{2T}\left[\pm\left\{1 + \left(\frac{2\int_z^c yz\,dz}{xyz}\right)^2\right\}^{1/2} + 1\right],$$

Setzen wir ferner die Spannnng abhängig von x, indem wir y und z als von x unabhängig betrachten, so erhalten wir das Max. T für $x = l$ und Min. T für $x = 0$.

$$\text{Max. } T = \pm \frac{P\int_z^c yz\,dz}{Ty} \sqrt{1 + \left(\frac{lyz}{2\int_z^c yz\,dz}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha' = \frac{lyz}{2\int_z^c yz\,dz}.$$

$$\text{Min. } T = \pm \frac{P\int_z^c yz\,dz}{Ty}, \quad \operatorname{tag} 2\alpha_1 = 0, \text{ d. h. } \alpha_1 = 0,\ 90°.$$

Torsionsfestigkeit. (§ 74.)

In § 68 ist die Spannung auf die Querschnittseinheit in Folge der Torsion gefunden worden:

$$S = G.\frac{r\mathfrak{D}}{l}.$$

Bezeichnen wir nun das Max. des Winkels $\mathfrak{D}$ mit φ und dem entsprechend die grösste dazu gehörige Spannung mit T, so ist

$$T = G.\frac{r\varphi}{l}.$$

Das diesem entsprechende grösstmögliche Drehungsmoment ist nach § 68:

$$Pa = \frac{G\varphi}{l}\int r^2\,dq = \frac{G\varphi T}{l}.$$

Setzen wir hier statt φ den eben berechneten Werth ein, so ergiebt sich

$$Pa = \frac{\mathcal{T}T}{r}.$$

Dies giebt für verschiedene Querschnitte natürlich nur näherungsweise, wie § 68 schon angegeben ist:

1) Kreisförmiger Querschnitt mit dem Radius r.

$$Pa = \frac{\mathcal{T}\pi r^3}{4}.$$

2) Quadratischer Querschnitt, dessen Seite b ist. Für die entfernteste Faser ist $r = b\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, mithin

$$Pa = \frac{\mathcal{T}\sqrt{2}\,b^3}{12}.$$

Die genauere Untersuchung befindet sich im Anhang A, 11. für einen elliptischen und rechteckigen Querschnitt.

Anhang zu §§ 64—74.

I. Anwendung der allgemeinen Formeln der Elasticität auf gerade stabförmige Körper.

A. Die Querdimensionen sind so gross, dass, wenn die Verschiebungen in den Elementen klein sind, auch die Verschiebungen des Ganzen klein bleiben.

1. Das Saint-Venant'sche Problem.

Das allgemeine Problem würde heissen: Welches sind die Spannungen in einem stabförmigen Körper von gegebenen Dimensionen, wenn auf dessen Oberfläche und Masse bestimmte Kräfte wirken? Dieses allgemeine Problem zu lösen ist bis jetzt noch nicht gelungen, wir vereinfachen dasselbe daher, indem wir von allen Kräften abstrahiren, welche auf die Masse, also auch von der Schwere, und auf die Seitenflächen wirken, und nur die Kräfte beibehalten, welche am freien Ende angreifen. Selbst für diesen Fall ist es noch nicht gelungen, das Problem ganz allgemein zu lösen; wir werden deshalb den sogenannten halb umgekehrten Weg einschlagen nach Anleitung von Saint-Venant. Statt der Kraft auf das freie Ende führen wir die Bedingung ein, dass die den Körper zusammensetzenden Fasern keinerlei Druck aufeinander ausüben, noch eine Verschiebung der Querschnitte erfolgt. Wir berechnen dann die Grösse und Lage der Kraft, welche eine solche Wirkung hervorbringt, und setzen diese gefundenen Ausdrücke denen der gegebenen

Kräfte gleich. Dadurch erhalten wir Gleichungen zur Bestimmung der vorkommenden Constanten. Im Folgenden soll die Betrachtung sich anschliessen an die Behandlung des Saint-Venant'schen Problems von Clebsch.

2. Aufstellung der Gleichungen.

Der fest bleibende Schwerpunkt O eines ebenen Querschnittes des gegebenen Stabes bildet den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems. Die z Axe falle zusammen mit der ursprünglich geraden Mittellinie und die xy Ebene mit dem Querschnitt. Die Lage des gebogenen Körpers gegen das Axensystem sei weiter durch folgende Bedingungen bestimmt. Ein Linienelement bleibe fest und zwar falle dies mit der x Axe zusammen, ferner bleibe das dem O benachbarte Element des Querschnittes auch nach der Verschiebung in der xy Ebene.

Nach der ersten Bedingung ist $u = v = w = 0$ für $x = y = z = 0$.

Nach dem Taylor'schen Lehrsatz ist nun bei Vernachlässigung höherer Potenzen von dx, dy, dz:

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

$$v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz,$$

$$w + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Gehen wir also zu einem dem O benachbarten Punkt der Endfläche über, so ist $dz = 0$, mithin

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy.$$

Soll dieser Punkt in der xy Ebene bleiben, so muss $dw = 0$ sein, mithin ist

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ für } x = y = z = 0.$$

Weil ferner ein dem O in der x Axe benachbarter Punkt, für den also $dy = dz = 0$ ist, keine Verschiebung nach der y Axe erleiden soll, so muss ausser $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ auch noch sein $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ für $x = y = z = 0$.

Es ist demnach zusammen für $x = y = z = 0$, zugleich

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad \text{[I.]}$$

Die Bedingung, dass kein Druck auf die Seitenflächen ausgeübt wird, giebt folgende Gleichungen:

$$N_1 = N_2 = 0.$$

Dass keine Verschiebung stattfindet, giebt:

$$T_{yx} = 0, \text{ d. i. } \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad [2.]$$

Der betrachtete Körper wird nach der Länge gezogen. Da nun kein seitlicher Druck stattfinden soll, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ die Ausdehnungen der Längeneinheiten in der Richtung der drei Axen bedeuten und μ (§ 65) den Quercontractionscoefficienten bezeichnet, so ist

$$N_3 = E \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\mu \frac{\partial w}{\partial z}. \quad [1.]$$

Dass kein seitlicher Druck stattfindet, vereinfacht die Grenzbedingungen. Da ausserdem die Normale senkrecht zur Cylinderaxe ist, so ist

$$\cos q = \sin p \text{ und } \cos r = 0 \quad (§ 64, 7.),$$

und damit reduciren sich die Gleichungen (B.) (§ 64, 1.) auf eine, nämlich

$$T_{zx} \cos p + T_{zy} \sin p = 0.$$

Die Gleichungen (A.) (§ 64, 1.) gehen in die folgenden über:

$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T_{yz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = 0.$$

Werden dann mit Hülfe der allgemeinen Gleichungen (H.) (§ 64) statt der Spannungen die Verschiebungen eingeführt, so erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0, \quad [3.]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0, \quad [4.]$$

$$2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad [5]$$

Statt der obigen Grenzbedingung

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \cos q + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \sin p. \quad [6.]$$

3. Vereinfachung der Bedingungsgleichungen.

Differenziren wir [5] nach z und ziehen davon den Differentialquotienten von [3] nach x und den von [4] nach y ab, so bleibt

$$2 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x} - \frac{d^3 v}{\partial z^2 \partial y} = 0.$$

Da nun nach [1] $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ sich von $\frac{\partial w}{\partial z}$ nur durch einen Factor unter-

scheiden, so unterscheiden sich ebenso $\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x}$ und $\frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y}$ von $\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}$, und die abgeleitete Gleichung geht über in $\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0$.

Differenzirt man [3] nach y, [4] nach x, so giebt die Summe dieser beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial x} + 2\,\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

Aber die Summe der ersten beiden Glieder ist 0, wie man erkennt, wenn man [2] zweimal nach z differenzirt. Es bleibt also

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

Differenzirt man endlich [5] nach z und berücksichtigt, dass $\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}$ verschwindet, so ist

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} = 0.$$

Wenn man aber [3] nach x und [4] nach y differenzirt, so werden die ersten Glieder der Gleichungen [1] wegen einander gleich; setzt man daher auch die letzten Glieder einander gleich, so kommt

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z}.$$

Dies ist aber mit der vorigen Gleichung nur verträglich, wenn

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} = 0.$$

Fasst man Alles zusammen, so ist nun bewiesen, dass folgende Differentialquotienten von $\frac{\partial w}{\partial z}$ verschwinden müssen:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Wegen der ersten drei dieser Gleichungen darf $\frac{\partial w}{\partial z}$ weder von x noch von y oder z eine höhere Potenz enthalten, als die erste; und wegen der letzten Gleichung darf selbst das Product xy nicht vorkommen. Es bleibt demnach für $\frac{\partial w}{\partial z}$ nur die folgende Form übrig, in der sämmtliche Coefficienten willkürliche Constante bedeuten,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = (\alpha + a_1 x + a_2 y) + z\,(b + b_1 x + b_2 y), \text{ mithin}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\,\mu\left\{\alpha + a_1 y + a_2 y + z\,(b + b_1 x + b_2 y)\right\}.$$

4. Bestimmung der u, v, w durch Integration.

$$w = F(x, y) + \alpha z + a_1 xz + a_2 yz + \tfrac{1}{2} z^2 (b + b_1 x + b_2 y),$$
$$u = \varphi(y, z) - \mu \left\{ \alpha x + \tfrac{1}{2} a_1 x^2 + a_2 xy + z (bx + \tfrac{1}{2} b_1 x^2 + b_2 xy) \right\},$$
$$v = \chi(x, z) - \mu \left\{ \alpha y + a_1 xy + \tfrac{1}{2} a_2 y^2 + z (by + b_1 xy + \tfrac{1}{2} b_2 y^2) \right\}.$$

Zur Bestimmung von F, φ, χ haben wir Gleichungen in der vorigen Nummer. Setzen wir die eben erhaltenen Werthe in [3] und [4] ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \varphi(y,z)}{\partial z^2} = -a_1 - b_1 z,$$
$$\frac{\partial^2 \chi(x,z)}{\partial z^2} = -a_2 - b_2 z.$$

Deren zweimalige Integration liefert

$$\varphi(y,z) = -\tfrac{1}{2} a_1 z^2 - \tfrac{1}{6} b_1 z^3 + \varrho z + \vartheta,$$
$$\chi(x,z) = -\tfrac{1}{2} a_2 z^2 - \tfrac{1}{6} b_2 z^3 + \varrho' z + \vartheta',$$

wo ϱ, ϑ noch y und ϱ', ϑ' noch x enthalten können.

Die Gleichung [2] lehrt nun weiter, dass y in u und x in v höchstens in der zweiten Potenz vorkommen können, so dass wir also setzen, da nach [1] keine Constante vorkommen darf,

$$\varrho = b_1' y + b_2' y^2 + b_3', \qquad \vartheta = a_1' y + a_2' y^2,$$
$$\varrho' = b_1'' x + b_2'' x^2 + b_3'', \qquad \vartheta' = a_1'' x + a_2'' x^2.$$

Werden diese Werthe eingeführt und dann die Bedingung [2] noch berücksichtigt, so erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten entsprechender Potenzen und durch Elimination von b_1'', b_2', a_1'', a_2', a_2'', b_2''

$$u = -\mu(\alpha x + \tfrac{1}{2} a_1 [x^2 - y^2] + a_2 xy) - \mu z (bx + \tfrac{1}{2} b_1 [x^2 - y^2] + b_2 xy)$$
$$+ b_1' xz - \tfrac{1}{2} a_1 z^2 - \tfrac{1}{6} b_1 z^3 + a_1' y + b_3' z,$$
$$v = -\mu(\alpha y + a_1 xy + \tfrac{1}{2} a_2 [y^2 - x^2]) - \mu z (by + b_1 xy + \tfrac{1}{2} b_2 [y^2 - x^2])$$
$$- b_1' yz - \tfrac{1}{2} a_2 z^2 - \tfrac{1}{6} b_2 z^3 - a_1' x + b_3'' z.$$

Zur Bestimmung des Werthes w bleibt noch die letzte zu erfüllende Bedingung, welche zu folgender Gleichung führt:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} + 2(b + b_1 x + b_2 y) = 0.$$

Die Bedingung, der F(x, y) unterworfen ist, wird dadurch vereinfacht, dass man setzt

$$F(x,y) = \Omega(x,y) - \left(b \frac{x^2 + y^2}{2} + b_1 xy^2 + b_2 yx^2 \right) - b_3' x - b_3'' x,$$

wo $\Omega(x, y)$ kein constantes Glied wegen (I) enthalten kann. Die zu erfüllende Bedingung ist dann

$$\frac{\partial^2 \Omega(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Damit erhalten wir

$$w = z(\alpha + a_1 x + a_2 y) - \tfrac{1}{2} b [x^2 + y^2 + z^2] - b_1 x [y^2 - \tfrac{1}{2} z^2] - b_2 y [x^2 - \tfrac{1}{2} z_2]$$
$$+ \Omega(x,y) - b_3' x - b_3'' y.$$

Diese Werthe von u, v, w in die Spannungen eingeführt geben

$$N_1 = N_2 = T_{xy} = 0,$$

$$N_3 = E[\alpha + a_1 x + a_2 y + z(b + b_1 x + b_2 y)],$$

$$T_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[b_1' y - b(1+\mu)x - b_1\frac{\mu x^2 + (2-\mu)y^2}{2} - (\mu+2)b_2 xy + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right],$$

$$T_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[-b_1' x - b(1+\mu)y - b_2\frac{\mu y^2 + (2-\mu)x^2}{2} - (\mu+2)b_1 xy + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right].$$

In den Werthen T_{xz} und T_{yz} kommt z nicht vor, mithin sind diese Spannungen, welche aus der seitlichen Verschiebung der Fasern entstehen, längs der Ausdehnung jeder Faser constant.

Ausserdem, dass wegen der Befestigungsbedingungen (I) alle constanten Glieder verschwinden, ist auch noch, weil für $x = y = z = 0$ $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ist, $a_1' = 0$ und weil dort auch $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$,

$$\left(\frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial x}\right)_0 = b_2' \text{ und } \left(\frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial y}\right)_0 = b_2'',$$

wo der Index 0 bedeutet, dass $x = 0$, $y = 0$ ist.

Die Oberflächenbedingung endlich wird folgende:

$$\begin{aligned} 0 = \cos p &\left(b_1' y - b(1+\mu)x - b_1\frac{\mu x^2 + (2-\mu)y^2}{2} - (\mu-2)b_2 xy + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) \\ + \sin p &\left(-b_1' x - b(1+\mu)y - b_2\frac{\mu y^2 + (2-\mu)x^2}{2} - (\mu+2)b_1 xy + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right). \end{aligned} \quad \text{(A.)}$$

Die Bestimmung der Function Ω kann man sich erleichtern, wenn man statt derselben eine Form bekommt, in der die willkürlichen Constanten auf lineare Art verbunden sind mit Bedingungen des Querschnittes. Wir setzen demnach $\Omega = bB + b_1' B' + b_1 B_1 + b_2 B_2$ und erhalten dann als zu erfüllende Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 B'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B'}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y^2} = 0, \text{ und}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B}{\partial x}\cos p + \frac{\partial B}{\partial y}\sin p = (1+\mu)(x\cos p + y\sin p), \\ &\frac{\partial B'}{\partial x}\cos p + \frac{\partial B'}{\partial y}\sin p = x\sin p - y\cos p, \\ &\frac{\partial B_1}{\partial x}\cos p + \frac{\partial B_1}{\partial y}\sin p = \frac{\mu x^2 + (2-\mu)y^2}{2}\cos p + (\mu+2)xy\sin p, \\ &\frac{\partial B_2}{\partial x}\cos p + \frac{\partial B_2}{\partial y}\sin p = \frac{\mu y^2 + (2-\mu)x^2}{2}\sin p + (\mu+2)xy\cos p. \end{aligned} \quad \text{(B.)}$$

Da sich nun aber beweisen lässt, dass die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} \cos p + \frac{\partial B}{\partial y} \sin p = (1 + \mu)(x \cos p + y \sin p)$$

sich einander widersprechen, so muss $b = 0$ sein. Dieser Beweis ist folgendermassen. Man gehe aus von

$$\iint \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right) dq,$$

wo die Integration über den ganzen Querschnitt ausgedehnt werden soll. Dieses Integral ist nothwendig wegen der einen Bedingung, der B unterworfen ist, $= 0$. Wird nun $dq = dx\,dy$ gesetzt und das erste Glied über einen der x Axe parallelen Streifen integrirt, dessen Endpunkte durch untere Indices 1 und 2 bezeichnet sein mögen, das zweite aber über einen der y Axe parallelen Streifen, dessen Endpunkte durch obere Indices bezeichnet seien, so hat man

$$0 = \int \left[\left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_1 \right] dy + \int \left[\left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^{(2)} - \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^{(1)} \right] dx.$$

Wenn nun ds_2, ds_1 die Elemente der Peripherie des Querschnitts bedeuten, wenn ferner p_2, p_1 die Winkel der nach aussen gerichteten Normale gegen die x Axe angeben, also

$$ds_2 \cos p_2 = dy, \quad ds_1 \cos p_1 = -dy,$$

so ist

$$\int \left[\left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_1 \right] dy = \int \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) \cos p\, ds,$$

und dem entsprechend

$$\int \left[\left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^{(2)} - \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^{(1)} \right] dx = \int \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right) \sin p\, ds.$$

Mithin ist unser obiges Integral

$$0 = \int \left(\frac{\partial B}{\partial x} \cos p + \frac{\partial B}{\partial y} \sin p \right) ds.$$

Dies ist aber nach der gegebenen Grenzbedingung

$$0 = \int (x \cos p + y \sin p)\, ds.$$

Behandelt man auf dieselbe Art das folgende Integral

$$\iint \left(\frac{\partial^2 \frac{x^2 + y^2}{2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{(x^2 + y^2)}{2}}{\partial y^2} \right) dq,$$

so erhält man auch

$$\int (x \cos p + y \sin p)\, ds.$$

Man findet aber durch Ausführung der hier angedeuteten Differentiationen, dass dieses Integral ist $= 2 \iint dq =$ dem doppelten Querschnitt, also nicht $= 0$ sein kann, daher ist auch B unmöglich und es muss also $b = 0$ sein, um diesen Widerspruch zu entfernen.

Mit Benutzung der sämmtlichen in dieser Nummer erörterten Bestimmung der Constanten, nach denen ist

$$b = 0, \quad a_1' = 0, \quad b_3' = \left(\frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial x}\right)_0, \quad b_3'' = \left(\frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial y}\right)_0,$$

erhalten wir also die folgenden Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\mu\left(\alpha x + \tfrac{1}{2} a_1 [x^2 - y^2] + a_2 xy\right) - \mu z\left(\tfrac{1}{2} b_1 [x^2 - y^2] + b_2 xy\right) \\
&\quad + b_1' yz - \tfrac{1}{2} a_1 z^2 - \tfrac{1}{6} b_1 z^3 + z\left(\frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial x}\right)_0, \\
v &= -\mu\left(\alpha y + a_1 xy + \tfrac{1}{2} a_2 [y^2 - x^2]\right) - \mu z\left(b_1 xy + \tfrac{1}{2} b_2 [y^2 - x^2]\right) \\
&\quad + b_1' xz - \tfrac{1}{2} a_2 z^2 - \tfrac{1}{6} b_2 z^3 + z\left(\frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial y}\right)_0, \\
w &= z(\alpha + a_1 x + a_2 y) - b_1 x [y^2 - \tfrac{1}{2} z^2] - b_2 y [x^2 - \tfrac{1}{2} z^2] + \Omega(xy) \\
&\quad - x\left(\frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial x}\right)_0 - y\left(\frac{\partial \Omega(x,y)}{\partial x}\right)_0, \\
N_1 &= N_2 = T_{xy} = 0, \\
N_3 &= E\left(\alpha + a_1 x + a_2 y + z(b_1 x + b_2 y)\right), \\
T_{xz} &= \frac{E}{2(1+\mu}\left[b_1' y + b_1 \frac{\mu x^2 + (2-\mu) y^2}{2} - (\mu+2) b_2 xy + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right], \\
T_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left[-b_1' x - b_2 \frac{\mu y^2 + (2-\mu) x^2}{2} - (\mu+2) b_1 xy + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (C.)$$

5. Gleichung der Biegungscurve und des gebogenen Querschnittes.

1) Gleichung der gebogenen Faser.

Die Coordinaten eines Punktes, der ursprünglich der Faser xy angehörte, sind nach der Verschiebung

$$x' = x + u, \quad y' = y + v, \quad z' = z + w.$$

In diesen drei Gleichungen sind für eine Faser x und y constant, z hingegen veränderlich. Eliminirt man z aus den obigen Gleichungen, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x', y', z' als Gleichungen der Curve. Diese Elimination lässt sich aber leicht bewerkstelligen, wenn man sehr kleine Grössen vernachlässigt, indem man in u und v statt z setzt z' und dann die gefundenen Werthe von u und v mit u' und v' bezeichnet. Die gesuchten Gleichungen sind

$$x' = x + u', \quad y' = y + v'.$$

2) Gleichung des gebogenen Querschnittes.

Für einen ursprünglich ebenen Querschnitt ist in den drei oberen Gleichungen z constant, folglich x und y zu eliminiren. Dies kann ebenso wie vorhin näherungsweise gemacht werden, so dass man erhält

$$z' = z + v'.$$

6. Bestimmung der noch vorhandenen willkürlichen Constanten durch die gegebenen Kräfte und die gegebene Querschnittsform.

Die auf den Endquerschnitt wirkenden gegebenen äusseren Kräfte zerlegen wir in drei Componenten nach den Axen und in die Momente um dieselben. Diesen gegebenen äusseren Kräften und Momenten setzen wir dann die gefundenen Ausdrücke der Spannungen und deren Momente übertragen auf den letzten Querschnitt, also für $z = l$ gleich und erhalten somit 6 Gleichungen, die zur Bestimmung der noch willkürlichen Constanten α, a_1, b_1, a_2, b_2, b_1' in den Ausdrücken der Spannungen dienen. Die Vorzeichen der Momente und Axen seien wie folgt bestimmt. Wenn von der positiven Coordinatenaxe aus gesehen die entsprechenden Kräfte so drehen, wie sich der Uhrzeiger bewegt, so seien die Momente positiv. Das Coordinatensystem liegt so, dass von der positiven x Axe gesehen der Uhrzeiger sich 90^0 drehen muss, um von der $+y$ Axe zur $+z$ Axe zu kommen.

Die Componenten und Momente der äusseren Kräfte seien bezeichnet durch X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, so dass wir, wenn die Integration über den ganzen Querschnitt geht, folgende 6 Gleichungen erhalten:

$$\int T_{xz}\, dq = X, \quad \int T_{yz}\, dq = Y, \quad \int N_3 dq = Z,$$

$$\int (N_3 y - T_{yz} l)\, dq = M_x, \quad \int (T_{xz} l - N_3 x)\, dq = M_y, \quad \int (T_{yz} x - T_{xz} y)\, dq = M_z.$$

Zur Vereinfachung legen wir den Anfang des Coordinatensystems in den Schwerpunkt und in die Hauptaxen des Querschnittes, so dass

$$\int x\, dq = 0, \quad \int y\, dq = 0, \quad \int xy\, dq = 0,$$

ferner seien abgekürzt die Hauptträgheitsmomente $\int x^2 dq$ und $\int y^2 dq$ bezeichnet durch $\lambda^2 q$, $\varkappa^2 q$.

Die Einsetzung der Ausdrücke für die Spannungen (C.) und die Ausführung der Integration giebt dann:

$$\left.\begin{aligned}
&-b_1 \frac{\mu\lambda^2 + (2-\mu)\varkappa^2}{2} + \frac{1}{q}\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq = \frac{2(1+\mu)}{Eq} X, \\
&-b_2 \frac{\mu\varkappa^2 + (2-\mu)\lambda^2}{2} + \frac{1}{q}\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq = \frac{2(1+\mu)}{Eq} Y, \\
&\alpha = \frac{X}{Eq}, \quad a_2 + l b_2 = \frac{M_x + lY}{Eq\varkappa^2}, \quad a_1 + l b_1 = \frac{-M_y + lX}{Eq\lambda^2}, \\
&-b_1'(\varkappa^2 + \lambda^2) + \frac{1}{q}\int\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial y} - y\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) dq + \frac{b_1}{q}\int \frac{(2-\mu)y^3 - (4+\mu)x^2 y}{2} dq \\
&\qquad - \frac{b_2}{q}\int \frac{(2-\mu)x^3 - (\mu+4)xy^2}{2} dq = \frac{2(1+\mu)}{Eq} M_z.
\end{aligned}\right\} \text{(D.)}$$

Die Constanten α, a_1, a_2 sind demnach unabhängig von Ω. Es kann aber nachgewiesen werden, dass die Integrale in den beiden ersten Gleichungen, die zur Bestimmung von b_1 und b_2 dienen, nämlich

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq \text{ und} \int \frac{\partial \Omega}{dy} dq,$$

unabhängig von der Querschnittsform bestimmt werden können.

Es ist
$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq = \iint \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx\, dy.$$

Integriren wir nun über einen Streifen dy parallel der x Axe und deuten die Resultate an den Enden desselben durch 0 und 1 an, so ist
$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq = \int_0^1 \left[x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] dy - \iint x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} dx\, dy,$$
oder nach der in 4. angegebenen Bedingung, der Ω unterworfen ist,
$$= \int_0^1 \left[x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] dy + \iint x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} dx\, dy.$$

Integriren wir nun das zweite Doppelintegral über einen Streifen parallel der y Axe von der Breite dx und nehmen dieselbe Bezeichnung für die Grenzen, so erhalten wir dann
$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq = \int_0^1 \left[x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] dy + \int_0^1 \left[x \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] dx.$$

Das erste dieser Integrale ist also auszudehnen über alle Streifen, die sich der y Axe parallel legen lassen, oder was dasselbe ist, über alle Paare von Bogenelementen, welche durch solche Streifen auf der Peripherie der Curve abgeschnitten werden. Ist nun ds dieses Bogenelement und p der Winkel der nach aussen gerichteten Normale gegen die x Axe und sei derselbe p_0 $[p_1]$ im Punkte x_0 $[x_1]$, so ist
$$dy = ds_1 \cos p_1 = - ds_0 \cos p_0.$$

Mithin ist
$$\int_0^1 \left[x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] dx = \int_0^1 \left[x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos p \right] ds,$$
oder wenn man das Integral über den ganzen Bogen ausdehnt
$$= \int x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos p\, ds.$$

Auf dieselbe Art erhält man:
$$\int_0^1 \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] dx = \int x \frac{\partial \Omega}{\partial y} \sin p\, ds.$$

Es is demnach
$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq = \int x \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos p + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \sin p \right) ds,$$
wo das Integral rechts über den ganzen Querschnittsumfang auszudehnen ist. Dies giebt dann nach der für die Oberfläche geltenden Gleichung 4. (A.).
$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq = \int x \left\{ \left[- b_1' x + b_1 \frac{\mu x^2 + (2 + \mu) y^2}{2.} + (\mu + 2) b_2 xy \right] \cos p \right.$$
$$\left. + \left[b_1' x + b_2 \frac{\mu y^2 + (2 - \mu) x^2}{2} + (\mu + 2) b_1 xy \right] \sin p \right\} ds.$$

Die rechte Seite kann abgekürzt geschrieben werden
$$\int x \left[\Xi \cos p + H \sin p \right] ds.$$

Um den Werth dieses Interals zu bestimmen, gehen wir den oben eingeschlagenen Weg rückwärts. Es ist also dieses Integral
$$\int_0^1 [x \Xi]\, dy + \int_0^1 [x H]\, dx,$$

oder wenn man die einzelnen Integrale als das Resultat der Integration nach einem der oben betrachteten Flächenstreifen ansieht:

$$\iint\left(\frac{\partial x \Xi}{\partial x} + \frac{\partial x H}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Es ist also

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq = \int\left(\frac{\partial x \Xi}{\partial x} + \frac{\partial x H}{\partial y}\right) dq.$$

Dieser Gleichung schliesst sich offenbar die ganz ähnlich gebildete an:

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial y} dq = \int\left(\frac{\partial y \Xi}{\partial x} + \frac{\partial y H}{\partial y}\right) dq.$$

Man erhält nun, wenn man für Ξ und H ihre Werthe einführt und berücksichtigt, dass wegen der angenommenen Lage des Coordinatensystems einige Integrale verschwinden und andere kurz bezeichnet werden können,

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq = \frac{b_1 q}{2}\left\{(5\mu + 4)\lambda^2 + (2-\mu)\varkappa^2\right\},$$

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial y} dq = \frac{b_2 q}{2}\left\{(5\mu + 4)\varkappa^2 + (2-\mu)\lambda^2\right\}.$$

Damit reduciren sich die ersten fünf Gleichungen von (D.) auf die folgenden:

$$b_1 = \frac{X}{Eq\lambda^2},\quad b_2 = \frac{Y}{Eq\varkappa^2},\quad \alpha = \frac{Z}{Eq},\quad a_2 = \frac{M_x}{Eq\varkappa^2},\quad a_1 = -\frac{M_y}{Eq\lambda^2}.$$

Eine wesentliche Vereinfachung der letzten Gleichung von (C.) erhalten wir, wenn wir einen symmetrischen Querschnitt annehmen, erstens dadurch, dass $\int y^3 dq$, $\int xy^2 dp$, $\int x^2 y\, dq$, $\int x^3 dq$ verschwinden und zweitens wegen der Grenzbedingungen (B). An diesen können wir nämlich erkennen, welche von den Functionen B', B_1 und B_2, die Ω zusammensetzen, gerade oder ungerade in Bezug auf x und y sind, so dass wir dann wissen, welche Integrale verschwinden müssen. Geht man nämlich an der Peripherie von einem Punkte x, y zu einem anderen, der dasselbe x, aber entgegengesetztes y hat, so bleibt das Vorzeichen von cos p, aber das von sin p geht in das entgegengesetzte über, mithin erhalten wir in den drei von (B.) noch übrigen Gleichungen folgende Beziehungen für die rechten Seiten und damit auch für die linken. In der ersten ändert sich das Zeichen, wenn x und auch wenn y dasselbe ändern; in der zweiten ändert sich das Zeichen, wenn es x ändert, aber nicht, wenn es y ändert, und die letzte Gleichung ändert das Zeichen, wenn es x, aber nicht, wenn es y ändert. Berücksichtigen wir nun erstens den Satz: wenn eine Function von x ihr Zeichen ändert [beibehält] bei einer Veränderung des Zeichens von x, so wird deren Differentialquotient nach x das Zeichen beibehalten [ändern] bei derselben Veränderung von x, zweitens die oben angegebenen Veränderungen der Vorzeichen von sin p und cos p, so finden wir Folgendes: B' ändert sein Zeichen, wenn es x und y ändert, ist also ungerade für x und y, B_1 [B_2] ändert sein Zeichen, wenn es x [y] ändert, aber nicht, wenn es y [x] ändert, also ist B_1 [B_2] ungerade in Bezug auf x [y] und gerade in Bezug auf y [x]. Es müssen demnach für symmetrische Querschnitte bei der Zerlegung von $\int\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial x} - y\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) dq$

alle Integrale verschwinden ausser $b_1' \int \left(x \frac{\partial B'}{\partial y} - y \frac{\partial B'}{\partial x} \right) dq$. Die letzte Gleichung von (D) wird demnach

$$-b_1'(\varkappa^2 + \lambda^2) + \frac{b_1'}{q} \int \left(x \frac{\partial B'}{\partial y} - y \frac{\partial B'}{\partial x} \right) dq = \frac{2(1+\mu)}{Eq} M_z.$$

Mit Hülfe der hier gefundenen Werthe von a_1, a_2, b_1, b_2 gehen die Gleichungen in 4. über in

$$Eq\lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = M_y - Xz,$$

$$Eq\varkappa^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = M_x - Yz.$$

Bedenkt man nun, dass $x' = x + u$, $y' = y + v$, $z' = z + w$, so kann man setzen

$$\frac{dx'}{dz'} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{1 + \frac{\partial w}{\partial z}}, \quad \frac{dy'}{dz'} = \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{1 + \frac{\partial w}{\partial z}}.$$

Da ferner $\frac{\partial w}{\partial z}$ wenig von 1 verschieden ist, so wird

$$\frac{dx'}{dz'} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{dy'}{dz'} = \frac{\partial v}{\partial z},$$

daher auch

$$\frac{d^2x'}{dz'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{d^2y'}{dz'^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

und daher näherungsweise

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{M_y - Xz}{Eq\lambda^2}, \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{M_x - Yz}{Eq\varkappa^2}.$$

Dadurch verwandeln sich die obigen Gleichungen in die § 67, 1.

7. Bestimmung der Function Ω.

Von dieser Function Ω gilt, dass sie vollständig bestimmt ist durch die Gleichung in 4.:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0$$

und durch 4. (A.). Dies beweist Clebsch folgendermassen.

Gäbe es zwei verschiedene Functionen Ω, so müsste deren Differenz Θ folgenden beiden Gleichungen genügen

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 \text{ und } \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cos p + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \sin p = 0.$$

Betrachtet man nun das Integral

$$J = \iint \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy$$

und behandelt dasselbe ähnlich wie in der vorigen Nummer $\int \frac{\partial \Omega}{\partial x} dq$ behandelt ist.

$$\iint\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = \int\left[\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right]_0^1 dy - \iint\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\,dx\,dy,$$

$$\iint\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 dx\,dy = \int\left[\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right]_0^1 dx - \iint\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\,dx\,dy.$$

Führt man dann cos p, sin p, ds ein, so erhält man

$$J = \int\Theta\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\cos p + \frac{\partial\Theta}{\partial y}\sin p\right)ds - \iint\Theta\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\right)dx\,dy.$$

Nach den Bedingungen, denen Θ unterworfen sein muss, ergiebt sich nun $J = 0$, da beide Ausdrücke unter dem Integralzeichen verschwinden. In dem ersten Ausdruck von J steht aber die Summe zweier Quadrate, mithin kann dann nur 0 herauskommen, wenn jedes einzelne Glied verschwindet, wenn also überall $\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\Theta}{\partial y} = 0$ d. h. Θ constant ist. Wenn es also auch verschiedene Lösungen von Ω giebt, so können sich diese doch nur durch additive Constante unterscheiden. Fügt man dann noch die Bedingung hinzu, dass Ω an einer Stelle, z. B. für $x = 0$, $y = 0$, verschwindet, so ist Ω völlig bestimmt. Kennt man demnach eine Form von Ω, so kann man diese als die nothwendige betrachten.

Eine solche Form ist

$$\Omega(x,y) = \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \chi(x - y\sqrt{-1}),$$

wo φ und χ beliebige Functionen sind. Durch Differenziren erkennt man nämlich leicht, dass

$$\frac{\partial^2\Omega(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega(x,y)}{\partial y^2} = 0 \text{ ist.}$$

Man kann nun statt φ und χ setzen die Summe und Differenz gleich hoher Potenzen von $x + y\sqrt{-1}$ und $x - y\sqrt{-1}$ multiplicirt mit beliebigen Constanten, also

$$\Omega(x,y) = \Sigma\alpha_n\left[(x + y\sqrt{-1})^n + (x - y\sqrt{-1})^n\right]$$
$$+ \Sigma\frac{\beta_n}{\sqrt{-1}}\left[(x + y\sqrt{-1})^n - (x - y\sqrt{-1})^n\right].$$

Dies giebt entwickelt

$$= 2\alpha_0 + 2\alpha_1 x + 2\beta_1 y + 2\alpha_2(x^2 - y^2) + \beta_2 xy + 2\alpha_3(x^3 - 3xy^2)$$
$$+ 2\beta_3(3x^2y - y^3) + 2\alpha_4(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 8\beta_4(x^3y - xy^3)\ldots,$$

wo zur Bestimmung der darin vorkommenden Constanten bestimmte Annahmen über die Form des Querschnittes gemacht werden müssen.

8. Specialisirung für bestimmte gegebene Kräfte.

1) Es existire nur eine Kraft in der Richtung der Längsaxe des Körpers. Ausser Z sind also alle anderen Kräfte $\doteq 0$, und verschwinden auch alle Momente, so dass nur die Constante $\alpha = \frac{Z}{Eq}$ übrig bleibt. Dann ist

$$u = -\mu\alpha x,\quad v = -\mu\alpha y,\quad w = \alpha z = \frac{Zz}{Eq},\quad N_3 = \frac{Z}{q},\quad T_{xz} = T_{yz} = 0.$$

Dies sind die Formeln von § 65. Die Form des Querschnittes ist, wie auch dort gefunden ist, gleichgültig.

2) Wenn nur eine Kraft X und ein Moment M_y existirt, so wird der Körper gebogen. Es bleiben demnach nur die Constanten a_1 und b_1. Wenn wir nun Körper mit symmetrischem Querschnitt betrachten, so muss $\frac{\partial B_1}{\partial y}$ ungerade sein in Bezug auf y, da nach 6. B_1 gerade ist in Bezug auf y. Es verschwindet demnach $\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0$, wie jede ungerade Function, deren Veränderliche verschwindet. Die aus (C.) folgenden Gleichungen sind dann

$$Eq\lambda^2 u = M_y \frac{\mu(x^2 - y^2) + z^2}{2} - X\left[\frac{z^3}{6} + \mu z\,\frac{x^2 - y^2}{2} - z\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right],$$

$$Ep\lambda^2 v = \mu xy\,[M_y - Xz],$$

$$Eq\lambda^2 w = -M_y xz + X\left[x(\tfrac{1}{2}z^2 - y^2) + B_1 - x\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right],$$

$$p\lambda^2 T_{xz} = \frac{X}{2(1+\mu)}\left[-\frac{\mu x^2 + (2-\mu)y^2}{2} + \frac{\partial B_1}{\partial x}\right],$$

$$p\lambda^2 T_{yz} = \frac{X}{2(1+\mu)}\left[-(\mu+2)xy + \frac{\partial B_1}{\partial y}\right],$$

$$q\lambda^2 N_3 = x\,[Xz - M_y].$$

Nach unserer Bezeichnung § 67 ist $X = P$ und $M_y = Pl$, mithin

$$N_3 = -\frac{Px}{q\lambda^2}(l - z).$$

Für $z = l$ verschwindet also die Längsspannung. Ferner ist N_3 für entgegengesetzte x auch entgegengesetzt. Da N_3 für $x = 0$ verschwindet und für entgegengesetzte x die entgegengesetzten Werthe annimmt, so muss die neutrale Schicht durch den Schwerpunkt gehen und auf der einen Seite derselben giebt es nur Contraction, auf der anderen nur Ausdehnung. An dem freien Querschnitt, $z = l$, ist $v = 0$ und u hängt nicht von x und y ab, d. h. die Punkte dieses Querschnittes sind zwar gegen die Fläche desselben rückwärts und vorwärts verschoben, aber die Fläche selbst bleibt in ihrer Form unverändert.

Den Pfeil der Biegung finden wir, indem wir in dem Ausdruck für u setzen $z = l$. Dies giebt

$$f = \frac{P}{Eq\lambda^2}\left[\frac{1}{3}\,l^3 + l\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right].$$

Da das zweite Glied der Parenthese einen nur geringen Einfluss auf das erste haben kann, so können wir sagen, dass auf den Pfeil der Biegung die Art des Querschnittes nur einen geringen Einfluss hat.

Die früher ebenen Querschnitte hören auf eben zu sein, ihre Form ist abhängig vom Querschnitt und ihre Gleichungen sind nach 5.:

$$z' = z - \frac{P}{Eq\lambda^2}\left\{-lxz' + x(\tfrac{1}{2}z'^2 - y'^2) + B_1' - x\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right\},$$

wo B_1' den Werth bezeichnet, in den B_1 übergeht, wenn $x'y'$ an die Stelle von xy gesetzt werden. Die Krümmung ist demnach vom Querschnitt abhängig.

Die Gleichungen einer ursprünglich geraden Faser sind nach 5.:

$$x' = x + \frac{M_y}{Eq\lambda^2}\frac{\mu(x^2 - y^2) + z'^2}{2} - \frac{X}{Eq\lambda^2}\left[\frac{z'^3}{6} + \mu z'\frac{x^2 - y^2}{2} - z'\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0\right],$$

$$y' = y + \frac{\mu xy}{Eq\lambda^2}(M_y - X.z'] = y + \frac{P\mu xy}{Eq\lambda^2}[l - z'].$$

Letztere Gleichung bedeutet eine Ebene, mithin bildet jede gebogene Faser eine ebene Curve, deren Ebene parallel der x Axe ist. Die Curve selbst ist nach der ersten Gleichung eine parabolische Linie des dritten Grades, die für $X = 0$ in eine gewöhnliche Parabel oder näherungsweise für schwache Biegung in einen Kreis übergeht.

Lassen wir nur Y und M_x, so bleiben nur die Constanten a_2 und b_2 und wir würden wie oben eine Biegung erhalten, die sich von der obigen nur durch die Lage gegen die Axen unterscheidet.

3) Ist nur M_z vorhanden, so verschwinden alle Constanten ausser b_1' und wir haben es mit einer Torsion um die z Axe zu thun. Die hier zu erörternden Gleichungen sind demnach:

$$b_1' = \frac{-2(1+\mu)M_z}{E\left\{(\varkappa^2 + \lambda^2)q - \int\left(x\frac{\partial B'}{\partial y} - y\frac{\partial B'}{\partial x}\right)dq\right\}},$$

$$u = b_1'z\left[y + \left(\frac{\partial B'}{\partial x}\right)_0\right], \qquad N_3 = 0,$$

$$v = -b_1'z\left[x - \left(\frac{\partial B'}{\partial y}\right)_0\right], \qquad T_{xz} = \frac{Eb_1'}{2(1+\mu)}\left(y + \frac{\partial B'}{\partial x}\right),$$

$$w = b_1'\left[B' - x\left(\frac{\partial B'}{\partial x}\right)_0 - y\left(\frac{\partial B'}{\partial y}\right)_0\right], \qquad T_{yz} = -\frac{Eb_1'}{2(1+\mu)}\left(x - \frac{\partial B'}{\partial y}\right).$$

Die Gleichungen der verschobenen Fasern sind:

$$x' = x + b_1'z'\left[y + \left(\frac{\partial B'}{\partial x}\right)_0\right],$$

$$y' = y - b_1'z'\left[x - \left(\frac{\partial B'}{\partial y}\right)_0\right].$$

Von diesen ist eine in ihrer ursprünglichen Form geblieben, und zwar ist es die, deren ursprüngliche Coordinaten sind

$$x = \left(\frac{\partial B'}{\partial y}\right)_0, \quad y = -\left(\frac{\partial B'}{\partial x}\right)_0, \quad (*)$$

und im festgelegenen Querschnitt verschwinden mit z die u und v.

Zur genaueren Charakterisirung der Torsion ist zu untersuchen der Ort aller der verschobenen Fasern, die ursprünglich einen Kreiscylinder bildeten. Sei der ursprüngliche Cylinder gegeben durch

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$

Setzen wir nun bei Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung in den Parenthesen der Gleichungen für x' und y' statt der x und y die wenig davon verschiedenen x' und y', so ergiebt sich aus diesen

$$x = x' - b_1' z' \left[y' + \left(\frac{\partial B'}{\partial x}\right)_0 \right]; \quad y = y' + b_1' z' \left[x' - \left(\frac{\partial B'}{\partial y}\right)_0 \right].$$

Werden diese Werthe in die Gleichung des ursprünglichen Kreiscylinders eingeführt, so erhält man als Gleichung der aus demselben entstandenen Oberfläche

$$r^2 = (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 - 2 b_1' z' \left[\beta x' - \alpha y' + (x' - \alpha) \left(\frac{\partial B'}{\partial x}\right) + (y' - \beta) \left(\frac{\partial B'}{\partial y}\right)_0 \right].$$

Dies ist die Gleichung eines hyperbolischen (einschaligen) Hyperboloids. Transformirt man diese Gleichung für ein anderes Coordinatensystem, so dass die laufenden Coordinaten ξ und η werden, $\xi = x' - \alpha$ und $\eta = y' - \beta$, so geht die Gleichung über in

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2 b_1' z' \left\{ \xi \left[\beta + \left(\frac{\partial B'}{\partial x}\right)_0 \right] - \eta \left[\alpha - \left(\frac{\partial B'}{\partial y}\right)_0 \right] \right\}.$$

Aus dieser Gleichung sieht man, dass der Mittelpunkt unserer Oberfläche in dem festen Querschnitt liegt und zwar da, wo die Cylinderaxe denselben schneidet.

Ist speciell $\alpha = \left(\frac{\partial B'}{\partial y}\right)_0$, $\beta = -\left(\frac{\partial B'}{\partial x}\right)_0$, so wird die Gleichung wieder $r^2 = (x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2$, also wird dann die Faser nur wenig in der Tangentialebene des Cylinders verschoben. Nach der oben (*) angegebenen Bedingung ist dies also der Fall, wenn die Axe unseres Cylinders mit der unveränderten Faser zusammenfällt.

Die Gleichung der früher ebenen Querschnitte ist:

$$z' = z + b_1' \left[B' - x' \left(\frac{\partial B'}{\partial x}\right)_0 - y' \left(\frac{\partial B'}{\partial y}\right)_0 \right],$$

also sind dieselben im Allgemeinen gekrümmt und zwar ist wegen B' diese Krümmung abhängig vom Querschnitt, aber sie ist für alle Querschnitte dieselbe, denn in w kommt z nicht vor.

Von Wichtigkeit ist endlich noch die Bestimmung des Torsionswinkels $\mathfrak{D}$ (§ 68). Wir müssen denselben zunächst ausdrücken durch u, v, w. Wenn wir Polarcoordinaten einführen, ist $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ nach der Drehung.

$$\begin{aligned} x + u &= r \cos(\varphi + \mathfrak{D}), & y + v &= r \sin(\varphi + \mathfrak{D}) \text{ und, da } \mathfrak{D} \text{ klein ist,} \\ &= r(\cos\varphi - \mathfrak{D} \sin\varphi), & &= r(\sin\varphi + \mathfrak{D}\cos\varphi), \text{ also} \\ u &= -r\mathfrak{D}\sin\varphi, & v &= \mathfrak{D} r \cos\varphi, \\ &= -\mathfrak{D} y, & &= \mathfrak{D} x. \end{aligned}$$

Wir beziehen unser $\mathfrak{D}$ auf die unveränderliche Axe, setzen also nach (*) statt x und y die Grössen $x - \left(\frac{\partial B'}{\partial y}\right)$, $y + \left(\frac{\partial B'}{\partial x}\right)_0$, dann ist

$$u = b_1'zy, \quad v = -b_1'zx,$$

mithin

$$b_1'z = \mathfrak{D}.$$

Jeder Querschnitt erscheint also gedreht um einen Winkel, der seiner Entfernung z von dem festen Querschnitt proportional ist, und b_1' selbst bezeichnet den Drehungswinkel im Abstande 1. Wenn l die ganze Länge ist, so bedeutet $b_1'l$ die Drehung des letzten Querschnittes gegen den ersten.

4) Ist nur X vorhanden, so verschwinden alle Constanten ausser b_1 und wir haben es mit einer Verschiebung zu thun. Dann ist

$$u = -b_1\left[\tfrac{1}{2}\mu z(x^2-y^2)+\tfrac{1}{6}z^3\right], \quad b_1 = \frac{X}{Eq\lambda^2},$$

$$v = -b_1[\mu xyz],$$

$$w = -b_1\left[x(y^2-\tfrac{1}{2}z^2) - B_1 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0 y\right],$$

$$N_3 = Eb_1xz, \quad T_{xz} = -\frac{Eb_1}{2(1+\mu)}\frac{\mu x^2+(2-\mu)y^2}{2} + b_1\frac{\partial B_1}{\partial x},$$

$$T_{yz} = -\frac{Eb_1}{2(1+\mu)}(\mu+2)xy + b_1\frac{\partial B_1}{\partial y}.$$

Sobald wir nur den Schub berücksichtigen, so haben wir nicht N_3 zu bedenken und $z = 0$ zu setzen, denn die Schubkraft greift in dem zu untersuchenden Querschnitt an, es ist mithin $u = 0$, $v = 0$.

$$w = -b_1\left[xy^2 - B_1 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0 y\right].$$

Die Gleichung des nun gekrümmten Querschnittes ist demnach

$$z' = \frac{X}{Eq\lambda^2}\left[-xy^2 + B_1 - \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\right)_0 x - \left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0 y\right].$$

Für einen symmetrischen Querschnitt vereinfachen sich die Betrachtungen, da $\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)_0 = 0$ ist, aber immer ist die Krümmung sowie die Grösse der Spannung noch abhängig von der Querschnittsform.

Dasselbe erhalten wir auch, wenn wir Alles ausser Y verschwinden lassen.

9. Elliptisch geformter Querschnitt.

Sei gegeben der Querschnitt durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

dann ist

$$\operatorname{tg} p = \frac{1}{-\frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{y}{n^2} : \frac{x}{n^2} = \sin p : \cos p.$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Coefficienten α, β in der allgemeinen Form für Ω in 7. zu bestimmen. Die zu berücksichtigenden Glieder in dieser Entwickelung ergeben sich aus den Grenzbedingungen (B.), die nach Einführung von m und n folgende Form annehmen:

$$\frac{x}{m^2}\frac{\partial B'}{\partial x}+\frac{y}{n^2}\frac{\partial B'}{\partial y}=xy\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right),$$

$$\frac{x}{m^2}\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{y}{n^2}\frac{\partial B_1}{\partial y}=\frac{\mu x^3+(2-\mu)y^2x}{2m^2}+(\mu+2)\frac{xy^2}{n^2},$$

$$\frac{x}{m^2}\frac{\partial B_2}{\partial x}+\frac{y}{n^2}\frac{\partial B_2}{\partial y}=(\mu+2)\frac{x^2y}{m^2}+\frac{\mu y^3+(2-\mu)x^2y}{2m^2}.$$

Nach 6. ist B' ungerade für x und y, also muss $B'=\beta_2 xy$ sein.

B_1 ist ungerade in Bezug auf x und gerade auf y und nach den Grenzbedingungen ist von x die dritte und von y die zweite die höchste Potenz, mithin ist

$$B_1=2\alpha x+2\alpha_3(x^3-3xy^2).$$

Diesem analoge Schlüsse führen zu

$$B_2=2\beta_1 y-2\beta_3(y^3-3x^2y).$$

Werden dann die in den Grenzbedingungen angedeuteten Differentiationen ausgeführt und die erhaltenen Werthe eingesetzt, so erhält man aus der ersten Gleichung nach Division mit xy:

$$\beta_2\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\text{ oder }\beta_2=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}.$$

Die beiden anderen Gleichungen geben, wenn man die Glieder erster Dimension mit $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ multiplicirt:

$$\frac{x}{m^2}\left[2\alpha\left(\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)+6\alpha_3(x^2-y^2)\right]-12\alpha_3\frac{xy^2}{n^2}=\frac{\mu x^3+(2-\mu)y^2x}{2m^2}$$
$$+(\mu+2)\frac{xy^2}{n^2},$$

$$\frac{y}{n^2}\left[2\beta_1\left(\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)+6\beta_3(x^2-y^2)\right]-12\beta_3\frac{x^2y}{m^2}=\frac{\mu y^3+(2-\mu)x^2y}{2n^2}$$
$$+(\mu+2)\frac{yx^2}{m^2}$$

und hierin dann die Coefficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten einander gleich setzt.

$$\frac{\alpha_1}{m^2}+3\alpha_3=\frac{1}{4}\mu,$$

$$\frac{2\alpha_1}{m^2n^2}+2\alpha_3\left(\frac{3}{m^2}+\frac{6}{n^2}\right)=\frac{2-\mu}{2m^2}+\frac{2+\mu}{n^2},$$

$$\frac{\beta_1}{n^2}-3\beta_3=\frac{1}{4}\mu,$$

$$\frac{2\beta_1}{m^2n^2}+2\beta_3\left(\frac{3}{n^2}+\frac{6}{m^2}\right)=\frac{2-\mu}{2n^2}+\frac{2+\mu}{m^2}.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt

$$2\alpha_1=\frac{m^2[2m^2(1+\mu)+n^2]}{3m^2+n^2},\quad 2\alpha_3=-\frac{m_1^2(4+\mu)+n^2(2-\mu)}{6(3m^2+n^2)},$$

$$2\beta_1=\frac{n^2[2n^2(1+\mu)+m^2]}{3n^2+m^2},\quad 2\beta_3=\frac{n^2(4+\mu)+m^2(2-\mu)}{6(3n^2+m^2)},$$

so dass endlich die Functionen B', B_1, B_2 folgende Werthe erhalten:

$$B' = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} xy,$$

$$B_1 = \frac{m^2[2m^2(1+\mu)+n^2]x - \frac{1}{6}[m^2(4+\mu)+n^2(2-\mu)(x^3-3y^2x)}{3m^2+n^2},$$

$$B_2 = \frac{n^2[2n^2(1+\mu)+m^2]y - \frac{1}{6}[n^2(4+\mu)+m^2(2-\mu)(y^3-3x^2y)}{3n^2+m^2},$$

Diese Formeln vereinfachen sich, wenn der Querschnitt ein Kreis ist, also $n = m = r$, in:

$$B' = 0,$$

$$B_1 = \frac{(3+2\mu)r^2x}{4} - \frac{x^3 - 3y^2x}{4},$$

$$B_2 = \frac{(3+2\mu)r^2y}{4} - \frac{y^3 - 3x^2y}{4}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln, wenn man noch bedenkt, dass nach § 67, 14. ist

$$\lambda = \frac{m}{2}, \quad \varkappa = \frac{n}{2},$$

können zunächst die von dem Querschnitt abhängigen Untersuchungen von 8. vervollständigt werden. Für eine Biegung erhalten wir demnach:

$$Eq\lambda^2 u = M_y \frac{\mu(x^2-y^2)+z^2}{2} - X\left[\frac{z^3}{6} + \mu z\frac{x^2-y^2}{2} - z\frac{m^2[2m^2(1+\mu)+n^2]}{3m^2+n^2}\right],$$

$$Eq\lambda^2 v = \mu xy(M_y - Xz),$$

$$Eq\lambda^2 w = -M_y xz + X\left[x(\tfrac{1}{2}z^2 - y^2) - \frac{[m^2(4+\mu)+n^2(2-\mu)](x^3-3y^2x)}{6(3m^2+n^2)}\right],$$

$$q\lambda^2 T_{xz} = \frac{X}{2(1+\mu)}\left[-\frac{\mu x^2+(2-\mu)y^2}{2} + \frac{m^2[2m^2(1+\mu)+n^2}{3m^2+n^2} - \frac{[m^2(4+\mu)+n^2(2-\mu)](x^2-y^2)}{2(3m^2+n^2)}\right],$$

$$q\lambda^2 T_{yz} = \frac{X}{2(1+\mu)}\left[-(\mu+2)xy + \frac{[m^2(4+\mu)+n^2(2-\mu)]xy}{3m^2+n^2}\right],$$

$$q\lambda^2 N_3 = x(Xz - M_y).$$

Die Gleichung der ursprünglich ebenen Querschnitte ist nach der Biegung $z' = z + w$, wenn noch $M_y = Pl$ und $X = P$ gesetzt wird,

$$z' = z + \frac{P}{Eq\lambda^2}\left[-lx'z + x'(\tfrac{1}{2}z^2 - y'^2) = \frac{[m^2(4+\mu)+n^2(2-\mu)]}{6(3m^2+n^2)}(x'^3 - 3y'^2x')\right],$$

also eine Fläche der dritten Ordnung, welche gegen die Biegungsebene symmetrisch ist und von den Ebenen, welche der Längsaxe parallel und zur Biegungsebene senkrecht sind (x' constant) in Parabeln geschnitten wird.

Setzt man $M_y = P.l$, $X = P$, so erhält man

$$f = \frac{P}{Eq\lambda^2}\left[\tfrac{1}{3}l^3 + \frac{l\,m^2[2m^2(1+\mu)+n^2]}{3m^2+n^2}\right].$$

Hier erkennt man leicht, was oben schon behauptet ist, dass das zweite Glied gegen das erste verschwindet, wenn die Querdimensionen m und n klein gegen l sind.

Für einen kreisförmigen Querschnitt erhalten wir:

$$f = \frac{P}{Eq\lambda^2}\left(\tfrac{1}{3}\, l^3 + \tfrac{7}{8}\, l\right).$$

Die in der vorigen Nummer noch unbestimmt gebliebenen Ausdrücke für die Torsion lassen sich nun auch vervollständigen.

Da $B' = \dfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\, xy$ ist, so erhält man

$$\int\left(x\frac{\partial B'}{\partial y} - y\frac{\partial B'}{\partial x}\right)dq = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\int(x^2 - y^2)\,dq.$$

$$= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\, q\,(\lambda^2 - \varkappa^2),$$

$$= \frac{(m^2 - n^2)^2}{4\,(m^2 + n^2)}\, q,$$

also

$$b_1' = -\frac{2\,(1 + \mu)\, M_z\, (m^2 + n^2)}{Eq\, m^2 n^2}$$

und dann

$$u = -\frac{2\,(1+\mu)\, M_z}{Eq}\,\frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2}\, zy, \qquad N_3 = 0,$$

$$v = \frac{2\,(1+\mu)\, M_z}{Eq}\,\frac{m^2 + n^2}{m^2 n^2}\, zx, \qquad T_{xz} = -\frac{2\, M_z\, y}{n^2 q},$$

$$w = -\frac{2\,(1+\mu)\, M_z}{Eq}\,\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\, xy, \qquad T_{yz} = \frac{2\, M_z\, x}{m^2 q}.$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt vereinfachen sich diese Formeln weiter, weil $m = n = r$ ist, in:

$$u = -\frac{4\,(1+\mu)\, M_z}{Eqr^2}\, zy, \qquad N_3 = 0,$$

$$v = \frac{4\,(1+\mu)\, M_z}{Eqr^2}\, zx, \qquad T_{xz} = -\frac{2\, M_z\, y}{r^2 q},$$

$$w = 0, \qquad T_{yz} = \frac{2\, M_z \,.\, x}{r^2 q}.$$

Der Drehungswinkel $\mathfrak{D} = b_1' z$ ist dann

$$\mathfrak{D} = -\frac{2\,(1+\mu)\, M_z\, (m^2 + n^2)}{Eq\, m^2 n^2}\, z,$$

folglich, wenn $M_z = Pa$ und $\mathfrak{D}_l$ der Drehungswinkel am Ende des Stabes ist,

$$\mathfrak{D}_l = -\frac{2\,(1+\mu)\, P.a\, (m^2 + n^2)}{Eq\, m^2 n^2}\, l,$$

oder mit Berücksichtigung von § 73, 3.:

$$Pa = Gq\,\frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2}\,\frac{\mathfrak{D}_l}{l}$$

und für den Kreis

$$Pa = G.\frac{qr^2}{2}.\frac{\mathfrak{D}_l}{l} = \tfrac{1}{2}\, G\pi r^4\, \frac{\mathfrak{D}_l}{l}.$$

Die Gleichung der verschobenen Querschnitte ist

$$z' = z + w = z - \frac{2(1+\mu) M_z}{Eq} \cdot \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} x'y'$$

und für den Kreis $z' = z$,

also bleibt für kreisförmigen Querschnitt derselbe eben. Im Allgemeinen wird der verschobene Querschnitt in eine Fläche zweiter Ordnung übergehen und zwar in ein hyperbolisches Paraboloid.

Für den Schub erhalten wir demnach:

$$w = \frac{X}{Eq\lambda^2}\left[-xy^2 - \frac{m^2[2m^2(1+\mu)+n^2]x - [m^2(4+\mu)+n^2(2-\mu)]\frac{x^3-3y^2x}{2}}{3m^2+n^2}\right],$$

$$T_{xz} = -\frac{X}{2q\lambda^2(1+\mu)} \frac{\mu x^2+(2-\mu)y^2}{2}$$

$$+ \frac{X}{Eq\lambda^2} \frac{m^2[2m^2(1+\mu)+n^2] - [m^2(4+\mu)+n^2(2-\mu)]\frac{x^2-y^2}{2}}{3m^2+n^2},$$

$$T_{yz} = -\frac{X}{2q\lambda^2(1+\mu)}(\mu+2)xy + \frac{X}{Eq\lambda^2} \cdot \frac{[m^2(4+\mu)+n^2(2-\mu)]yx}{3m^2+n^2}.$$

Die Gleichung des gekrümmten Querschnittes ist dann vom dritten Grade.

10. Rechteckförmiger Querschnitt.

Der Querschnitt sei ein Rechteck mit den Seiten 2b parallel der y Axe und 2c parallel der x Axe, dann ist in allen Punkten des Umfangs über

$$2b: \quad \cos p = \pm 1, \quad \sin p = 0 \quad x = \pm c.$$
$$2c: \quad \cos p = 0, \quad \sin p = \pm 1 \quad y = \pm b.$$

für 2b: $\frac{\partial B'}{\partial x} = -y$, für 2c: $\frac{\partial B'}{\partial y} = x$,

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} = \frac{\mu c^2 + (2-\mu)y^2}{2}, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial y} = (\mu+2)bx,$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} = (\mu+2)cy, \qquad \frac{\partial B_2}{\partial y} = \frac{\mu b^2 + (2-\mu)x^2}{2}.$$

Zur Bestimmung der α und β dient wiederum die Untersuchung über das Gerade und Ungerade der Functionen B in Bezug auf x und y. Wir können demnach setzen:

$$B' = 2\alpha_1' x + 2\beta_1' y + \beta_2 xy + 8\beta_4 x^3 y - 8\beta_4 xy^3,$$
$$B_1 = 2\alpha_1 x + 2\alpha_3 x^3 - 6\alpha_3 xy^2,$$
$$B_2 = 2\beta_1 y + 6\beta_3 x^2 y - 2\beta_3 y^3.$$

Die Differentiation mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen giebt dann:

für $x = \pm c$: $2\alpha_1' + \beta_2 x + 24\beta_4 c^2 y - 8\beta_4 y^3 = -y$,

$$2\alpha_1 + 6\alpha_3 c^2 - 6\alpha_3 y^2 = \frac{\mu c^2 + (2+\mu)y^2}{2},$$

$$12\beta_3 cy = (\mu+2)cy,$$

für $y = \pm b$: $2\beta_1' + \beta_2 x + 8\beta_4 x^3 - 24\beta_4 b^2 x = x$,
$$-12\alpha_3 bx = (\mu+2)bx,$$
$$2\beta_1 + 6\beta_3 x^2 - 6\beta_3 b^2 = \frac{\mu b^2 + (2-\mu)x^2}{2}.$$

Diesen Gleichungen kann nicht gleichzeitig genügt werden; denn setzt man nach der ersten $\beta_4 = 0$, so würde folgen $\beta_2 = -1$, aber gleichzeitig aus der vierten Gleichung $\beta_2 = +1$. Dieser Widerspruch würde nicht gehoben, wenn man bei der Entwickelung von $\Omega(xy)$ in 7. noch mehr Glieder nähme. Wir entfernen denselben, indem wir den Coefficienten von y^3 in der ersten Gleichung von dem von x^3 in der 4. Gleichung von β_4 verschieden gleich γ setzen. Das dann gewonnene Resultat ist demnach nach der allgemeinen Bedingungsgleichung $\frac{\partial^2\Omega(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega(x,y)}{\partial y^2} = 0$ zu prüfen. Nun finden wir

$$\alpha_1' = \beta_1' = \gamma = 0, \quad \alpha_1 = \frac{\mu+1}{2}c^2,$$
$$\alpha_3 = -\frac{\mu+2}{12}, \quad \beta_3 = \frac{\mu+2}{12},$$
$$\beta_1 = \frac{\mu+1}{2}b^2, \quad \beta_2 = -\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}, \quad \beta_3 = \frac{\mu+2}{12}, \quad \beta_4 = -\frac{1}{12(b^2+c^2)},$$

Man erhält also endlich:

$$B' = \frac{c^2-b^2}{b^2+c^2}xy - \tfrac{1}{3}\frac{x^3y}{(b^2+c^2)} + \tfrac{1}{3}\frac{y^3x}{b^2+c^2},$$
$$B_1 = c^2(1+\mu)x - \tfrac{1}{6}(\mu+2)x^3 + \tfrac{1}{2}(\mu+2)xy^2,$$
$$B_2 = b^2(1+\mu)y + \tfrac{1}{2}(\mu+2)x^2y - \tfrac{1}{6}(\mu+2)y^3,$$

wobei aber nach der obigen Bemerkung zu setzen ist

$$\frac{\partial B'}{\partial x} = \frac{c^2-b^2}{b^2+c^2}y - 2\frac{x^2y}{b^2+c^2} \text{ und}$$
$$\frac{\partial B'}{\partial x} = \frac{c^2-b^2}{b^2+c^2}x + 2\frac{y^2x}{b^2+c^2}.$$

Dass die obige Berechnung vorgenommen werden kann, ergiebt sich nun durch Ausführung der Differentiation.

Diese erhaltenen Werthe können, wie es in 9. geschehen ist, in den verschiedenen Fällen eingesetzt werden.

11. Maximalbelastung.

Die Gleichung § 64, 10., welche die Hauptspannungen giebt, reducirt sich für unsere Fälle, da $N_1 = N_2 = T_{xy} = 0$ ist, auf:

$$P^3 - N_3 P^2 - (T_{xz}^2 + T_{yz}^2)P = 0.$$

Daraus folgt, dass eine der Hauptspannungen verschwindet, wir also mit unserer Untersuchung auf § 64, 14. 3) zurückkommen.

Die Grössen der beiden anderen Hauptspannungen sind gegeben durch

$$P^2 - N_3 P - (T_{xz}^2 + T_{yz}^2) = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung geht hervor, dass die Wurzeln der-

selben also die Hauptspannungen entgegengesetzte Werthe haben; die eine ist demnach ein Druck, die andere ein Zug. Sie sind

$$P_1 = \frac{N_3}{2} + \sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2 + \frac{N_3^2}{4}},$$

$$P_2 = \frac{N_3}{2} - \sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2 + \frac{N_3^2}{4}}.$$

Je nachdem N_3 positiv oder negativ ist, also je nachdem der Körper in der Längsrichtung gezogen oder gedrückt wird, ist die positive oder negative Hauptspannung die grösste. Die Lage der Hauptspannung findet man nach § 64, 10., wenn man bedenkt, dass ist

$$- \frac{\partial \Theta}{\partial P} = 3 P^2 - 2 N_3 P - (T_{xz}^2 + T_{yz}^2),$$

$$= P^2 + [P^2 - N_3 P - (T_{xz}^2 + T_{yz}^2)] + P^2 - N_3 P,$$

$$= P^2 + T_{xz}^2 + T_{yz}^2,$$

$$\cos p_1 = T_{xz} : \sqrt{P_1^2 + T_{xz}^2 + T_{xz}^2},$$

$$\cos q_1 = T_{yz} : \sqrt{P_1^2 + T_{xz}^2 + T_{yz}^2},$$

$$\cos r_1 = P_1 : \sqrt{P_1^2 + T_{xz}^2 + T_{yz}^2}.$$

Ebenso findet man p_2, q_2, r_2.

Vereinfachungen treten ein, wenn nur eine Normalkraft vorhanden ist; dann ist $P^3 - N_3 P^2 = 0$ und selbstverständlich $P = N_3$.

Bei der Torsion ist $N_3 = 0$, mithin $P^2 = (T_{xz}^2 + T_{yz}^2)$, also werden wir dann auf den Fall § 64, 14. 4) kommen.

Erwähnenswerth ist, dass auch in dem allgemeinen Fall an bestimmten Punkten des Körpers $N_3 = 0$ ist, denn nach dem Werth von N_3 in (C.) ist $N_3 = 0$, wenn $0 = \alpha + a_1 x + e_2 y + z(b_1 x + b_2 y)$ ist. Diese Gleichung repräsentirt eine Fläche zweiten Grades und zwar ein hyperbolisches Paraboloid, denn jede Ebene parallel der xyEbene, also $z = \text{Const.}$ schneidet die Fläche in einer Geraden.

Da also die grösste Spannung in einem Punkte eintritt, für den die absoluten Grössen $\frac{N_3}{2}$ und $\sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2 + \frac{N_3^2}{4}}$ ihre grössten Werthe erlangen, so sind diese Grössen nun zu untersuchen. In den hier vorkommenden Spannungen ist aber nur in N_3 die Längendimension z enthalten, und zwar hat N_3 nach (C.) die Form $A + Bz$, also erreicht N_3 jedenfalls an dem Endquerschnitte sein Maximum. Wo aber in diesem Querschnitte der Punkt ist, für den die Spannung am grössten ist, hängt von allen Spannungen ab und damit von der Querschnittsform. Ist, wie bei der Torsion, $N_3 = 0$, so ist die Hauptspannung ein Max. für bestimmte x und y, aber beliebige z, es giebt also dann keinen gefährlichen Punkt, sondern eine gefährliche Faser. Dasselbe tritt ein, wenn $b_1 = b_2 = 0$ ist, denn dann ist ebenfalls N_3 unabhängig von z, dies ist aber nach 6. der Fall, wenn $X = Y = 0$ ist, also wenn die auf den letzten Querschnitt resultirende äussere Kraft senkrecht auf den Querschnitt wirkt.

1) Ist nur Z vorhanden, also giebt es nur Zug und Druck am Endquerschnitt, so ist N_3 constant. Man hat also keinen besonders gefährlichen Punkt.

2) Biegung. Auch hier ist nur N_3 besonders zu berücksichtigen, denn in den anderen Spannungen sind die Querdimensionen des Stabes enthalten, welche gegen die Länge verschwinden. Es ist aber nach 8.:

$$N_3 = \frac{x}{q\lambda^2}[X.z - M_y] \text{ oder } \frac{xP}{q\lambda^2}(l - z),$$

folglich erreicht N_3 sein Maximum bei $z = 0$ und $x = c$. Der vom Schwerpunkt am weitesten entfernte Punkt des Endquerschnittes ist also der gefährliche Punkt.

3) Torsion. Nach 8. ist hier, weil $N_3 = 0$, zu untersuchen $\sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2}$, das ist

$$\frac{E b_1'}{2(1+\mu)}\sqrt{\left(y + \frac{\partial B'}{\partial x}\right)^2 + \left(x - \frac{\partial B'}{\partial y}\right)^2}.$$

a) Der Querschnitt sei eine Ellipse, dann ist nach 9.:

$$\sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2} = \frac{2 M_z}{q}\sqrt{\frac{y^2}{n^4} + \frac{x^2}{m^4}},$$

also ist das Maximum zu suchen von

$$y^2 m^4 + x^2 n^4.$$

Da dieser Werth für zunehmende x und y grösser wird, so liegt unser Max. jedenfalls am Umfang. Nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipse ist $x = m \cos\varphi$, $y = n \sin\varphi$ (§ 67, 14. 6)), so dass unser Ausdruck sich umformt in $m^2 \sin^2\varphi + n^2 \cos^2\varphi$. Dieser aber wird zum Maximum, wenn $\cos\varphi \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi = 0$, also wenn $\varphi = 0$ und $\varphi = 90°$ ist, d. h. an den Enden der Axen. Die Einsetzung der Werthe giebt für $\varphi = \frac{0}{90}$, $x = \frac{m}{0}$, $y = \frac{0}{n}$, die ganze Spannung $\sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2}$, $\frac{2 M_z}{q}\frac{1:m}{1:n}$, da nun ist $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$, so findet die grösste Spannung am Ende der kleinen Axe statt.

Ist der Querschnitt ein Kreis, so ergiebt diese Rechnung, dass alle Punkte des Umfangs gleich gefährlich sind.

b) Ist der Querschnitt ein Rechteck, so ist der gefährliche Punkt jedenfalls am Umfang. Setzen wir die in 10. angegebenen Werthe von $\frac{\partial B'}{\partial x}$ und $\frac{\partial B'}{\partial y}$ ein, so ist der Punkt zu suchen, für den $\left(y + \frac{c^2 - b^2}{b^2 + c^2}y - 2\frac{x^2 y}{b^2 + c^2}\right)^2 + \left(x - \frac{c^2 - b^2}{b^2 + c^2}x - 2\frac{y^2 x}{b^2 + c^2}\right)^2$ zu einem Maximum wird. Statt dieses Ausdruckes bleibt nach einer einfachen Transformation die Formel:

$$y^2(c^2 - x^2)^2 + x^2(b^2 - y^2)^2.$$

Man findet dann, dass das für $y = b$ ein Max. ist, wenn $x = 0$,
- $x = c$ - - - - $y = 0$.

Es befinden sich also die gefährlichen Punkte in den Mitten der Seiten.

B. Die Querdimensionen des Stabes seien so gering, dass es nicht mehr erlaubt ist, die Verschiebung des Ganzen für klein zu halten, wenn auch die der Elemente in sich klein sind.

1. Verschiebungen und Spannungen des Längselementes eines dünnen Stabes.

Bei Lösung unserer Aufgabe ist vor Allem zu bedenken, dass, wenn auch die Veränderungen $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \chi, \psi$ in dem unendlich kleinen Parallelepipedum sehr klein bleiben, doch die Verschiebungen des ganzen Stabes, die aus der Addition der kleinen Verschiebungen entstehen, gross werden können. Dann dürfen also die im Früheren entwickelten Gleichungen nicht unbedingt angewendet werden, da dort Produkte und Quadrate von u, v, w vernachlässigt worden sind. Die vorhin aufgestellten Gleichungen bleiben nur anwendbar auf die Verschiebungen innerhalb der Elemente, in die man sich den ganzen Stab zerlegt denken kann. Diese inneren Verschiebungen eines kleinen Körpers sind nach Kirchhoff nur abhängig von den Kräften, welche auf seine Oberfläche wirken, nicht aber von denen, welche auf das Innere wirken, vorausgesetzt, dass die letzteren nicht gegen die ersteren ausserordentlich gross sind. Dies ist die Uebertragung der Vernachlässigung von § 64, 1.; denn auch hier ist das Körperelement unendlich klein gegen das Oberflächenelement und es unterscheiden sich die im obigen Satz enthaltenen Kräfte durch Factoren derselben Beschaffenheit. Hiermit ist auch zugleich die im Satz berührte Ausnahme begreiflich. Die äusseren Kräfte hängen ab, wenn wir von den Kräften auf die freie Oberfläche absehen, von den Spannungen, die von dem benachbarten Stück herrühren, und können somit auch durch die Kräfte auf das Innere des ganzen Körpers beeinflusst werden. Wir behandeln nun zunächst einen geradlinigen Stab, der überall gleichen Querschnitt hat, und denken uns denselben aus Längselementen zusammengesetzt. Diese Elementencylinder werden nach dem Obigen nur angegriffen von Kräften auf die ebenen Endquerschnitte, welche von den benachbarten Theilchen herrühren, während auf die krumme Cylinderoberfläche wie auf das Innere des Elementes keine Kräfte wirken. Die Aufgabe für das Element fällt nun ganz zusammen mit der des Problems Anhang I, 4., denn die dort angenommene Vertheilung der äusseren Kräfte ist hier erfüllt, da die Querschnitte sehr klein sind. Es gelten demnach für ein Längselement die Gleichungen in 4. In Bezug auf die Lage des Coordinatensystems, auf welches jedes Element bezogen wird, ist noch Folgendes zu bemerken. Der Anfangspunkt liege im Schwerpunkte des Querschnittes, durch den das verschobene Element mit dem Früheren zusammenhängt, die positive z Axe sei die Tangente der Curve, welche die Schwerpunktslinie des Elementes bildet. Da ferner der nächste Punkt der z Axe in dieser bleiben soll, so muss dafür u und v verschwinden, es ist mithin für $x = y = z = 0$ auch $u = v = w = 0$ und für $x = 0$, $y = 0$, $z = dz$ ist $u = v = 0$.

Berücksichtigen wir diese Bedingungen und bedenken, dass dz^2, dz^3... gegen dz verschwinden, so werden von den Constanten in 4., S. 74 verschwinden b_3' und b_3''. Die Lage der x Axe werde so bestimmt, dass sie die Curve in ihrem Anfangspunkt berührt, welche man erhält, indem man die eine gebogene Hauptaxe projicirt auf die zur z Axe senkrechte Ebene. Dann ist selbstverständlich die y Axe die Tangente an die Projection der gebogenen anderen Hauptaxe. Um zu finden, welche von den Constanten in 4., S. 74 ausser b_3' und b_3'' verschwinden, gehen wir vom Anfangspunkt zum benachbarten der x Axe, dann zum benachbarten der y Axe, also zu den Punkten $dx, 0, 0$ und $0, dy, 0$. Dann ist nach 4., S. 74.

$$u = -\mu(\alpha dx + \tfrac{1}{2} a_1 dx^2), \qquad v = -a_1' dx \text{ und}$$
$$u = a_1' dy, \qquad v = -\mu(\alpha dx + \tfrac{1}{2} a_2 dy^2).$$

Da hierin die Glieder mit dx^2 und dy^2 von selbst verschwinden sollen, so wird durch die festgesetzte Lage des Coordinatensystems bestimmt, dass $a_1' = 0$ ist.

Für die hier zu untersuchenden Werthe der u, v, w und der Spannungen bleiben also nach (C.) die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\mu(\alpha x + \tfrac{1}{2} a_1 [x^2 - y^2] + a_2 xy) - \mu z(\tfrac{1}{2} b_1 [x^2 - y^2] + b_2 xy) \\
&\quad + b_1' yz - \tfrac{1}{2} a_1 z^2 - \tfrac{1}{6} b_1 z^3, \\
v &= -\mu(\alpha y + a_1 xy + \tfrac{1}{2} a_2 [y^2 - x^2] - \mu z(b_1 xy + \tfrac{1}{2} b_2 [y^2 - x^2]) \\
&\quad - b_1' xz - \tfrac{1}{2} a_2 z^2 - \tfrac{1}{6} b_2 z^3, \\
w &= z(\alpha + a_1 x + a_2 y) - b_1 x [y^2 - \tfrac{1}{3} z^2] - b_2 y [x^2 - \tfrac{1}{3} z^2] + \Omega(x,y), \\
N_1 &= N_2 = T_{xy} = 0, \\
N_3 &= E[\alpha + a_1 x + a_2 y + z(b_1 x + b_2 y)], \\
T_{xz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left[b_1' y - b_1 \frac{\mu x^2 + (2-\mu) y^2}{2} - (\mu+2) b_2 xy + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right], \\
T_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\left[-b_1' x - b_2 \frac{\mu y^2 + (2-\mu) x^2}{2} - (\mu+2) b_1 xy + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right].
\end{aligned}\right\} \text{(E.)}$$

Diese Werthe gelten aber nur für kleine Werthe von x und y, da die Querdimensionen des Stabes klein sein sollen, und auch nur für kleine z, da es sich nur um ein Längselement handelt.

Betrachten wir einen Querschnitt, der in Bezug auf die Hauptaxen symmetrisch ist, und bezeichnen die auf den Endquerschnitt des Elementes wirkenden Kräfte mit X, Y, Z und die Momente mit M_x, M_y, M_z, welche Werthe für verschiedene Querschnitte im Allgemeinen verschieden sind, so ist nach 6.:

$$b_1 = \frac{X}{Eq\lambda^2}, \quad b_2 = \frac{Y}{Eq\varkappa^2}, \quad \alpha = \frac{Z}{Eq}, \quad a_1 = -\frac{M_y}{Eq\lambda^2}, \quad a_2 = \frac{M_x}{Eq\varkappa^2},$$
$$b_1' = -\frac{M_z}{E\vartheta^2 q}, \text{ wo } \vartheta^2 = \frac{1}{2(1+\mu)}\left[\varkappa^2 + \lambda^2 - \frac{1}{q}\int\left(x\frac{\partial B'}{\partial y} - y\frac{\partial B'}{\partial x}\right) dq\right].$$

Um die Dimensionen dieser Constanten zu beurtheilen, kommt es besonders auf deren Nenner an, da die Zähler im Allgemeinen von derselben Ordnung sind. Die Nenner von b_1, b_2, a_1, a_2 sind von derselben Ordnung,

der von α ist aber um zwei Dimensionen grösser, mithin ist α gegen b_1, b_2, a_1, a_2 sehr klein, wenn nicht Z sehr gross ist. Die Grösse ϑ^2 im Nenner von b_1' enthält zunächst $\varkappa^2$ und λ^2, aber ist ausserdem noch von B' abhängig. Diese Funktion ist zwei Bedingungen unterworfen. Für den ganzen Querschnitt

$$\frac{\partial^2 B'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B'}{\partial y^2} = 0$$

und an der Peripherie

$$\frac{\partial B'}{\partial x} \cos p + \frac{\partial B'}{\partial y} \sin p = x \sin p - y \cos p.$$

Setzen wir in diesen Gleichungen $x = \varepsilon x'$, $y = \varepsilon y'$, wo ε eine Zahl bedeutet, die von der Dimension x, y ist, während demnach x', y' endliche Grössen sind, so wird die Umfangsbedingung

$$\frac{\partial B'}{\varepsilon \partial x'} \cos p + \frac{\partial B'}{\varepsilon \partial y'} \sin p = \varepsilon\,(x' \sin p - y' \cos p).$$

Aus dieser und auch aus der ersten Gleichung für B' verschwindet aber ε, wenn man setzt $B' = \varepsilon^2 (B)'$, man darf daher $(B)'$ als überall endlich betrachten. Es ist demnach B' von der Ordnung ε^2, die Differentialquotienten auch, mithin ist ϑ^2 von derselben Ordnung wie λ^2 und $\varkappa^2$, also b_1' von derselben als b_1, b_2, a_1, a_2.

Setzen wir nun in die Ausdrücke der Verschiebungen u, v, w aus Gleichung (E) die eben gefundenen Werthe der Constanten ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
Equ &= [-\mu Z x] - \left\{ \mu z X \frac{(x^2 - y^2)}{2\lambda^2} + \mu z Y \frac{xy}{\varkappa^2} + \tfrac{1}{6} z X \frac{z^2}{\lambda^2} \right\} - \mu M_x \frac{xy}{\varkappa^2} \\
&\quad + M_y \frac{\mu (x^2 - y^2) + z^2}{2\lambda^2} + M_z \frac{yz}{\vartheta^2}, \\
Eqv &= [-\mu Z y] - \left\{ \mu z X \frac{xy}{\lambda^2} + \mu z Y \frac{y^2 - x^2}{2\varkappa^2} + \tfrac{1}{6} z Y \frac{z^2}{\varkappa^2} \right\} + \mu M_y \frac{xy}{\lambda^2} \\
&\quad + M_x \frac{\mu (x^2 - y^2) - z^2}{2\varkappa^2} + M_z \frac{xz}{\vartheta^2}, \\
Eqw &= [Z.z] + \left\{ \frac{z^2}{2} \left(\frac{xX}{\lambda^2} + \frac{yY}{\varkappa^2} \right) + \frac{B_1 X}{\lambda^2} + \frac{B_2 Y}{\varkappa^2} - X \frac{xy^2}{\lambda^2} - Y \frac{x^2 y}{\varkappa^2} \right\} \\
&\quad - M_y \frac{xz}{\lambda^2} + M_x \frac{yz}{\varkappa^2} - M_z \frac{B_1}{\vartheta^2}.
\end{aligned}\right\} \text{(F.)}$$

Wenn nun die Componente Z nicht vorwiegend gross ist, verschwinden die Grössen in [], und wenn die X, Y nicht vorwiegend gross sind, verschwinden die Grössen in { }, weil dann die in den Parenthesen enthaltenen Grössen gegen die Glieder, welche nur die Momente enthalten, als verschwindend klein zu betrachten sind.

2. Bedingungen für die Continuität des Körpers.

In 1. ist jedes Element des Stabes auf ein besonderes Coordinatensystem bezogen worden. Es soll nun allen diesen einzelnen Systemen ein im Raum festes zu Grunde gelegt werden und zwar das durch das erste

Element des Körpers gelegte System. Dann soll untersucht werden, ob die gefundenen Verschiebungen vereinbar sind mit der Bedingung, dass die einzelnen Elemente einen ganzen Stab bilden. Seien ξ, η, ζ die Coordinaten des jedesmaligen Anfangspunktes des Elementencoordinatensystems bezogen auf das feste System, $x'y'z'$ die Coordinaten eines Punktes, dessen Elementencoordinaten x, y, z sind, in Bezug auf das feste Raumsystem. Dann ist, wenn die Winkel der Coordinatenaxen gegen einander bezeichnet sind mit $\widehat{xx'}$, $\widehat{yx'}$, etc.:

$$\begin{aligned} x' &= \xi + x \cos \widehat{xx'} + y \cos \widehat{yx'} + z \cos \widehat{zx'}, \\ y' &= \eta + x \cos \widehat{xy'} + y \cos \widehat{yy'} + z \cos \widehat{zy'}, \\ z' &= \zeta + x \cos \widehat{xz'} + y \cos \widehat{yz'} + z \cos \widehat{zz'}. \end{aligned} \quad \text{(a.)}$$

Nach der Verschiebung geht x, y, z über in $x + u$, $y + v$, $z + w$, also sind die Coordinaten des verschobenen Punktes in Bezug auf das feste System.

$$\begin{aligned} x' &= \xi + (x + u) \cos \widehat{xx'} + (y + v) \cos \widehat{yx'} + (z + w) \cos \widehat{zx'}, \\ y' &= \eta + (x + u) \cos \widehat{xy'} + (y + v) \cos \widehat{yy'} + (z + w) \cos \widehat{zy'}, \\ z' &= \zeta + (x + u) \cos \widehat{xz'} + (y + v) \cos \widehat{yz'} + (z + w) \cos \widehat{zz'}. \end{aligned} \quad \text{(b.)}$$

Bezeichnen wir mit s die Länge des Stabes, so müssen ξ, η, ζ und auch $\cos \widehat{xx'}$, $\cos \widehat{xy'} \ldots$, die von einem Element zum anderen veränderlich sind, Functionen von s sein. Wir können nun auf zwei verschiedene Arten von einem Punkte des Stabes zum nächstfolgenden kommen, einmal nämlich, indem wir in den Coordinaten eines Punktes z in $z + dz$ verwandeln, dann auch, indem wir den Punkt auf das Raumcoordinatensystem beziehen und also z ungeändert lassen, aber von s zu $s + ds$ übergehen.

Je nach diesen beiden Arten des Fortgangs sind die Coordinaten des Punktes, welcher dem Punkte x', y', z' benachbart ist, entweder

$$x' + \frac{\partial x'}{\partial z} dz, \quad y' + \frac{\partial y'}{\partial z} dz, \quad z' + \frac{\partial z'}{\partial z} dz \text{ oder}$$
$$x' + \frac{\partial x'}{\partial s} ds, \quad y' + \frac{\partial y'}{\partial s} ds, \quad z' + \frac{\partial z'}{\partial s} ds,$$

wo dz und ds die Entfernung der betrachteten Punkte in ihrer natürlichen Lage ausdrücken, also $dz = ds$ ist.

Die Continuität des Stabes ist nun offenbar gewahrt, wenn die obigen beiden Fortschreitungsarten auf denselben Punkt führen. Es muss also sein

$$\frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial x'}{\partial s}, \quad \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial s}, \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial s}.$$

Die Ausführung der angedeuteten Differentiation giebt also die gesuchten Bedingungsgleichungen für die Continuität

$$\begin{aligned} &\cos \widehat{xx'} \frac{\partial u}{\partial z} + \cos \widehat{yx'} \frac{\partial v}{\partial z} + \cos \widehat{zx'} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{d\xi}{ds} + (x + u) \frac{d \cos \widehat{xx'}}{ds} \\ &+ \cos \widehat{xx'} \frac{\partial u}{\partial s} + (y + v) \frac{d \cos \widehat{yx'}}{ds} + \cos \widehat{yx'} \frac{\partial v}{\partial s} + (z + w) \frac{d \cos \widehat{zx'}}{ds} + \cos \widehat{zx'} \frac{\partial w}{\partial s}, \end{aligned} \quad \text{(c.)}$$

und zwei andere Gleichungen, die aus dieser hervorgehen, wenn wir vertauschen: x', ξ mit y', η und $z'\ \zeta$.

Diese Gleichungen schreiben sich einfacher, wenn wir folgende Bezeichnung einführen:

$$\cos \widehat{xx'} = \alpha_1,\quad \cos \widehat{yx'} = \alpha_2,\quad \cos \widehat{zx'} = \alpha,$$
$$\cos \widehat{xy'} = \beta_1,\quad \cos \widehat{yy'} = \beta_2,\quad \cos \widehat{zy'} = \beta,$$
$$\cos \widehat{xz'} = \gamma_1,\quad \cos \widehat{yz'} = \gamma_2,\quad \cos \widehat{zz'} = \gamma.$$

Die drei Gleichungen (c.) vereinfachen sich zunächst dadurch, dass die neun cos von einander abhängig sind, denn es gilt bekanntlich:

$$\left.\begin{array}{ll}
\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1, & \alpha_2\alpha+\beta_2\beta+\gamma_2\gamma=0,\\
\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1, & \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=0,\\
\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, & \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0.\\
\multicolumn{2}{l}{\text{Diese Gleichungen geben dann durch Differentiation:}}\\
\multicolumn{2}{l}{\alpha_1\frac{d\alpha_1}{ds}+\beta_1\frac{d\beta_1}{ds}+\gamma_1\frac{d\gamma_1}{ds}=0,}\\
\multicolumn{2}{l}{\alpha_2\frac{d\alpha_2}{ds}+\beta_2\frac{d\beta_2}{ds}+\gamma_2\frac{d\gamma_2}{ds}=0,}\\
\multicolumn{2}{l}{\alpha\frac{d\alpha}{ds}+\beta\frac{d\beta}{ds}+\gamma\frac{d\gamma}{ds}=0,}\\
\multicolumn{2}{l}{\alpha_2\frac{d\alpha}{ds}+\beta_2\frac{d\beta}{ds}+\gamma_2\frac{d\gamma}{ds}=-\left(\alpha\frac{d\alpha_2}{ds}+\beta\frac{d\beta_2}{ds}+\gamma\frac{d\gamma_2}{ds}\right)=r_1,}\\
\multicolumn{2}{l}{\alpha\frac{d\alpha_1}{ds}+\beta\frac{d\beta_1}{ds}+\gamma\frac{d\gamma_1}{ds}=-\left(\alpha_1\frac{d\alpha}{ds}+\beta_1\frac{d\beta}{ds}+\gamma_1\frac{d\gamma}{ds}\right)=r_2,}\\
\multicolumn{2}{l}{\alpha_1\frac{d\alpha_2}{ds}+\beta_1\frac{d\beta_2}{ds}+\gamma_1\frac{d\gamma_2}{ds}=-\left(\alpha_2\frac{d\alpha_1}{ds}+\beta_2\frac{d\beta_1}{ds}+\gamma_2\frac{d\gamma_1}{ds}\right)=r,}
\end{array}\right\}\quad (d.)$$

wo r_1, r_2, r als neue Bezeichnungen eingeführt sind.

Eine weitere Vereinfachung erhalten die Gleichungen (c.), wenn man mit σ die Verlängerung oder Verkürzung der Längeneinheit des Elementes bezeichnet, so dass also ds übergeht in $ds(1+\sigma)$. Die Projectionen des veränderten Elementes der Schwerpunktslinie auf die Raumcoordinaten sind $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ und die ursprüngliche Länge ds. Diese Länge ds ist geworden $ds(1+\sigma)$, mithin deren Projectionen auf die Raumcoordinaten:

$$ds(1+\sigma)\alpha,\quad ds(1+\sigma)\beta,\quad ds(1+\sigma)\gamma,$$

mithin ist unter Vernachlässigung der kleinen Grösse σ:

$$\frac{d\xi}{ds}=\alpha,\quad \frac{d\eta}{ds}=\beta,\quad \frac{d\zeta}{ds}=\gamma.$$

Die drei Gleichungen unter (c.) können wir nun so transformiren, dass wir $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$ allein erhalten. Wir erreichen dies zunächst für $\frac{\partial u}{\partial z}$, wenn wir dieselben respective multipliciren mit α, β, γ, dann addiren und berücksichtigen die Bedingungen (d.). Die entsprechenden Multiplicationen und Additionen geben dann die Werthe $\frac{\partial v}{\partial z}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Das Resultat dieser Vereinfachung ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial s} + r\,(y+v) - r_2(z+w),\\
\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial s} + r_1(z+w) - r\,(x+u), \qquad (e.)\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial s} + r_2(x+u) - r_1(y+v) + \sigma.
\end{aligned}$$

Da nun u, v, w ganze algebraische Functionen von z sind, so müssen sich die $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$ um eine Ordnung kleiner Grössen gegen die u, v, w erniedrigen. Dies wird aber im Allgemeinen von $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial s}$ nicht gelten, es können demnach in unseren Gleichungen die letzteren Grössen gegen die ersten wegfallen. Auch können die u, v, w gegen x, y, z vernachlässigt werden. Es bleiben demnach als Continuitätsbedingungen statt der Gleichungen (c.) folgende einfachere:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = ry - r_2 z, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = r_1 z - rx, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = r_2 x - r_1 y + \sigma. \qquad (f.)$$

Führt man hier die Werthe von u, v, w aus 1. (F.) ein, so ergiebt sich, wenn wir zunächst die in Parenthesen stehenden Werthe vernachlässigen, nach Gleichsetzung der Coefficienten:

$$r = -\frac{M_z}{E\vartheta^2 q}, \quad r_2 = -\frac{M_y}{Eq\lambda^2}, \quad r_1 = -\frac{M_x}{Eqx^2}. \qquad (G.)$$

Berücksichtigt man die Parenthesen [ ], so erhält man noch $\sigma = \frac{Z}{Eq}$, (G.) wo also Z gross gegen M_x, M_y und M_z ist.

Diese Ausdrücke zusammen gehalten mit denen von Anhang I, 6. sagen, da wir durch Vernachlässigung der Parenthesen { } annehmen, dass die X, Y, Z klein sind gegen die Momente, dass abgesehen vom Vorzeichen r_1 und r_2 die reciproken Werthe der Krümmungshalbmesser derjenigen Curven bedeuten, die wir aus der Projection der Schwerpunktslinie auf die durch die Axe des Elementes und je eine Hauptaxe des Querschnittes gelegte Ebene erhalten.

Um die Bedeutung von r zu finden, müssen wir zu Anh. I, 8. zurück. Es ist dort der Torsionswinkel eines Stabes von der Länge l ausgedrückt durch $b_1'l$. Wir haben hier ein Element von der Länge ds, mithin ist die Torsion des Elementes $b_1'ds$ d. i. r ds, also ist r der Torsionswinkel des Elementes ds.

Es muss noch untersucht werden, wie sich die Gleichungen gestalten, wenn die { } in (F.) nicht vernachlässigt werden dürfen. Sollen diese Glieder Berücksichtigung finden, so müssen wir die oben gemachte Voraussetzung aufgeben, dass $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial s}$ von derselben Ordnung bleiben als u, v, w und vielmehr annehmen, dass in diesen Differentialquotienten die Glieder

$\frac{dr_1}{ds}$, $\frac{dr_2}{ds}$ sehr gross werden gegen r_1 und r_2. Man erhält dann, indem man in den Gleichungen (e.) die betreffenden Glieder von $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ zurückbehält:

$$\frac{dr_2}{ds} = \frac{X}{Eq\lambda^2}, \quad \frac{dr_1}{ds} = \frac{Y}{Eq\lambda^2}.$$

Dies würde demnach heissen, wenn wir die oben angegebene Bedeutung von r_1 und r_2 bedenken und uns erinnern, dass nun die Werthe $\frac{X}{Eq\lambda^2}$ und $\frac{Y}{Eq\varkappa^2}$ verhältnissmässig gross sind, dass in der Nähe der Punkte, wo diese Vernachlässigung nicht erlaubt ist, sich einer der Krümmungshalbmesser sehr rasch ändert.

3. Gleichgewichtsgleichungen für den ganzen Stab und Bestimmung der Gestalt desselben.

Indem wir zunächst die äusseren Gleichgewichtsgleichungen eines Elementes suchen, haben wir die auf das Element wirkenden Kräfte zu berücksichtigen, welche aus den benachbarten Elementen entspringen, und die auf das Ganze wirkenden äusseren Kräfte. Damit finden wir dann zugleich die Gleichgewichtsgleichungen für den ganzen Stab.

Beziehen wir zunächst die Kräfte und Momente, die von den benachbarten Elementen wirken auf die Raumcoordinaten. Diese Zerlegung giebt die Componenten der Kräfte nach den Axen x', y', z':

$$X\alpha_1 + Y\alpha_2 + Z\alpha,$$
$$X\beta_1 + Y\beta_2 + Z\beta,$$
$$X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma.$$

Die Drehungsmomente um die Raumcoordinaten sind:

$$M_x\alpha_1 + M_y\alpha_2 + M_z\alpha,$$
$$M_x\beta_1 + M_y\beta_2 + M_z\beta,$$
$$M_x\gamma_1 + M_y\gamma_2 + M_z\gamma.$$

Wenn wir diese Kräfte und Momente mit dem negativen Zeichen auf die eine Endfläche des Elementes wirkend denken, so erhalten wir die auf das andere Ende wirkenden Kräfte, wenn wir in den obigen Ausdrücken von s zu s + ds übergehen und das Vorzeichen lassen.

Seien die von aussen wirkenden Componenten nach dem festen Coordinatensystem, welche auf das Element dx dy ds wirken, $P_{x'}ds$, $P_{y'}ds$, $P_{z'}ds$. Hierbei ist zu bedenken, dass die $P_{x'}$, $P_{y'}$, $P_{z'}$ sind die Integrale von den einzelnen Kräften auf jede Einheit des ganzen Querschnittes, so dass also, wenn $(P_{x'})$, $(P_{y'})$, $(P_{z'})$ die auf die Einheit wirkenden Kräfte bedeuten, ist

$$P_{x'} = \iint (P_{x'})\,dx\,dy, \quad P_{y'} = \iint (P_{y'})\,dx\,dy, \quad P_{z'} = \iint (P_{z'})\,dx\,dy.$$

Es sind somit die ersten drei Gleichgewichtsbedingungen nach Division mit ds:

$$\frac{d}{ds}(X\alpha_1 + Y\alpha_2 + Z\alpha) + P_{x'} = 0,$$
$$\frac{d}{ds}(X\beta_1 + Y\beta_2 + Z\beta) + P_{y'} = 0, \qquad \text{(H.)}$$
$$\frac{d}{ds}(X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma) + P_{z'} = 0.$$

Zur Aufstellung der drei Momentengleichungen bedenken wir, dass ausser den oben schon genannten Momenten noch welche aus den Kräften X und Y hervorgehen, die um unendlich kleine Grössen verschieden zu beiden Seiten des Elementes wirken. Z kann kein Moment geben, da diese Kraft bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung in der Axe liegt. Die hier erhaltenen Momente sind X ds, Y ds. Werden diese wieder transformirt für die Coordinaten $x'y'z'$ und zur Beurtheilung der Vorzeichen berücksichtigt, dass die Kräftepaare positiv sein sollen, wenn sie von der Axe gesehen drehen wie der Uhrzeiger, so ergeben sich folgende Momente:

um die x' Axe $X ds \alpha_2$, $-Y ds \alpha_1$,
- - y' - $X ds \beta_2$, $-Y ds \beta_1$,
- - z' - $X ds \gamma_2$, $-Y ds \gamma_1$.

Die Momente dieser sämmtlichen Kräfte sind demnach:

$$\left[\frac{d}{ds}(M_x\alpha_1 + M_y\alpha_2 + M_z\alpha) + X\alpha_2 - Y\alpha_1\right] ds,$$
$$\left[\frac{d}{ds}(M_x\beta_1 + M_y\beta_2 + M_z\beta) + X\beta_2 - Y\beta_1\right] ds, \qquad \text{(I.)}$$
$$\left[\frac{d}{ds}(M_x\gamma_1 + M_y\gamma_2 + M_z\gamma) + X\gamma_2 - Y\gamma_1\right] ds.$$

Zu diesen kommen noch Kräftepaare von den von aussen wirkenden Kräften, d. h. die Momente der Kräfte $P_{x'}$, $P_{y'}$, $P_{z'}$ bezogen auf die den festen Axen durch ξ, η, ζ parallel gezogenen Drehaxen. Die Angriffspunkte dieser Kräfte, soweit sie auf jenes Element wirken, liegen im Querschnitt, folglich ist für dieselben $z = 0$. Die gedachten Drehungsmomente sind also:

$$ds\iint[(P_{z'})(y'-\eta) - (P_{y'})(z'-\zeta)]\,dx\,dy,$$
$$ds\iint[(P_{y'})(z'-\zeta) - (P_{z'})(x'-\xi)]\,dx\,dy,$$
$$ds\iint[(P_{x'})(x'-\xi) - (P_{x'})(y'-\eta)]\,dx\,dy,$$

wo die Integrale über den ganzen Querschnitt auszudehnen sind. Diese Momente transformiren sich nach 2. (b.) in:

$$ds\iint[(P_{z'})(\beta_1 x + \beta_2 y) - (P_{y'})(\gamma_1 x + \gamma_2 y)]\,dx\,dy,$$
$$ds\iint[(P_{x'})(\gamma_1 x + \gamma_2 y) - (P_{z'})(\alpha_1 x + \alpha_2 y)]\,dx\,dy,$$
$$ds\iint[(P_{y'})(\alpha_1 x + \alpha_2 y) - (P_{x'})(\beta_1 x + \beta_2 y)]\,dx\,dy.$$

Schreiben wir endlich abgekürzt:

$$\iint(P_{x'})x\,dx\,dy = M_1, \qquad \iint(P_{x'})y\,dx\,dy = M_2,$$
$$\iint(P_{y'})x\,dx\,dy = M_1', \qquad \iint(P_{y'})y\,dx\,dy = M_2',$$
$$\iint(P_{z'})x\,dx\,dy = M_1'', \qquad \iint(P_{z'})y\,dx\,dy = M_2'',$$

so erhalten diese Momente folgende einfache Form:

$$\begin{aligned}&ds\,(M_1''\beta_1 + M_2''\beta_2 - M_1'\gamma_1 - M_2'\gamma_2),\\ &ds\,(M_1\ \gamma_1 + M_2\ \gamma_2 - M_1''\alpha_1 - M_2''\alpha_2),\\ &ds\,(M_1'\alpha_1 + M_2'\alpha_2 - M_1\ \beta_1 - M_2\ \beta_2).\end{aligned} \qquad (I_2)$$

Wenn dann die drei Momente (I_1) addirt werden zu den drei Momenten (I_2), so erhalten wir, wenn diese Summen = 0 gesetzt werden, zu den (H.) die drei anderen Gleichgewichtsgleichungen, die mit (I) bezeichnet werden mögen.

4. Vereinfachung der Gleichungen für specielle Annahmen der Vertheilung der äusseren Kräfte.

1) Nur das Ende des Stabes ist durch Kräfte und Kräftepaare angegriffen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn wir $P_{x'}, P_{y'}, P_{z'} = 0$ setzen. Dann aber lassen sich die Gleichungen (H) integriren und man erhält, wenn A, B, C Constanten bezeichnen,

$$\begin{aligned}X\alpha_1 + Y\alpha_2 + Z\alpha &= A,\\ X\beta_1 + Y\beta_2 + Z\beta &= B,\\ X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma &= C.\end{aligned}$$

Nach 3. bedeuten die linken Seiten die Componenten der Kräfte auf einen Querschnitt parallel den festen Coordinaten. Diese Gleichungen sagen also, dass die Resultirende, welche in den einzelnen Querschnitten als Zugkraft auftritt, überall dieselbe Grösse und Richtung hat, wie diese Querschnitte auch in dem gebogenen Stab gerichtet sein mögen. Eine einfache Transformation giebt die Grösse dieser Zugkräfte in Richtung der Elementencoordinaten, also in Richtung der Hauptaxen des Querschnittes und in Richtung der Länge des Elementes.

$$\begin{aligned}X &= A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1,\\ Y &= A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2,\\ Z &= A\alpha\ + B\beta\ + C\gamma.\end{aligned}$$

Diese Werthe müssen dann in die Momentengleichungen, die sich jetzt auf (I_1) = 0 reduciren, eingesetzt werden. Bevor dies geschieht, können dieselben erst noch vereinfacht werden. Man führe die angedeutete Differentiation aus, multiplicire dann die Gleichungen respective mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, dann mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, dann mit α, β, γ_1 und addire die so erhaltenen Produkte, so erhält man:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial M_x}{\partial s} + M_y r - M_z r_2 - Y = 0,\\ &\frac{\partial M_y}{\partial s} + M_z r_1 - M_x r + X = 0,\\ &\frac{\partial M_z}{\partial s} + M_x r_2 - M_y r_1 \qquad = 0.\end{aligned}$$

Durch Einführung der Werthe M aus 2. (G.) und der eben gefundenen X und Y in diese Gleichungen erhält man dann:

$$\varkappa^2 \frac{dr_1}{ds} + (\lambda^2 - \vartheta^2)\, r_2 r + \frac{1}{Eq}(A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2) = 0,$$

$$\lambda^2 \frac{dr_2}{ds} + (\vartheta^2 - \varkappa^2)\, r r_1 - \frac{1}{Eq}(A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1) = 0,$$

$$\vartheta^2 \frac{dr}{ds} + (\varkappa^2 - \lambda^2)\, r_1 r_2 = 0,$$

wo nach 1. die $\varkappa^2$, γ^2, ϑ^2 kleine Grössen der zweiten Ordnung sind. Diese letzte Bemerkung giebt einen Aufschluss über die Componenten nach den Hauptaxen des Querschnittes,

$$A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2 \quad \text{und} \quad A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1.$$

Diese Grössen müssen nämlich auch klein der zweiten Ordnung sein. Also sind 1), während A, B, C mässig gross bleiben, die cos sehr kleine Werthe, d. h. es müssen die Querschnitte nahezu senkrecht auf der am Ende wirkenden Kraft bleiben, der Stab ist demnach nahezu gerade und zwar parallel dieser Kraft. Wenn aber das Letztere nicht wegen vorhandener äusserer Bedingungen an einigen Punkten erfüllt ist, so müssen an diesen Punkten auch die r sehr gross sein, d. h. es muss dann Punkte geben, an denen nach der Bedeutung von r die Krümmung sehr gross ist. Wenn 2) aber die A, B, C klein sind, dann ist den Gleichungen ohne Ausnahmepunkte genügt. Sind 3) endlich die Kräfte A, B, C = 0, d. h. fehlen die Zugkräfte am Ende des Stabes und wirken nur Momente, so reduciren sich diese Gleichungen und die X, Y, Z verschwinden. Die zu erfüllenden Gleichungen sind dann:

$$\varkappa_2 \frac{dr_1}{ds} + (\lambda^2 - \vartheta^2)\, r_2 r = 0, \qquad \text{oder} \qquad ds = \frac{\varkappa^2\, dr_1}{(\vartheta^2 - \lambda^2)\, r r_2},$$

$$\lambda^2 \frac{dr_2}{ds} + (\vartheta^2 - \varkappa^2)\, r r_1 = 0, \quad \text{(K.)} \qquad ds = \frac{\lambda^2\, dr_2}{(\lambda^2 - \vartheta^2)\, r r_1}, \quad \text{(K')}$$

$$\vartheta^2 \frac{dr}{ds} + (\varkappa^2 - \lambda^2)\, r_1 r_2 = 0, \qquad ds = \frac{\vartheta^2\, dr}{(\lambda^2 - \varkappa^2)\, r_1 r_2}.$$

Es sollen nun zunächst unter a) die Werthe der verschiedenen r gefunden werden, dann unter b) die Winkel der Elementencoordinaten gegen die Raumcoordinaten.

a) Die Bedingungsgleichungen verwandeln sich in integrirbare Gleichungen, wenn sie erstens respective mit r_1, r_2, r multiplicirt, dann addirt werden, zweitens mit $\varkappa^2 r_1$, $\lambda^2 r_2$, $\vartheta^2 r$ multiplicirt und dann addirt werden, nämlich in

$$\varkappa^2 r_1 \frac{dr_1}{ds} + \lambda^2 r_2 \frac{dr_2}{ds} + \vartheta^2 r \frac{dr}{ds} = 0,$$

$$\varkappa^4 r_1 \frac{dr_1}{ds} + \varkappa^4 r_2 \frac{dr_2}{ds} + \vartheta^4 r \frac{dr}{ds} = 0.$$

Deren Integrale sind, wenn mit h^2 und m^2 Constante bezeichnet werden,

$$\begin{aligned} \varkappa^2 r_1^2 + \lambda^2 r_2^2 + \vartheta^2 r^2 &= h^2, \\ \varkappa^4 r_1^2 + \gamma^4 r_2^2 + \vartheta^4 r^2 &= m^2. \end{aligned} \qquad \text{(L.)}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man nun zwei der r durch das dritte ausdrücken. Thut man diess und setzt den betreffenden Werth in eine der Gleichungen (K'), so erhält man zunächst durch Integration s ausgedrückt durch das beibehaltene r und umgekehrt, dann wiederum durch (L.) die anderen Werthe r.

b) Zur Bestimmung der Winkel haben wir zunächst die sämmtlichen Gleichungen (d). Es gelten also unter anderen die Gleichungen:

$$\alpha\frac{d\alpha}{ds}+\beta\frac{d\beta}{ds}+\gamma\frac{d\gamma}{ds}=0,$$
$$\alpha_1\frac{d\alpha}{ds}+\beta_1\frac{d\beta}{ds}+\gamma_1\frac{d\gamma}{ds}=-r_2,$$
$$\alpha_2\frac{d\alpha}{ds}+\beta_2\frac{d\beta}{ds}+\gamma_2\frac{d\gamma}{ds}=r_1.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit α, α_1, α_2 oder β, β_1, β_2 oder γ, γ_1, γ_2 und addirt, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{ds}&=r_1\alpha_2-r_2\alpha_1,\\ \frac{d\beta}{ds}&=r_1\beta_2-r_2\beta_1,\\ \frac{d\gamma}{ds}&=r_1\gamma_2-r_2\gamma_1.\end{aligned}\qquad\text{(M.)}$$

Durch Combination anderer drei Gleichungen aus (d) erhalten wir ähnliche Resultate, in denen auch die Winkel der Elementencoordinaten mit den Raumcoordinaten getrennt sind, nämlich

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{ds}&=r_2\alpha-r\alpha_2, & \frac{d\alpha_2}{ds}&=r\alpha_1-r_1\alpha,\\ \frac{d\beta_1}{ds}&=r_2\beta-r\beta_2, & \frac{d\beta_2}{ds}&=r\beta_1-r_1\beta,\\ \frac{d\gamma_1}{ds}&=r_2\gamma-r\gamma_2, & \frac{d\gamma_2}{ds}&=r\gamma_1-r_1\gamma.\end{aligned}\qquad\text{(N.)}$$

Den dritten Gleichungen dieser Systeme ist genügt durch

$$\gamma_1=\frac{\varkappa^2 r_1}{m},\qquad \gamma_2=\frac{\lambda^2 r_2}{m},\qquad \gamma=\frac{\vartheta^2 r}{m}.$$

Diese Werthe genügen auch wegen (L.) der Bedingung $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma^2=1$. Es ist aber hier wegen des m eine Richtung der z'Axe vorgeschrieben.

Mit diesen Werthen γ können dann mit Hülfe der bekannten Winkelgleichungen die anderen berechnet werden, wie es unten für den speciellen Fall $\varkappa=\lambda$ ausgeführt wird.

Da nun bekannt sind die r nach a) als Functionen von s, ferner die α, α_1, α_2 ... etc., so kann durch Integration gefunden werden ξ, η, ζ, da nach 2. $\frac{d\xi}{ds}=\alpha$, $\frac{d\eta}{ds}=\beta$, $\frac{d\zeta}{ds}=\gamma$ ist, und damit also die Gleichung der gekrümmten Axe des Stabes.

Diese hier angedeuteten Rechnungen vereinfachen sich wesentlich, wenn wir einen Stab annehmen, dessen Hauptträgheitsradien $\varkappa$ und λ einander gleich ($=\varkappa$) sind. Die Gleichungen zur Bestimmung der r werden:

$$\frac{dr_1}{ds}=\frac{\vartheta^2-\varkappa^2}{\varkappa^2}r_2 r,\quad \frac{dr_2}{ds}=\frac{\varkappa^2-\vartheta^2}{\varkappa^2}r r_1,\quad \frac{dr}{ds}=0.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass r, die Torsion, in allen Elementen constant ist und die Integration der anderen giebt, wenn $\varepsilon=\frac{\vartheta^2-\varkappa^2}{\varkappa^2}r$ gesetzt ist, wo ε also auch constant ist,

$$r_1=a\sin\varepsilon s+b\cos\varepsilon s,$$
$$r_2=a\cos\varepsilon s-b\sin\varepsilon s,$$

wo a und b die zur Allgemeinheit der Integrale nöthigen willkürlichen Constanten bedeuten. Daraus findet man nach (L.):

$$h^2=\varkappa^2(a^2+b^2)+\vartheta^2r^2,$$
$$m^2=\varkappa^4(a^2+b^2)+\vartheta^4r^2,$$

mithin

$$\gamma_1=\varkappa^2\frac{a\sin\varepsilon s+b\cos\varepsilon s}{m},$$
$$\gamma_2=\varkappa^2\frac{a\cos\varepsilon s-b\sin\varepsilon s}{m},$$
$$\gamma=\frac{\vartheta^2r}{m}.$$

Führt man nun ein:

$$\operatorname{tg}w=\frac{\beta}{\alpha},\quad \operatorname{tg}w_1=\frac{\beta_1}{\alpha_1},\quad \operatorname{tg}w_2=\frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

Daraus berechnet man:

$$dw=\frac{\alpha\,d\beta-\beta\,d\alpha}{\alpha^2+\beta^2},\quad dw_1=\frac{\alpha_1d\beta_1-\beta_1d\alpha_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2},\quad dw_2=\frac{\alpha_2d\beta_2-\beta_2d\alpha_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}.$$

Benutzt man dann die Gleichungen (M) und (N), um die $d\beta$ und $d\alpha$ zu entfernen und die Gleichungen für die cos der Winkel zwischen den Coordinatenaxen:

$$\alpha=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1,\quad \alpha_1=\beta_2\gamma-\beta\gamma_2,\quad \alpha_2=\beta\gamma_1-\beta_1\gamma,$$
$$\beta=\gamma_2\alpha_1-\gamma_1\alpha_2,\quad \beta_1=\gamma_2\alpha-\gamma\alpha_2,\quad \beta_2=\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha,$$
$$\gamma=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,\quad \gamma_1=\alpha_2\beta-\alpha\beta_2,\quad \gamma_2=\alpha\beta_1-\alpha_1\beta,$$

so erhält man

$$dw=-\frac{r_1\gamma_1+r_2\gamma_2}{1-\gamma^2}ds,\quad dw_1=-\frac{r_2\gamma_2+r\gamma}{1-\gamma^2}ds,\quad dw_2=-\frac{r\gamma+r_1\gamma_1}{1-\gamma^2}ds.$$

Diese Grössen geben, wenn die bekannten Werthe von γ_1, γ_2, γ eingesetzt werden, durch Integration die w, w_1, w_2. Wenn die bei dieser Integration eintretende Constante mit c bezeichnet wird, so erhält man endlich:

$$\alpha=\frac{\varkappa^2\sqrt{a^2+b^2}}{m}\cos\left(c-\frac{m}{\alpha^2}s\right),$$
$$\beta=\frac{\varkappa^2\sqrt{a^2+b^2}}{m}\sin\left(c-\frac{m}{\alpha^2}s\right),$$
$$\gamma=\frac{\vartheta^2r}{m},$$

und dann durch Integration

$$\xi = \xi_0 - \frac{\varkappa^4 \sqrt{a^2+b^2}}{m} \sin\left(c - \frac{m}{\varkappa^2} s\right),$$

$$\eta = \eta_0 - \frac{\varkappa^4 \sqrt{a^2+b^2}}{m} \cos\left(c - \frac{m}{\varkappa^2} s\right),$$

$$\zeta = \zeta_0 - \frac{\vartheta^2 r s}{m}.$$

Dies ist nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichung einer Schraubenlinie, deren Axe die z'Axe ist.

2) Biegung eines Stabes in einer Ebene, welche eine Hauptaxe eines Querschnittes enthält. Am Ende des Stabes wirke nur eine Zugkraft.

Wenn die Richtung der biegenden Kraft parallel der z'Axe ist und die Biegung in der $x'z'$Ebene stattfindet, so ist $y' \parallel y$, mithin

$$\alpha_2 = \gamma_2 = \beta_1 = \beta = 0, \quad \beta_2 = 1,$$

und wenn $\alpha_1 = \cos\varphi$ ist, so ist

$$\alpha = \sin\varphi, \quad \gamma_1 = -\sin\varphi, \quad \gamma = \cos\varphi,$$

also nach (d.) $r = r_1 = 0, \ r_2 = -\frac{d\varphi}{ds}$.

Da ferner $A = B = 0$ ist, so ist

$$X = -C\sin\varphi, \quad Z = C\cos\varphi.$$

Selbstverständlich giebt es auch nur ein Drehungsmoment und man findet aus (G.) $M_y = -Eq\lambda^2 r_2 = Eq\lambda^2 \frac{d\varphi}{ds}$ und die Momentengleichungen sind $\frac{dM_y}{ds} + X = 0$, d. i. $Eq\lambda^2 \frac{d^2\varphi}{ds^2} = C\sin\varphi$ als Gleichung für die Krümmung des Stabes, deren Integration φ giebt und dann ξ und ζ.

5. Kleine Verschiebungen.

Die Gleichgewichtsgleichungen vereinfachen sich, wenn wir nur kleine Verschiebungen betrachten; denn es sind dann die Coordinatensysteme x, y, z und x', y', z' nur wenig von einander verschieden und in Folge dessen annäherungsweise $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma = 1$ und alle anderen cos verschwinden nahezu, und die zweite Gruppe der Gleichungen (d.) giebt: $\beta + \gamma_2 = 0$, $\gamma_1 + \alpha = 0$, $\alpha_2 + \beta_1 = 0$. Schreiben wir dann nach 2., wenn mit ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungshalbmesser und mit ϱ die Torsion bezeichnet werden, $r_1 = \frac{1}{\varrho_1}$, $r_2 = \frac{1}{\varrho_2}$, $r = \frac{1}{\varrho}$, so werden die Gleichgewichtsgleichungen (H.) und die Momentengleichungen (I.):

$$\frac{dX}{ds} = -P_{x'}, \quad \frac{dY}{ds} = -P_{y'}, \quad \frac{dZ}{ds} = -P_{z'},$$

$$Eq\varkappa^2 \frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds} + Y = M_2'', \quad Eq\lambda^2 \frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds} + X = M_1'', \quad Eq\vartheta^2 \frac{d\frac{1}{\varrho}}{ds} = M_1' - M_2,$$

wo nun in X, Y, Z die verschobenen Coordinaten statt der ursprünglichen eingesetzt werden können, so dass diese Grössen nur noch von s abhängen.

Diese Gleichungen geben integerirt, wenn l die Länge des Stabes ist und durch die Index l bezeichnet wird, dass sich die betreffende Kraft auf dem Endquerschnitt bezieht,

$$X = P_{x'l} + \int_s^l P_{x'} \, ds,$$

$$Y = P_{y'l} + \int_s^l P_{y'} \, ds,$$

$$Z = P_{z'l} + \int_s^l P_{z'} \, ds,$$

$$Eq\varkappa^2 \frac{d\frac{1}{\varrho_1}}{ds} + P_{x'l} + \int_s^l P_{y'} \, ds = + M_2'', \qquad (O.)$$

$$Eq\lambda^2 \frac{d\frac{1}{\varrho_2}}{ds} - P_{x'l} + \int_s^l P_{x'} \, ds = - M_1'',$$

$$Eq\vartheta^2 \frac{d\frac{1}{\varrho}}{ds} = M_1' - M_2.$$

Statt der Grössen ϱ können wir für unsere Annahme kleiner Verschiebungen die u, v und die Torsion φ einführen.

Nach 2. ist näherungsweise

$$\alpha = \frac{d\xi}{ds}, \quad \beta = \frac{d\eta}{ds}.$$

Dann kann man näherungsweise für s setzen z und statt ξ und η die Verschiebungen eines Punktes der Schwerpunktslinie u und v und statt ζ dem entsprechend z + w. Also

$$\alpha = -\gamma_1 = \frac{du}{dz},$$

$$\beta = -\gamma_2 = \frac{dv}{dz}.$$

Wenn ferner $\beta_1 = -\alpha_2$ mit φ bezeichnet wird, so erhalten wir aus (d):

$$r_1 = \frac{1}{\varrho^1} = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d^2v}{dz^2},$$

$$r_2 = \frac{1}{\varrho^2} = \frac{d\gamma_1}{ds} = -\frac{d^2u}{dz^2},$$

$$r = \frac{1}{\varrho} = \frac{d\alpha_2}{ds} = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Es bedeutet demnach φ den Winkel, um den die Drehung eines Querschnittes aus seiner ursprünglichen Lage stattfindet. Diese Gleichungen stimmen überein mit § 67.

Die einfachen Ausdrücke der Krümmungshalbmesser sagen aber, dass

bei kleinen Verschiebungen die Krümmungen der Elemente nicht bezogen zu werden brauchen auf besondere Elementencoordinaten, sondern auf das feste System, dessen xy Axen mit den Hauptaxen des Querschnittes und dessen z Axe mit der Schwerpunktsaxe zusammenfällt.

Die Gleichungen (O.) enthalten die Biegung und Torsion getrennt. Es sollen nun zuerst unter a) die Biegung, dann unter b) die Torsion behandelt werden:

a) Die Einführung der Krümmungshalbmesser giebt, wenn nach s oder z differenzirt worden ist,

$$\begin{aligned} Eq\varkappa^2 \frac{d^4v}{dz^4} &= P_{y'} + \frac{dM_2''}{dz}, \\ Eq\lambda^2 \frac{d^4u}{dz^4} &= P_{x'} + \frac{dM_1''}{dz}, \end{aligned} \qquad (P.)$$

nebst den für $z = s = l$ zu erfüllenden Grenzbedingungen

$$Eq\varkappa^2 \left(\frac{d^3v}{dz^3}\right) = -P_{x'l} + (M_2'')_l,$$

$$Eq\lambda^2 \left(\frac{d^3u}{dz^3}\right) = -P_{x'l} + (M_1'')_l.$$

Dazu kommen noch die Grenzbedingungen aus 2., wenn mit M_{yl}, M_{xl} die Momente am Ende des Querschnittes bezeichnet werden,

$$Eq\varkappa^2 \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right) = -M_{yl},$$

$$Eq\lambda^2 \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right) = M_{xl}.$$

Es kann endlich noch der Fall eintreten, dass die die Längsänderungen hervorbringenden Kräfte so gross sind, dass das Produkt derselben in einen kleinen cosWerth doch nicht vernachlässigt werden darf, so dass noch beibehalten werden müssen $Z\alpha$, $Z\beta$. Dann werden die Gleichungen

$$X + Z\alpha = A + \int_s^l P_{x'}\, ds,$$

$$Y + Z\beta = B + \int_s^l P_{y'}\, ds,$$

$$Z \qquad = C + \int_s^l P_{z'}\, ds,$$

wo A, B, C die auf das Ende wirkenden Componenten bedeuten. Da hier C sehr gross ist, so können wir überall statt Z setzen C, ferner ist

$$\alpha = \frac{du}{dz}, \quad \beta = \frac{dv}{dz}.$$

Es kommen mithin statt (P.) folgende Gleichungen:

$$Eq\varkappa^2 \frac{d^4v}{dz^4} = C\frac{d^2v}{dz^2} + P_{y'} + \frac{dM_2''}{dz},$$

$$Eq\lambda^2 \frac{d^4u}{dz^4} = C\frac{d^2u}{dz^4} + P_{x'} + \frac{dM_1''}{dz}$$

und am Ende $z = l$

$$Eq\varkappa^2 \frac{d^3v}{dz^3} = -B + C\left(\frac{dv}{dz}\right) + M_2''_l,$$

$$Eq\lambda^2 \frac{d^3u}{dz^3} = -A + C\left(\frac{du}{dz}\right) + M_1''_l.$$

Die hierbei stattfindende Längsänderung σ berechnet man nach 2.: $\sigma = \frac{Z}{Eq}$. Da nun $\sigma = \frac{dw}{dz}$ ist, so ist $Z = Eq\frac{dw}{dz}$. Dies oben eingesetzt giebt

$$Eq\frac{dw}{dz} = C + \int_s^l P_z' ds \quad \text{oder} \quad Eq\frac{d^2w}{dz^2} = -P_z'$$

nebst der Grenzbedingung für $z = l$

$$Eq\left(\frac{dw}{dz}\right) = C.$$

b) Die Einführung des für den Torsionswinkel gefundenen Ausdrucks giebt:

$$Eq\vartheta^2 \frac{d^2\varphi}{ds} = M_1' - M_2$$

mit der Grenzbedingung für $z = l$

$$Eq\vartheta^2 \frac{d\varphi}{dz} = M'_{2l}.$$

II. Anwendung der allgemeinen Formeln der Elasticität auf plattenförmige Körper.

A. Die Dicke der Platte ist noch so gross, dass, wenn die Verschiebungen in den Elementen klein sind, die des Ganzen klein bleiben.

1. Aufstellung des Problems und der zu erfüllenden Gleichungen.

Die Untersuchung plattenförmiger Körper kann wie die der stabförmigen Körper nicht allgemein vorgenommen werden, d. h. es ist zur Zeit unmöglich, folgendes allgemeine Problem zu lösen: Es sollen bestimmt werden die inneren Spannungen und Verschiebungen einer Platte, wenn dieselbe gegebenen Kräften unterworfen ist. Wir gehen deshalb auch für diesen Fall den halbumgekehrten Weg, wie er von Saint-Venant für stabförmige Körper angebahnt ist. Wir stellen uns demnach folgendes Problem: Welches sind die elastischen Zustände eines cylindrischen Körpers mit vorwaltenden Querdimensionen, bei dem es keine Spannung giebt, zu der auf der Platte senkrechten Richtung, und von welcher Art sind die Kräfte, welche auf die Oberfläche wirken, um diesen Zustand hervorzubringen? Von jeder Kraft auf die Masse, also auch der Schwere wird hier wie oben abgesehen. Die im Folgenden dargestellte Lösung dieses Problemes ist so, wie sie von Clebsch gegeben ist. Wir nehmen eine cylindrische Platte, deren Dicke nicht sehr klein ist, und bedenken, dass der eben genannte

Umstand eintreten kann, wenn die von aussen wirkenden Kräfte nur die Cylinderfläche angreifen.

Die Platte werde auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen zAxe senkrecht zu derselben ist und dessen xyEbene die Platte in zwei congruente Hälften theilt. Die Normale der beiden ebenen Grenzflächen der Platte ist also die zAxe selbst, daher ist an diesem Theil der Oberfläche $\cos p = \cos q = 0$. Ferner muss, da wir annehmen, dass es im ganzen Körper keine Spannung giebt, die senkrecht zur Platte ist, in der ganzen Platte sein $T_{xz} = 0$, $T_{yz} = 0$, $N_3 = 0$. Diese Gleichungen aber können nur dann erfüllt sein, wenn die Componenten der auf die Cylinderfläche wirkenden Kräfte nach der zAxe verschwinden.

Da die Spannungen T_{xz}, T_{yz}, N_3 gleich Null sind, so muss nach § 64, 6. (H.) sein:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} V = 0, \qquad (\alpha.)$$

wo $V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ist.

Da ferner die äusseren Kräfte auf das Innere verschwinden, so ist nach § 64, 7. (A'.):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, \qquad (\beta.) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial V}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Von diesen ist die letzte Gleichung wegen (α.) an sich erfüllt.

2. Bestimmung der Verschiebungen und Spannungen.

Wenn wir die erste und zweite Gleichung von (β.) nach z differenziren und dann durch die Gleichungen (α.) u und v entfernen, erhalten wir zwei Gleichungen, welche mit Hülfe der dritten von (β.), wenn dieselbe einmal nach x, das andere Mal nach z differenzirt wird, sich reduciren auf

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 0.$$

Darnach muss V folgende Form haben: $V = \Psi(x, y) + \Xi(z)$; denn sowohl $\frac{\partial V}{\partial x}$ als $\frac{\partial V}{\partial y}$ darf z nicht enthalten. Eine zweite Bedingung für V erhalten wir durch Verbindung der drei Gleichungen in (β.). Werden nämlich diese drei Gleichungen respective nach x, y, z differenzirt und dann addirt, so folgt, wenn man den Werth von V bedenkt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Das giebt nach dem Obigen:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x,y)}{\partial y^2} + \frac{d^2 \Xi(z)}{\partial z^2} = 0.$$

Diese Gleichung kann aber nur erfüllt sein, wenn c eine Constante bedeutet und $(1 - 2\mu)$ der Bequemlichkeit halber ausgezogen ist, durch folgende Bedingungen für Ψ und Ξ:

$$\frac{\partial^2 \Psi(xy)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x,y)}{\partial y^2} = c(1 - 2\mu) \text{ und } \frac{d^2 \Xi}{\partial z^2} = -c(1 - 2\mu).$$

Daraus ergiebt sich

$$\psi(x,y) = (1 - 2\mu) F(x,y) + c(1 - 2\mu)\frac{x^2 + y^2}{4} + \text{Const.},$$

$$\Xi(z) = -c(1 - 2\mu)\frac{z^2}{2} + c'(1 - 2\mu)z + \text{Const.},$$

wo $F(x,y)$ der Bedingung $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = 0$ zu genügen hat und die gewählte Form zur Vereinfachung späterer Untersuchungen genommen ist. Wenn wir nun die Constante mit in $F(x,y)$ hereinnehmen, erhalten wir endlich:

$$V = \left\{ -c\frac{z^2}{2} + c'z + F(x,y) + c\frac{x^2 + y^2}{4} \right\}(1 - 2\mu).$$

Nun können mit Hülfe der Gleichungen (α.) die Verschiebungen gefunden werden. Es ist nämlich

$$w = \mu c\frac{z^3}{6} - \mu c'\frac{z^2}{2} - \mu z F(x,y) - \mu cz\frac{x^2 + y^2}{4} + f(x,y) - c'(1 - \mu)\frac{x^2 + y^2}{4},$$

wo im Letzten ausgehoben ist ein Glied, um eine einfache Bedingung für $f(x,y)$, was als Integrationsconstante hinzugefügt ist, zu erhalten. Diese Bedingung, welche die dritte Gleichung von (β.) giebt, lautet:

$$-cz + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

oder

$$c = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Somit erhält man dann

$$u = \mu\frac{z^2}{2}\cdot\frac{\partial F(xy)}{\partial x} - z\left(\frac{\partial f(xy)}{\partial x} - (1 - \mu)\frac{c'x}{2}\right) + \varphi(x,y),$$

$$v = \mu\frac{z^2}{2}\cdot\frac{\partial F(xy)}{\partial y} - z\left(\frac{\partial f(xy)}{\partial y} - (1 - \mu)\frac{c'y}{2}\right) + \psi(x,y).$$

Diese Werthe von u, v, w genügen zunächst den Gleichungen (α). Zur Bestimmung der darin noch vorkommenden willkürlichen Functionen erhält man noch Bedingungen dadurch, dass erstens diese Werthe dem gefundenen Werth von V entsprechen und dann auch den Gleichungen (β.) genügen müssen. Es gilt also:

$$\frac{\partial\varphi(xy)}{\partial x} + \frac{\partial\psi(xy)}{\partial y} = (1-\mu)F(xy),$$
$$\frac{\partial^2\varphi(xy)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi(xy)}{\partial y^2} + (1+\mu)\frac{\partial F(xy)}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2\psi(xy)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(xy)}{\partial y^2} + (1+\mu)\frac{\partial F(xy)}{\partial y} = 0.$$

Diese drei Gleichungen enthalten in sich, wie man sich durch Differenzirung und Addition überzeugen kann, die zu erfüllende Bedingung für F, sonach kann man die erste dieser Gleichungen benutzen zur Elimination von F, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2\varphi(xy)}{\partial x^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2\varphi(xy)}{\partial y^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial x} = 0, \\ 2\frac{\partial^2\psi(xy)}{\partial y^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2\psi(xy)}{\partial x^2} + (1-\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (\gamma.)$$

Wird dann der gefundene Werth von F(xy) in die u, v, w eingesetzt, so wird endlich:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\mu}{1-\mu}\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) + \varphi - z\left(\frac{\partial f}{\partial y} - (1-\mu)\frac{c'x}{2}\right), \\ v &= \frac{\mu}{1-\mu}\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \psi - z\left(\frac{\partial f}{\partial y} - (1-\mu)\frac{c'y}{2}\right), \\ w &= -\mu\frac{c'z^2}{2} - z\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + f - c'(1-\mu)\frac{x^2+y^2}{4}. \end{aligned}\right\} \quad (\delta.)$$

wo noch $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sein muss.

Diese Werthe können dann eingesetzt werden in die Ausdrücke, welche die vorhandenen Spannungen N_1, N_2 und T_{xy} durch die Verschiebungen geben. Mit Hülfe der damit gewonnenen Werthe müssen die an der Oberfläche zu erfüllenden Bedingungen aufgestellt werden. Die nach Aussen gerichtete Normale eines Punktes der Cylinderwand bilde den Winkel p mit der x Axe, dann ist $\cos q = \sin p$ und $\cos r = 0$. Sind nun X, Y, Z die Componenten der äusseren Kräfte, die auf diesen Punkt wirken, so ist

$$X = N_1 \cos p + T_{xy} \sin p,$$
$$Y = T_{xy} \cos p + N_2 \sin p,$$
$$Z = 0.$$

Die Einsetzung der gewonnenen Werthe von N_1, N_2, T_{xy} in diese Grenzbedingungen giebt Gleichungen, welche zeigen, dass die von Aussen wirkenden Kräfte bestimmten Bedingungen unterworfen sein müssen, wenn die untersuchten Zustände eintreten können. Vor Allem sieht man, dass die Ausdrücke der Componenten der äusseren Kräfte höchstens die zweite Potenz von z enthalten können, d. h. sie müssen die Form

$$X = X_0 + X_1 z + X_2 z^2, \quad Y = Y_0 + Y_1 z + Y_2 z^2$$

annehmen, wo die Coefficienten $X_0, \ldots Y_0, \ldots$ von z unabhängig sein müssen. Bestimmt man dann durch Einführung der Ausdrücke in die der

Spannungen mit Hülfe der Methode der unbestimmten Coefficienten die Werthe X_0, Y_0 etc., so findet man, dass die X_0, Y_0, X_2, Y_2 nur von φ und ψ und die X_1, Y_1 nur von f und c' abhängen.

3. Trennung der beiden Fälle, welche in den allgemeinen Formeln enthalten sind.

1) Untersuchung des Falles, der nur von φ und ψ abhängig ist. Dann ist:

$$u = \frac{\mu}{1-\mu}\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right) + \varphi = u_2 z^2 + u_0,$$

$$v = \frac{\mu}{1-\mu}\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \psi = v_2 z^2 + v_0,$$

$$w = -\frac{\mu}{1-\mu} z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = -w_1 z,$$

wo die u_0, v_0, u_2, v_2, w_1 nur von x und y abhängen.

Die Componenten der äusseren Kräfte sind:

$$X = X_0 + X_2 z^2, \quad Y = Y_0 + Y_2 z^2.$$

Der zu untersuchende Zustand wird also hervorgebracht durch äussere Kräfte, welche mit z ihr Zeichen nicht ändern, also symmetrisch zur Mittelfläche vertheilt sind. Solche Kräfte können nur eine Ausdehnung hervorbringen. Aus den Verschiebungen geht hervor, dass die Punkte der Mittelfläche $z=0$, da für sie $w=0$ ist, in derselben bleiben, dass aber die Fasern senkrecht zur Mittelfläche gebogen werden. Die Gleichungen der gebogenen Fasern sind nach S. 77:

$$x' = x + u_2 z'^2 + u_0, \quad y' = y + v_2 z'^2 + v_0,$$

in denen x, y als constant anzusehen sind. Diese Gleichungen bedeuten zunächst eine ebene Curve in einer zur Mittelfläche senkrechten Ebene; denn eliminirt man z', so erhält man

$$v_2 x' - u_2 y' = v_2(x + u_0) - u_2(y + v_0),$$

d. i. die Gleichung einer Geraden. Die Projection der Curve auf die xz und yz Ebene sind Parabeln, deren Scheitel in der Mittelfläche liegen, mithin ist die Curve selbst eine Parabel.

2) Untersuchung des Falles, der nur von f und c' abhängt. Dann ist

$$u = -z\left(\frac{\partial f}{\partial x} - (1-\mu)\frac{c'x}{2}\right),$$

$$v = -z\left(\frac{\partial f}{\partial y} - (1-\mu)\frac{c'y}{2}\right),$$

$$w = f - c'(1-\mu)\frac{x^2+y^2}{2} - \mu\frac{c'z^2}{2},$$

mit der Bedingung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

Die vorhandenen Spannungen werden

$$N_1 = -\frac{Ez}{1+\mu}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (1-\mu)\frac{c'}{2}\right),$$

$$N_2 = -\frac{Ez}{1+\mu}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (1-\mu)\frac{c'}{2}\right),$$

$$T_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right).$$

Die Componenten der äusseren Kräfte sind:

$$X = X_1 z, \quad Y = Y_1 z.$$

Die Spannungen, die Componenten der von aussen wirkenden Kräfte und die Verschiebungen u, v ändern mit z das Vorzeichen, behalten aber denselben absoluten Werth. Die von aussen wirkenden Kräfte üben also weder Zug noch Druck aus, sondern wirken als Kräftepaare. Es ist demnach dieser Zustand charakterisirt als Biegung durch blosse Kräftepaare.

Die Mittelfläche $z = 0$ erfährt keine Spannungen, aber, da w nicht für $z = 0$ verschwindet, eine Gestaltsveränderung, so dass ihre Punkte normal verschoben werden. Fasern, welche zu Anfang senkrecht zur Mittelfläche waren, bleiben senkrecht, denn nach S. 77 wird deren Gleichung

$$x' = x - z'\left(\frac{\partial f}{\partial x} - (1-\mu)\frac{c'x}{2}\right),$$

$$y' = y - z'\left(\frac{\partial f}{\partial y} - (1-\mu)\frac{c'y}{2}\right),$$

d. i. eine Gerade.

Dieser Fall vereinfacht sich noch, wenn $f = 0$ ist, denn dann wird $N_1 = N_2 = \frac{Ezc'(1-\mu)}{2(1+\mu)}$, $T_{xy} = 0$, also hat jede Fläche parallel der Mittelfläche überall gleiche Spannung und diese bewirkt, da $u = \frac{1-\mu}{2}c'xz$, $v = \frac{1-\mu}{2}c'yz$, nach allen Seiten gleiche Ausdehnungen und, da $T_{xy} = 0$, nirgends Verschiebungen.

B. Die Dicke der Platte sei so gering, dass es nicht mehr erlaubt ist, die Verschiebungen des Ganzen für klein zu halten, wenn auch die der Elemente in sich klein sind.

1. Bedingungen für die Continuität der Platte.

Wir beziehen, wie bei der analogen Untersuchung dünner Stäbe das Element auf zweierlei Coordinaten, erstens auf ein festes Raumcoordinatensystem x', y' z', so dass die Mittelfläche der ursprünglichen dünnen Platte mit der $x'y'$ Ebene zusammenfällt. Für dieses System seien a, b die Coordinaten eines Punktes. Dieser Punkt ist zugleich der Coordinatenanfang

des mit dem Element sich bewegenden Systems x, y, z, und zwar sei die x Axe mit einem durch a, b der x′Axe parallel gezogenen Linienelement so fest verbunden, dass sie nach jeder beliebigen Verbiegung an demselben haftet, ebenso sei die xy Ebene mit dem Flächenelement der Mittelfläche fest verbunden, so dass sie zwar über demselben hingleiten, nie aber die Ebene desselben verlassen kann. Ziehen wir also in der ursprünglichen Lage der Mittelfläche durch a, b zwei den Axen x′, y′ parallele Elemente da, db, so soll auch nach jeder Verbiegung das Coordinatensystem der x, y, z so mitbewegt erscheinen, dass die x Axe desselben fortwährend mit da zusammenfällt und die z Axe auf da, db senkrecht steht.

Sind nun x, y, z die Elementencoordinaten eines Punktes, so sind dessen Raumcoordinaten $x + a$, $y + b$, z. Nach der Verbiegung soll der Punkt a, b die Coordinaten ξ, η, ζ haben, und jeder Punkt x, y, z des Elementes hat dann die Coordinaten $x + u$, $y + v$, $z + w$.

Es gelten dann die Gleichungen S. 97 (a.) (b.).

Die Grössen ξ, η, ζ und die cos. sind als Functionen von a und b zu betrachten. Da die Elemente verlängert werden, so setzen wir, dass da übergeht in $da(1 + \sigma_1)$ und db in $db(1 + \sigma_2)$, wo σ_1 und σ_2 sehr kleine Grössen sind. Ausserdem erfahren diese Elemente eine Verschiebung, so dass, während sie ursprünglich zu einander senkrecht stehen, sie es nun nicht mehr thun, sondern einen Winkel $90 - \tau$, wo τ sehr klein ist, mit einander bilden.

Wir können nun die Endpunkte der verschobenen Elemente auf verschiedene Art auffassen.

Das erste ist nach der Verschiebung in Folge der Annahme über das bewegliche Coordinatensystem noch immer der x Axe angehörig, seine Projectionen auf die Raumaxen sind dann:

$$\alpha_1 da(1 + \sigma_1), \quad \beta_1 da(1 + \sigma_1), \quad \gamma_1 da(1 + \sigma_1).$$

Die Projectionen des anderen bilden wir, indem wir von seinem Endpunkte aus auf die y Axe ein Loth fällen; die Katheten des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks sind dann, mit Rücksicht darauf, dass τ sehr klein ist, also $\cos\tau = 1$, $\sin\tau = \tau$: $db(1 + \sigma_2)$ und $\tau\, db(1 + \sigma_2)$. Projiciren wir nun statt der Hypotenuse beide Katheten und addiren beide Projectionen, so erhalten wir, da die eine Kathete der x Axe, die andere der y Axe parallel ist,

$$(\alpha_2 + \alpha_1\tau)\, db(1 + \sigma_2), \quad (\beta_2 + \beta_1\tau)\, db(1 + \sigma_2), \quad (\gamma_2 + \gamma_1\tau)\, db(1 + \sigma_2).$$

Wir können zweitens den verschobenen Punkt auch auffassen als den neuen Coordinatenanfang eines Elementencoordinatensystems. Wir bezeichneten oben mit ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes, der ursprünglich die Coordinaten a, b hatte, wenn nun der Punkt jetzt die Coordinaten $a + da$, b hat, so sind die neuen Coordinaten:

$$\xi + \frac{\partial\xi}{\partial a}da, \quad \eta + \frac{\partial\eta}{\partial a}da, \quad \zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial a}da.$$

Wenn die Coordinaten a, b + db sind, so sind die neuen Coordinaten

$$\xi + \frac{\partial \xi}{\partial b} db, \quad \eta + \frac{\partial \eta}{\partial b} db, \quad \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial b} db.$$

Die Projectionen der verschobenen Elemente da, db sind demnach auch gleich den folgenden Ausdrücken:

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} da, \quad \frac{\partial \eta}{\partial a} da, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial a} da,$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial b} db, \quad \frac{\partial \eta}{\partial b} db, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial b} db.$$

Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke der Verschiebungen folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial a} &= \alpha_1(1+\sigma_1), & \frac{\partial \xi}{\partial b} &= (\alpha_2 + \tau\alpha_1)(1+\sigma_2),\\
\frac{\partial \eta}{\partial a} &= \beta_1(1+\sigma_1), & \frac{\partial \eta}{\partial b} &= (\beta_2 + \tau\beta_1)(1+\sigma_2), \qquad (\varepsilon.)\\
\frac{\partial \zeta}{\partial a} &= \gamma_1(1+\sigma_1), & \frac{\partial \zeta}{\partial b} &= (\gamma_2 + \tau\gamma_1)(1+\sigma_2).
\end{aligned}$$

Dadurch ist es nun möglich die cos. $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ auszudrücken durch die Differentialquotienten von ξ, η, ζ, denn die σ_1, σ_2 findet man, indem man die Quadrate von (ε.) addirt und dabei τ^2 vernachlässigt, und τ, indem man die entsprechenden Gleichungen (ε.) mit einander multiplicirt und dann addirt. Man erhält durch diese Rechnung:

$$\begin{aligned}
1+\sigma_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial a}\right)^2},\\
1+\sigma_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial b}\right)^2},\\
\tau(1+\sigma_1)(1+\sigma_2) &= \frac{\partial \xi}{\partial a}\frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial a}\frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial a}\frac{\partial \zeta}{\partial b}.
\end{aligned}$$

Die Continuitätsbedingung heisst: Die Coordinaten x', y', z' eines verschobenen Punktes, nach a, b differenzirt, müssen dasselbe Resultat geben wie nach x, y differenzirt. Oder: in der natürlichen Lage hat ein Punkt des Körpers die Coordinaten x + a, y + b, z; es können also auch x', y', z' nur Functionen dieser drei Grössen sein, und es muss daher gleichgültig werden, ob man x', y' z' nach x oder nach a, nach y oder nach b differenzirt. Wir erhalten nun den Formeln (d.) S. 98 analoge, indem wir hier einmal die Differentiation nach a, dann nach b, statt der dort nach s ausgeführten, anstellen müssen. Wir schreiben dann in den so erhaltenen Formeln nach a die Abkürzungen r_1, r_2, r_0 und in denen nach b die s_1, s_2, s_0.

Führt man dann die in der Continuitätsbedingung angegebenen Differentiationen aus, setzt die erhaltenen Werthe einander gleich und verfährt wie B. 2., S. 98, so erhält man die den (e.) analogen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial a} + r_0(y+v) - r_2(z+w) + \sigma_1,\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial a} + r_1(z+w) - r_0(x+u),\\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial a} + r_2(x+u) - r_1(y+v),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial b} + s_0(y+v) - s_2(z+w) + \tau(1+\sigma_2), \qquad (\zeta.)\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial b} + s_1(z+w) - s_0(x+u) + \sigma_2,\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial b} + s_2(x+u) - s_1(y+v).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen (ζ.) vereinfachen sich wesentlich, wenn wir, wie bei den stabförmigen Körpern, ausschliessen plötzliche, grosse Aenderungen der Krümmung der Platte. Dann nämlich sind die u, v, w klein gegen x, y, z, und während die Differentation von u, v, w nach x, y im Allgemeinen die Ordnung der sehr kleinen Grössen erniedrigt, indem sie jedesmal einen sehr kleinen Factor beseitigt, findet dies bei der Differentiation nach a, b, welche endliche Grössen sind, nicht statt, es sind also die Differentialquotienten nach a, b gegen die nach x, y im Allgemeinen klein. Vernachlässigt man noch das Produkt $\tau\sigma_2$, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= r_0 y - r_2 z + \sigma_1, & \frac{\partial u}{\partial y} &= s_0 y - s_2 z + \tau,\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= r_1 z - r_0 x, & \frac{\partial v}{\partial y} &= s_1 z - s_0 x + \sigma_2, \qquad (\eta.)\\
\frac{\partial w}{\partial x} &= r_2 x - r_1 y, & \frac{\partial w}{\partial y} &= s_2 x - s_1 y.
\end{aligned}
$$

Eine weitere Vereinfachung erhält man durch (ε.), denn aus diesen ergiebt sich mit Vernachlässigung der sehr kleinen Grössen σ_1, σ_2, τ:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial a\,\partial b} &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial b} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial a},\\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial a\,\partial b} &= \frac{\partial \beta_1}{\partial b} = \frac{\partial \beta_2}{\partial a},\\
\frac{\partial^2 \zeta}{\partial a\,\partial b} &= \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial a}.
\end{aligned}
$$

Werden nun diese Werthe in die den (d.) analogen Gleichungen für die r und s eingesetzt und dabei berücksichtigt, dass gilt: $\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1$, $\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1$, so erhält man $r_0=0$, $s_0=0$, $s_2=-r_1$ und damit

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -r_2 z + \sigma_1, & \frac{\partial u}{\partial y} &= r_1 z + \tau,\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= r_1 z, & \frac{\partial v}{\partial y} &= s_1 z + \sigma_2,\\
\frac{\partial w}{\partial x} &= r_2 x - r_1 y, & \frac{\partial w}{\partial y} &= -r_1 x - s_1 y,
\end{aligned}
$$

wobei nur Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt sind.

Die Integration dieser Gleichungen liefert:

$$u = -r_2 zx + r_1 zy + \sigma_1 y + \tau y + u_0$$
$$v = r_1 zx + s_1 zy + \sigma_2 y + v_0, \qquad (\vartheta.)$$
$$w = r_2 \frac{x^2}{2} - r_1 xy - s_1 \frac{y^2}{2} + w_0,$$

wo u_0, v_0, w_0 nicht x, y, aber z, a, b enthalten können.

Wegen der Wahl des Coordinatensystems muss ferner für

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \qquad u = v = w = 0,$$
$$x = dx, \quad y = 0, \quad z = 0, \qquad v = w = 0,$$
$$x = 0, \quad y = dy, \quad z = 0, \qquad w = 0$$

sein, oder es müssen für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ folgende Grössen Null sein

$$u, \ v, \ w, \ \frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial w}{\partial x}, \ \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Dies in (ϑ.) eingesetzt zeigt, dass mit z die Grössen u_0, v_0, w_0 verschwinden müssen.

2. Gleichgewichtsgleichungen an den Elementen.

Wir können hier ebenso wie bei den stabförmigen Körpern mit kleinem Querschnitt von äusseren Kräften absehen, deshalb in den Gleichungen S. 3 (A.) $X = Y = Z = 0$ setzen. Für die Spannungen S. 13 (H.) erhalten wir, nachdem in denselben die oben berechneten Werthe für u, v, w eingeführt sind, die folgenden Ausdrücke:

$$N_1 = \frac{E}{(1+\mu)}\left\{\sigma_1 - r_2 z + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + (s_1 - r_2) z + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\right\},$$
$$N_2 = \frac{E}{(1+\mu)}\left\{\sigma_2 - s_1 z + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + (s_1 - r_2) z + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\right\},$$
$$N_3 = \frac{E}{(1+\mu)}\left\{\left(\frac{\partial w_0}{\partial z}\right. + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + (s_1 - r_2) z + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right)\right\},$$
$$T_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\partial v_0}{\partial z}, \quad T_{zx} = \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\partial u_0}{\partial z}, \quad T_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}(2 r_1 z + \tau).$$

Die Einsetzung dieser Werthe in die Gleichgewichtsgleichungen (A.) S. 3 giebt:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu}\left[\sigma_1 + \sigma_2 + (s_1 - r_2) z + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right]\right) = 0.$$

Daraus folgt, dass $\frac{\partial u_0}{\partial z}$ und $\frac{\partial v_0}{\partial z}$ und demnach T_{yz} und T_{zx} constant sein müssen. Da nun aber an der freien Oberfläche parallel der xy Ebene keine äussere Spannung vorhanden sein kann, da ferner vorausgesetzt ist, dass darauf keine äusseren Kräfte wirken, so ist $T_{xz} = T_{yz} = N_3 = 0$, also können die durch Integration der obigen Gleichungen erhaltenen Constanten nur $= 0$ sein. Es ist also

$$\frac{\partial u_0}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial z}+\frac{\mu}{1-\mu}[\sigma_1+\sigma_2+(s_1-r_2)z]=0.$$

Da ferner u_0 und v_0 nach 1. für $z=0$ auch verschwinden, so können u_0 und v_0 selbst nur $=0$ sein. Dasselbe gilt für w_0, mithin ist bei der Integration der letzten Gleichung keine Constante zuzufügen, es ist also

$$w_0=-\frac{\mu}{1-\mu}\left\{(\sigma_1+\sigma_2)z+\tfrac{1}{2}(s_1-r_2)z^2\right\}.$$

Dies Alles benutzt giebt endlich:

$$u=-r_2zx+r_1zy+\sigma_1x+\tau y,$$

$$v=r_1zx+s_1zy+\sigma_2y,$$

$$w=\tfrac{1}{2}r_2x^2-r_1xy-\tfrac{1}{2}s_1y^2-\frac{\mu}{1-\mu}\left\{(\sigma_1-\sigma_2)z+\tfrac{1}{2}(s_1-r_2)z^2\right\},$$

$$N_1=\frac{E}{(1-\mu^2)}[(\sigma_1+\mu\sigma_2)-z(r_2-\mu s_1)],$$

$$N_2=\frac{E}{(1-\mu^2)}[(\sigma_2+\mu\sigma_1)+z(s_1-\mu r_2)],$$

$$T_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}(2r_1z+\tau),$$

$$T_{xz}=T_{yz}=N_3=0.$$

Diese Werthe entsprechen den Ausdrücken S. 112 (δ.), wenn wir setzen $\varphi(x,y)=\sigma_1x+\tau y$, $\psi(x,y)=\sigma_2y$,

$$f(x,y)=\frac{s_1+r_2}{4}(x^2-y^2)-r_1xy, \qquad c'=\frac{s_1-r_2}{1-\mu}.$$

Es müssen demnach die hier betrachteten Zustände hervorgebracht werden durch Kräfte von derselben Art wie oben, d. h. das Element ist nur durch Spannungskräfte ergriffen, welche der Ebene seiner Mittelfläche parallel sind und durch Kräftepaare, deren Axen in jener Ebene liegen. Gäbe es auf den Rand Kräfte, welche eine andere Richtung hätten, so könnten die durch sie verursachten Verschiebungen nur von einer höheren Ordnung sein gegen die oben gefundenen.

8. Aeusseres Gleichgewicht an den Elementen und dadurch an der ganzen Platte.

Auf jedes Elementarparallelepipedum, welches senkreckt zur Platte aus derselben geschnitten wird, wirken ausser den Spannungen, die in 2. betrachtet worden sind, Componenten und Kräftepaare, die von äusseren Kräften herrühren.

Die Gleichgewichtsbedingungen werden nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten abgeleitet. Wir geben sämmtlichen Elementen eine Verschiebung $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$. Diese Grössen, welche nicht beliebig genommen werden können, bestimmen sich aus den Gleichungen S. 97 (b.), aber man erhält schon alle Punkte, wenn man $x=y=0$ setzt und den a, b, z alle möglichen Werthe beilegt; mithin ist bis auf Grössen höherer

Ordnung $x' = \xi + \alpha z$, $y' = \eta + \beta z$, $z' = \zeta + \gamma z$. Sollen alle Elemente ein wenig verschoben werden, so heisst dies, dass die Grössen $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$ kleine Veränderungen erfahren. Es ist mithin:

$$\begin{aligned} \delta x' &= \delta\xi + z\,\delta\alpha, \\ \delta y' &= \delta\eta + z\,\delta\beta, \\ \delta z' &= \delta\zeta + z\,\delta\gamma. \end{aligned} \qquad (\iota.)$$

Diese sechs Grössen $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$ hängen von a und b ab und müssen ausserdem noch folgenden Gleichungen genügen, von denen die beiden etzten aus S. 98 (d.) und (ε.) sich ergeben.

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ &\alpha\frac{\partial\xi}{\partial a} + \beta\frac{\partial\eta}{\partial a} + \gamma\frac{\partial\zeta}{\partial a} = 0, \\ &\alpha\frac{\partial\xi}{\partial b} + \beta\frac{\partial\eta}{\partial b} + \gamma\frac{\partial\zeta}{\partial b} = 0. \end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen variirt, so erhält man Bedingungen, denen die $\delta\xi$ etc. unterworfen sind. Diese sind:

$$\begin{aligned} &\alpha\,\delta\alpha + \beta\,\delta\beta + \gamma\,\delta\gamma = 0, \\ &\alpha\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial a} + \beta\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial a} + \gamma\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial a} + \delta\alpha\frac{\partial\xi}{\partial a} + \delta\beta\frac{\partial\eta}{\partial a} + \delta\gamma\frac{\partial\zeta}{\partial a} = 0, \\ &\alpha\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial b} + \alpha\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial b} + \gamma\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial b} + \delta\alpha\frac{\partial\xi}{\partial b} + \delta\beta\frac{\partial\eta}{\partial b} + \delta\gamma\frac{\partial\zeta}{\partial b} = 0. \end{aligned} \qquad (\varkappa.)$$

Die im Ganzen geleistete Arbeit setzt sich aus zwei Theilen zusammen, indem wir erst die Arbeit der Kräfte in der ganzen Platte nehmen dann die am Rand. Bezeichnen nun X da db dz, Y da db dz, Z da db dz die Componenten auf ein Element da db dz, so ist die ganze Arbeit dieser Kräfte:

$$\delta\Omega = \iiint (X\,\delta x' + Y\,\delta y' + Z\,\delta z')\,da\,db\,dz,$$

wo das Integral über das ganze Volumen auszudehnen ist.

In diesem dreifachen Integrale sind nun Arbeiten von Spannungen auf den Rand mit eingerechnet, die aber nicht existiren. Bezeichnen wir demnach die Differenzen zwischen den Kräften, die wirklich auf den Rand wirken und den oben fälschlich hinzugenommenen Spannungen auf ein Randelement ds dz mit Ξ ds dz, H ds dz, Z ds dz, so ist die Gesammtarbeit am Rand

$$\delta\Omega' = \iint (\Xi\,\delta x' + H\,\delta y' + Z\,\delta z')\,ds\,dz,$$

wo das Integral sich über die ganze Randfläche erstreckt.

Damit nun die Platte im Gleichgewichte sei, muss sein

$$\delta\Omega + \delta\Omega' = 0,$$

wo die Variationen der Bedingungen ($\varkappa$.) unterworfen sind. In diese Gleichung sind einzuführen die berechneten Werthe der Spannungen. Um das thun zu können, soll zunächst die Gleichung vereinfacht werden und dann sollen mit Hülfe der Multiplicatoren von Lagrange die Bedingungen ($\varkappa$.) eingesetzt werden.

Da die Variationen $\delta\xi$.... von z unabhängig sind, so können mehrere Integrationen ausgeführt werden, nachdem man statt $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ ihre Werthe aus (ι.) eingesetzt hat.

Schreibt man

$$\int X\,dz = X',\quad \int Xz\,dz = X'',\quad \int \Xi dz = \Xi',\quad \int \Xi z\,dz = \Xi''$$

und dem entsprechend Y′, Y″…, so ergiebt sich

$$\delta\Omega = \iint (X'\delta\xi + Y'\delta\eta + Z'\delta\zeta + X''\delta\alpha + Y''\delta\beta + Z''\delta\gamma)\,da\,db,$$

$$\delta\Omega' = \int (\Xi'\delta\xi + H'\delta\eta + Z'\delta\zeta + \Xi''\delta\alpha + H''\delta\beta + Z''\delta\gamma)\,ds,$$

wo das erste Integral über die ganze Mittelfläche, das zweite über die Peripherie derselben auszudehnen ist.

Werden nun die Bedingungen (ϰ.), denen die Variationen unterworfen sind, mit Hülfe der Methode von Lagrange eingeführt, so erhält man, wenn man die Multiplicatoren mit λ, λ_1, λ_2 bezeichnet,

$$\delta\Omega = \iint \Big\{ (X'\delta\xi + Y'\delta\eta + Z'\delta\zeta) + (X''\delta\alpha + Y''\delta\beta + Z''\delta\gamma) + \lambda(\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma)$$
$$+ \lambda_1 \left(\alpha \frac{\partial\delta\xi}{\partial a} + \beta \frac{\partial\delta\eta}{\partial a} + \gamma \frac{\partial\delta\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial a}\delta\alpha + \frac{\partial\eta}{\partial a}\delta\beta + \frac{\partial\zeta}{\partial a}\delta\gamma\right)$$
$$+ \lambda_2 \left(\alpha \frac{\partial\delta\xi}{\partial b} + \beta \frac{\partial\delta\eta}{\partial b} + \gamma \frac{\partial\delta\zeta}{\partial b} + \frac{\partial\xi}{\partial a}\delta\alpha + \frac{\partial\eta}{\partial b}\delta\beta + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\delta\gamma\right)\Big\},$$

wo $\delta\xi$ etc. als vollkommen unabhängig von einander zu betrachten sind.

In diesen Gleichungen kommen ausser den Variationen noch vor deren Differentialquotienten, die durch theilweise Integration nach der Methode S. 76 entfernt werden sollen, wenn p den Winkel der Normale der Randcurve gegen die x Axe bedeutet. Es ist nämlich:

$$\iint \lambda_1 \left(\alpha \frac{\partial\delta\xi}{\partial a} + \beta \frac{\partial\delta\eta}{\partial a} + \gamma \frac{\partial\delta\zeta}{\partial a}\right) da\,db$$
$$= \int \lambda_1(\alpha\delta\xi + \beta\delta\eta + \gamma\delta\zeta)\cos p\,ds - \iint \left(\delta\xi \frac{\partial\lambda_1\alpha}{\partial a} + \delta\eta \frac{\partial\lambda_1\beta}{\partial a} + \delta\zeta \frac{\partial\lambda_1\gamma}{\partial a}\right) da\,db,$$

und ganz ebenso zerlegt sich das Integral mit λ_2.

Vereinigen wir nun die einfachen Integrale mit $\delta\Omega'$, so enthält der Ausdruck unter dem Doppelintegral nur noch die Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$. Die Nullsetzung deren Coefficienten geben dann ein Gleichungssystem, welches in jedem Punkte der Mittelfläche zu erfüllen ist:

$$\begin{aligned}
&X' - \frac{\partial\lambda_1\alpha}{\partial a} - \frac{\partial\lambda_2\alpha}{\partial b} = 0, \quad X'' + \lambda\alpha + \lambda_1 \frac{\partial\xi}{\partial a} + \lambda_2 \frac{\partial\xi}{\partial b} = 0,\\
&Y' - \frac{\partial\lambda_1\beta}{\partial a} - \frac{\partial\lambda_2\beta}{\partial b} = 0, \quad Y'' + \lambda\beta + \lambda_1 \frac{\partial\eta}{\partial a} + \lambda_2 \frac{\partial\eta}{\partial b} = 0, \quad (\lambda.)\\
&X' - \frac{\partial\lambda_1\gamma}{\partial a} - \frac{\partial\lambda_2\gamma}{\partial b} = 0, \quad Z'' + \lambda\gamma + \lambda_1 \frac{\partial\zeta}{\partial a} + \lambda_2 \frac{\partial\zeta}{\partial b} = 0.
\end{aligned}$$

Es bleibt also noch übrig von der Gleichung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$0 = \delta\Omega' + \int(\lambda_1 \cos p + \lambda_2 \sin p)\,(\alpha\delta\xi + \beta\delta\eta + \gamma\delta\zeta)\,ds. \quad (\mu.)$$

Hier kommen nur Functionen von s vor. Um daher nicht wieder sämmtliche Gleichungen aus (ϰ.) durch Multiplicatoren einzusetzen, führen wir statt der beiden letzten Bedingungsgleichungen (ϰ.) eine Combination ein, in der nach s statt nach a oder b differenzirt ist. Um die Differentiation

auszuführen, nehmen wir die positive Richtung von s von der $+$ x Axe zu $+$ y Axe. Gehen wir dann in der Richtung des positiven s um eine kleine Strecke ε vorwärts, so vermindert sich a um $\varepsilon \sin p$, und y wächst um $\varepsilon \cos p$. Eine Function von a und b kurz f(a, b) geht dadurch über in

$$f(a - \varepsilon \sin p,\ b + \varepsilon \cos p) = f + \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial b} \cos p - \frac{\partial f}{\partial a} \sin p \right) + \dots$$

mithin ist für kleine ε: $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial b} \cos p - \frac{\partial f}{\partial a} \sin p$.

So ergiebt sich aus den beiden Gleichungen ($\varkappa$.), wenn man die zweite derselben mit $-\sin p$, die dritte mit $\cos p$ multiplicirt und dann addirt:

$$\alpha \frac{\partial \delta\xi}{\partial s} + \beta \frac{\partial \delta\eta}{\partial s} + \gamma \frac{\partial \delta\zeta}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial s} \delta\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial s} \delta\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial s} \delta\gamma = 0.$$

Wird diese Gleichung und die erste von ($\varkappa$.) mit λ_1' und λ' multiplicirt und zu (μ.) hinzugesetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 = \int \{ & \Xi'\delta\xi + H'\delta\eta + Z'\delta\zeta + \Xi''\delta\alpha + H''\delta\beta + Z''\delta\gamma + \lambda'(\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma) \\ & + \lambda_1' \left(\alpha \frac{\partial \delta\xi}{\partial s} + \beta \frac{\partial \delta\eta}{\partial s} + \gamma \frac{\partial \delta\zeta}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial s} \delta\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial s} \delta\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial s} \delta\gamma \right) \\ & + (\lambda_1 \cos p + \lambda_2 \sin p)(\alpha\delta\xi + \beta\delta\eta + \gamma\delta\zeta) \} \, ds. \end{aligned} \qquad (\nu.)$$

Durch partielle Integration können wir hieraus wieder die Differentialquotienten der Variationen entfernen. Dabei werden die Ausdrücke ohne Integral verschwinden, denn es ist über den ganzen Rand zu integriren, so dass also die Grenzen zusammenfallen. Es findet sich:

$$\int \lambda_1' \left(\alpha \frac{\partial \delta\xi}{\partial s} + \beta \frac{\partial \delta\eta}{\partial s} + \gamma \frac{\partial \delta\zeta}{\partial s} \right) ds = -\int \left(\delta\xi \frac{\partial \lambda_1'\alpha}{\partial s} + \delta\eta \frac{\partial \lambda_1'\beta}{\partial s} + \delta\zeta \frac{\partial \lambda_1'\gamma}{\partial s} \right) ds.$$

Führt man dies ein in (ν.), so erhält man durch Nullsetzung der betreffenden Coefficienten:

$$\begin{aligned} & \Xi' + \alpha(\lambda_1 \cos p + \lambda_2 \sin p) - \frac{\partial \lambda_1'\alpha}{\partial s} = 0, \quad \Xi'' + \lambda'\alpha + \lambda_1' \frac{\partial \xi}{\partial s} = 0, \\ & H' + \beta(\lambda_1 \cos p + \lambda_2 \sin p) - \frac{\partial \lambda_1'\beta}{\partial s} = 0, \quad H'' + \lambda'\beta + \lambda_1' \frac{\partial \eta}{\partial s} = 0, \\ & Z' + \gamma(\lambda_1 \cos p + \lambda_2 \sin p) - \frac{\partial \lambda_1'\gamma}{\partial s} = 0, \quad Z'' + \lambda'\gamma + \lambda_1' \frac{\partial \zeta}{\partial s} = 0. \end{aligned} \qquad (\varrho.)$$

Die Gleichungen (λ.) und (ϱ.), welche die gewünschten Gleichgewichtsbedingungen enthalten, vereinfachen sich noch, wenn man je drei entsprechende Gleichungen mit $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ oder $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ oder $\alpha \beta \gamma$ multiplicirt und jedesmal addirt. Man erhält dann mit Berücksichtigung der Winkelgleichungen und Beibehaltung der Grössen niedrigster Ordnung für jeden Punkt der Mittelfläche:

$$\begin{aligned} & X'\alpha_1 + Y'\beta_1 + Z'\gamma_1 + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 s_2 = 0, \\ & X'\alpha_2 + Y'\beta_2 + Z'\gamma_2 - \lambda_1 r_1 - \lambda_2 s_1 = 0, \\ & X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma - \frac{\partial \lambda_1}{\partial a} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial b} = 0, \\ & X''\alpha_1 + Y''\beta_1 + Z''\gamma_1 + \lambda_1 = 0, \\ & X''\alpha_2 + Y''\beta_2 + Z''\gamma_2 + \lambda_2 = 0. \end{aligned} \qquad (\sigma.)$$

Für jeden Punkt der Randcurve:

$$\Xi'\alpha_1 + H'\beta_1 + Z'\gamma_1 + \lambda_1' (s_2 \cos p - r_2 \sin p) = 0,$$
$$\Xi'\alpha_2 + H'\beta_2 + Z'\gamma_2 + \lambda_1' (s_1 \cos p - r_1 \sin p) = 0,$$
$$\Xi'\alpha + H'\beta + Z'\gamma + \lambda_1 \cos p + \lambda_2 \sin p - \frac{\partial \lambda_1'}{\partial s} = 0, \qquad (\sigma.)$$
$$\Xi''\alpha_1 + H''\beta_1 + Z''\gamma_1 - \lambda_1' \sin p = 0,$$
$$\Xi''\alpha_2 + H''\beta_2 + Z''\gamma_2 + \lambda_1' \cos p = 0.$$

In diesen Gleichungen sind dann noch statt der Grössen X' etc. die von aussen wirkenden Kräfte und die Spannungen einzuführen.

1) Die Theile der X' etc., welche von den äusseren Kräften herrühren. Es seien die Componenten der auf das Element da db dz des Inneren wirkenden Kräfte

$$A\,da\,db\,dz, \quad B\,da\,db\,dz, \quad C\,da\,db\,dz,$$

dann sind die betreffenden Theile von X', Y', Z', X'', Y'', Z'':

$$A' = \int A\,dz, \qquad A'' = \int Az\,dz,$$
$$B' = \int B\,dz, \qquad B'' = \int Bz\,dz,$$
$$C' = \int C\,dz, \qquad C'' = \int Cz\,dz,$$

ausgedehnt, wenn h die Dicke der Platte bedeutet, über alle Werthe von z zwischen $-\frac{h}{2}$ und $+\frac{h}{2}$.

2) Die Theile der X' etc., welche von Spannungen herrühren. Die Spannungen auf die den negativen x, y, z Axen zugekehrten Seiten des Elementarparallelepipedums sind nach x, y, z:

$$\begin{array}{ccc} -N_1\,db\,dz, & -T_{xy}\,db\,dz, & 0, \\ -T_{xy}\,da\,dz, & -N_2\,da\,dz, & 0, \\ 0\quad, & 0\quad, & 0. \end{array}$$

Zerlegen wir diese nach den x', y', z'Axen, so ist:

parallel der x'Axe $-(N_1\alpha_1 + T_{xy}\alpha_2)\,db\,dz, \quad -(T_{xy}\alpha_1 + N_2\alpha_2)\,da\,dz,$

- - y'Axe $-(N_1\beta_1 + T_{xy}\beta_2)\,db\,dz, \quad -(T_{xy}\beta_1 + N_2\beta_2)\,da\,dz,$

- - z'Axe $-(N_1\gamma_1 + T_{xy}\gamma_2)\,db\,dz, \quad -(T_{xy}\gamma_1 + N_2\gamma_2)\,da\,dz.$

Die auf die entgegenstehenden Flächen wirkenden Componenten erhält man, wenn man die Vorzeichen entgegengesetzt nimmt und zugleich in den Componenten der ersten Reihe a in a + da, in denen der zweiten b in b + db verwandelt.

Addirt man, so erhält man die Spannungskraft parallel der x'Axe:

$$\left(\frac{\partial(N_1\alpha_1 + T_{xy}\alpha_2)}{\partial a} + \frac{\partial(T_{xy}\alpha_1 + N_2\alpha_2)}{\partial b}\right) da\,db\,dz.$$

Von dieser Spannung entspringt also in X' und in X'':

$$\int \left[\frac{\partial(N_1\alpha_1 + T_{xy}\alpha_2)}{\partial a} + \frac{\partial(T_{xy}\alpha_1 + N_2\alpha_2)}{\partial b}\right] dz$$

und

$$\int \left[\frac{\partial(N_1\alpha_1 + T_{xy}\alpha_2)}{\partial a} + \frac{\partial(T_{xy}\alpha_1 + N_2\alpha_2)}{\partial b}\right] z\,dz.$$

Setzt man nun die Werthe der Spannungen von S. 119 ein und zugleich $r_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s_2 = -r_1$ (S. 117), so ist

$$\int N_1 dz = \frac{hE}{(1-\mu^2)}(\sigma_1 + \mu\sigma_2), \qquad \int N_1 z dz = -\frac{h^3E}{12(1-\mu^2)}(r_2 - \mu s_1),$$

$$\int N_2 dz = \frac{hE}{(1-\mu^2)}(\sigma_2 + \mu\sigma_1), \qquad \int N_2 z dz = \frac{h^3E}{12(1-\mu^2)}(s_1 - \mu r_2),$$

$$\int T_{xy} dz = \frac{hE}{2(1+\mu)}\tau, \qquad \int T_{xy} z dz = \frac{h^3E}{12(1-\mu)} r_1.$$

Dies benutzt erhält man endlich mit Hinzufügung der obigen Werthe:

$$X' = A' + \frac{hE}{(1-\mu^2)}\left\{\frac{\partial\left[(\sigma_1+\mu\sigma_2)\alpha_1 + \frac{1-\mu}{2}\tau\alpha_2\right]}{\partial a} + \frac{\partial\left[\frac{1-\mu}{2}\tau\alpha_1 + (\sigma_2+\mu\sigma_1)\alpha_2\right]}{\partial b}\right\},$$

$$X'' = A'' + \frac{h^3E}{12(1-\mu^2)}\left\{\frac{\partial[-(r_2-\mu s_1)\alpha_1 + (1-\mu)r_1\alpha_2]}{\partial a} + \frac{\partial[(1-\mu)r_1\alpha_1 + (s_1-\mu r_2)\alpha_2]}{\partial b}\right\}.$$

Dem entsprechend findet man Y', Y'', Z', Z''. Wodurch die fünf ersten Gleichungen von $(\sigma.)$ übergehen in:

$$(\tau.)\quad \begin{cases} A'\alpha_1 + B'\beta_1 + C'\gamma_1 + \lambda_1 r_2 + \lambda_2 s_2 + \frac{hE}{(1-\mu^2)}\left\{\frac{\partial(\sigma_1+\mu\sigma_2)}{\partial a} + \frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial\tau}{\partial b}\right\} = 0, \\ A'\alpha_2 + B'\beta_2 + C'\gamma_2 - \lambda_1 r_1 - \lambda_2 s_1 + \frac{hE}{(1-\mu^2)}\left\{\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\tau}{\partial a} + \frac{\partial(\sigma_2+\mu\sigma_1)}{\partial b}\right\} = 0, \\ A'\alpha + B'\beta + C'\gamma - \frac{\partial\lambda_1}{\partial a} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial b} + \frac{hE}{(1-\mu^2)}\left\{(\sigma_1+\mu\sigma_2)r_2 - (1-\mu)\tau r_1 \right. \\ \qquad\qquad \left. -(\sigma_2+\mu\sigma_1)s_1\right\} = 0, \\ A''\alpha_1 + B''\beta_1 + C''\gamma_1 + \lambda_1 + \frac{h^3E}{12(1-\mu^2)}\left\{-\frac{\partial(r_2-\mu s_1)}{\partial a} + (1-\mu)\frac{\partial r_1}{\partial b}\right\} = 0, \\ A''\alpha_2 + B''\beta_2 + C''\gamma_2 + \lambda_2 + \frac{h^3E}{12(1-\mu^2)}\left\{(1-\mu)\frac{\partial r_1}{\partial a} + \frac{\partial(s_1-\mu r_2)}{\partial b}\right\} = 0. \end{cases}$$

Ebenso bestehen die Ξ' etc. aus zwei Theilen von den äusseren Kräften, weniger den Spannungen.

1) Der von den äusseren Kräften herrührende Theil.

Seien $U\,dz\,ds$, $V\,dz\,ds$, $W\,dz\,ds$ die auf ein Randelement $dz\,ds$ wirkenden äusseren Kräfte, dann sind die von diesen Kräften herrührenden Theile:

$$U' = \int U dz, \qquad U'' = \int Uz dz,$$
$$V' = \int V dz, \qquad V'' = \int Vz dz,$$
$$W' = \int W dz, \qquad W'' = \int Wz dz.$$

2) Die abzuziehenden Grössen von den fälschlich oben hinzugenommenen Spannungen herrührend.

Die Normale des Elementes bildet gegen die Axen x, y, z die Winkel p, $90° - p$, $90°$, folglich sind die Componenten der Spannungen:

$$N_1 \cos p + T_{xy} \sin p, \quad T_{xy} \cos p + N_2 \sin p, \quad 0,$$

und dies sind sofort die Grössen, welche nicht bei Ξ, H, Z, sondern bei den nach den x, y, z Axen zerlegten Kräften $\Xi\alpha_1 + H\beta_1 + Z\gamma_1$ etc. zur Anwendung kommen.

Integrirt man also nach z, um die mit einem und zwei Strichen versehenen Grössen zu bilden, so erhält man die Ausdrücke:

$$\Xi'\alpha_1 + H'\beta_1 + Z'\gamma_1 = U'\alpha_1 + V'\beta_1 + W'\gamma_1$$
$$- \frac{hE}{(1-\mu^2)}\left\{(\sigma_1 + \mu\sigma_2)\cos p + \frac{1-\mu}{2}\tau \sin p\right\}.$$
$$\Xi''\alpha_1 + H''\beta_1 + Z''\gamma_1 = U''\alpha_1 + V''\beta_1 + W''\gamma_1$$
$$- \frac{h^3E}{12(1-\mu^2)}\left\{-(r_2 - \mu s_1)\cos p + (1-\mu) r_1 \sin p\right\}.$$

Ebenso erhält man zwei andere Paare.

Die Einsetzung dieser Ausdrücke in die fünf letzten Gleichungen von (σ.) giebt dann:

$$U'\alpha_1 + V'\beta_1 + W'\gamma_1 + \lambda_1'(s_2 \cos p - r_2 \sin p)$$
$$- \frac{hE}{(1-\mu^2)}\left[(\sigma_1 + \mu\sigma_2)\cos p + \frac{1-\mu}{2}\tau \sin p\right] = 0,$$
$$U'\alpha_2 + V'\beta_2 + W'\gamma_2 - \lambda_1'(s_1 \cos p - r_1 \sin p)$$
$$- \frac{hE}{(1-\mu^2)}\left[\frac{1-\mu}{2}\tau \cos p + (\sigma_2 + \mu\sigma_1)\sin p\right] = 0,$$
$$U'\alpha + V'\beta + W'\gamma - \frac{\partial \lambda_1'}{\partial s} + \lambda_1 \cos p + \lambda_2 \sin p = 0, \qquad (\tau')$$
$$U''\alpha_1 + V''\beta_1 + W''\gamma_1 - \lambda_1' \sin p$$
$$- \frac{h^3E}{12(1-\mu^2)}\left[-(r_2 - \mu s_1)\cos p + (1-\mu) r_1 \sin p\right] = 0,$$
$$U''\alpha_2 + V''\beta_2 + W''\gamma_2 + \lambda_2' \cos p$$
$$- \frac{h^3E}{12(1-\mu^2)}\left[(1-\mu) r_1 \cos p + (s_1 - \mu r_2)\sin p\right] = 0$$

4. Endliche Biegung.

Das Problem der Auffindung endlicher Biegung, welche zuerst von Clebsch untersucht ist, theilt sich derselbe in drei einzelne Aufgaben:

1) Gestaltveränderung ohne Berücksichtigung der Ausdehnungen und Verschiebungen σ_1, σ_2, τ.

2) Aufsuchung der Dilatationen σ_1, σ_2, τ.

3) Bestimmung der Abweichungen der wirklichen Gestalt von der in 1) gefundenen.

1) Da die σ_1, σ_2, τ verschwinden sollen, so müssen bei der Verbiegung alle Elemente unverändert bleiben. Eine solche Biegung ist nur möglich, wenn die Fläche nach gewissen Geraden gebrochen wird, welche ihrerseits völlig so bleiben, wie sie ursprünglich gewesen sind, und welche, damit keine Faltungen eintreten, sich nicht innerhalb der Platte durchschneiden. Die gebogene Fläche hat demnach die Form einer abwickelbaren und je zwei auf einander folgende Gerade schliessen ein unendlich schmales Trapez ein. Zur Bestimmung dieser Fläche gehen wir aus von der Gratlinie, d. h. der Curve, in der je zwei auf einander folgende Gerade des erwähnten Systems einander schneiden. Da nun auf jeder Geraden zwei nähcste Punkte

der Curve liegen, so sind diese selbst die Tangenten. Die Gratlinie liegt vor der Biegung in der Ebene und geht dann in eine Curve doppelter Krümmung über, die mit der ursprünglichen Curve wie folgt zusammensammenhängt: Die Bogenelemente und die Winkel zweier nächsten Tangenten oder die Krümmungshalbmesser bleiben ungeändert. Zur Bestimmung der Raumcurve kommt dann noch der Winkel zweier nächsten Schmiegungsebenen.

Bestimmung der abwickelbaren Fläche. Sei σ der Bogen der Gratlinie von einem beliebigen Punkt an gerechnet und ξ_0, η_0, ζ_0 der zu σ gehörige Punkt der Curve, l eine Strecke, welche auf der in diesem Punkte gezogenen Tangente der Gratlinie vom Berührungspunkte an gezählt wird. Kennt man nun die Gratlinie, so ist dann durch σ und l jeder Punkt der Fläche gegeben.

Es sollen ξ_0, η_0, ζ_0, σ Functionen einer unabhängigen Veränderlichen s sein und die Differentialquotienten nach s seien durch Striche bezeichnet.

Es sind dann die cos. der Winkel, welche die Tangente der Gratlinie oder l mit den im Raum festen Coordinaten bildet:

$$\frac{d\xi_0}{d\sigma} = \frac{\xi_0'}{\sigma'}, \quad \frac{d\eta_0}{d\sigma} = \frac{\eta_0'}{\sigma'}, \quad \frac{d\zeta_0}{d\sigma} = \frac{\zeta_0'}{\sigma'},$$

mithin ist, wenn ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes der Fläche sind,

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + l\frac{\xi_0'}{\sigma'}, \\ \eta &= \eta_0 + l\frac{\eta_0'}{\sigma'}, \\ \zeta &= \zeta_0 + l\frac{\zeta_0'}{\sigma'}. \end{aligned} \qquad (\mathfrak{a}.)$$

wo $\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2 = \sigma'^2$.

Diese Gleichungen ($\mathfrak{a}$.), welche der allgemeine Ausdruck einer abwickelbaren Fläche sind, müssen nun im Zusammenhang stehen mit der früher ebenen Fläche. Es entspreche den Punkten ξ, η, ζ und ξ_0, η_0, ζ_0, in der Ebene den Punkten a, b, 0 und a_0, b_0, 0.

Die Gleichung der Ebene ist dann dem Obigen entsprechend:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + l\frac{a_0'}{\sigma'}, \\ b &= b_0 + l\frac{b_0'}{\sigma'}, \end{aligned} \qquad (\mathfrak{b}.)$$

wo $a_0'^2 + b_0'^2 = \sigma'^2$ ist. Denn es bleibt l und auch das Bogenelemenent σ dasselbe.

Es muss aber noch der Krümmungshalbmesser derselbe bleiben. Um diese Gleichheit auszudrücken, sei φ der Winkel des Bogenelementes $d\sigma$ gegen die Axe a, dann ist:

$$\frac{a_0'}{\sigma'} = \cos\varphi, \quad \frac{b_0'}{\sigma'} = \sin\varphi, \quad \text{also} \qquad (\mathfrak{c}.)$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{a_0' b_0'' - b_0' a_0''}{\sigma'^2} = \frac{\varphi'}{\sigma'}. \qquad (\mathfrak{d}.)$$

Denselben Werth muss dann der Krümmungshalbmesser der Gratlinie haben. Man kennt nun Ausdrücke der cosinus der Winkel, welche zwei aufeinander folgende Tangenten mit den Axen machen, nämlich:

$$\frac{\xi_0'}{\sigma'},\ \frac{\eta_0'}{\sigma'},\ \frac{\zeta_0'}{\sigma'}\ \text{und}\ \frac{\xi_0'}{\sigma'}+d\frac{\xi_0'}{\sigma'},\ \frac{\eta_0'}{\sigma'}+d\frac{\eta_0'}{\sigma'},\ \frac{\zeta_0'}{\sigma'}+d\frac{\zeta_0'}{\sigma'}.$$

Diese Werthe geben dann $\sin^2 d\varphi$, wenn man folgende Beziehung aus der analytischen Geometrie bedenkt: Bilden zwei Gerade mit drei rechtwinkligen Coordinatenaxen Winkel, deren cos. sind $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ und bezeichnet δ den Winkel, den sie miteinander bilden, so ist:

$$\cos\delta = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu,$$

und daraus

$$\sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta = (\beta\nu - \gamma\mu)^2 + (\gamma\lambda - \alpha\nu)^2 + (\alpha\mu - \beta\lambda)^2.$$

Dies auf unseren Fall angewendet giebt:

$$\sin^2 d\varphi = (\partial\varphi)^2 = \left(\frac{\eta_0'}{\sigma'}d\frac{\zeta'}{\sigma'} - \frac{\zeta_0'}{\sigma'}d\frac{\eta_0'}{\sigma'}\right)^2 + \left(\frac{\zeta_0'}{\sigma'}d\frac{\xi_0'}{\sigma'} - \frac{\xi_0'}{\sigma'}d\frac{\zeta_0'}{\sigma'}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{\xi_0'}{\sigma'}d\frac{\eta_0'}{\sigma'} - \frac{\eta_0'}{\sigma'}d\frac{\xi_0'}{\sigma'}\right)^2 \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\varphi'^2}{\sigma'^2} = \frac{(\eta_0'\zeta_0'' - \zeta_0'\eta_0'')^2 + (\zeta_0'\xi_0'' - \xi_0'\zeta_0'')^2 + (\xi_0'\eta_0'' - \eta_0'\xi_0'')^2}{\sigma'^6}$$
$$= \frac{\xi_0''^2 + \eta_0''^2 + \zeta_0''^2 - \sigma''^2}{\sigma'^4}.$$

Die Gleichung in Verbindung mit (b.) spricht die Unveränderlichkeit des Contingenzwinkels aus.

Es ist noch nöthig, in den Ausdrücken die Werthe der Differentialquotienten zu bestimmen. Für unsere jetzige Untersuchung, wo die σ_1, σ_2, τ verschwinden, reduciren sich die Gleichungen (ε.) auf:

$$\frac{\partial\xi}{\partial a} = \alpha_1,\quad \frac{\partial\eta}{\partial a} = \beta_1,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial a} = \gamma_1,$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial b} = \alpha_2,\quad \frac{\partial\eta}{\partial b} = \beta_2,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial b} = \gamma_2.$$

Differenziren wir (a.) nach a und b, indem wir s und l als Functionen dieser Veränderlichen betrachten, so finden wir:

$$\frac{\partial\xi}{\partial a} = \xi_0'\left(\frac{\partial s}{\partial a} + \frac{1}{\sigma'}\frac{\partial l}{\partial a}\right) + l\,\frac{\xi_0''\sigma' - \sigma''\xi_0'}{\sigma'^2}\,\frac{\partial s}{\partial a}$$

und so die fünf anderen, die geben:

$$\frac{\partial\eta}{\partial a},\ \frac{\partial\zeta}{\partial a},\ \frac{\partial\xi}{\partial b},\ \frac{\partial\eta}{\partial b},\ \frac{\partial\zeta}{\partial b}. \qquad (e.)$$

Aus diesen Ausdrücken sind die Differentialquotienten von s und l zu entfernen. Wenn man dazu (b.) differenzirt und (c.) berücksichtigt, so findet man:

$$1 = \sigma'\cos\varphi\left(\frac{\partial s}{\partial a} + \frac{1}{\sigma'}\frac{\partial l}{\partial a}\right) - l\sin\varphi\,\varphi'\,\frac{\partial s}{\partial a},$$
$$0 = \sigma'\cos\varphi\left(\frac{\partial s}{\partial b} + \frac{1}{\sigma'}\frac{\partial l}{\partial b}\right) - l\sin\varphi\,\varphi'\,\frac{\partial s}{\partial b},$$

und noch zwei ebensolche Gleichungen.

Daraus kann dann berechnet werden:

$$\frac{\partial s}{\partial a}+\frac{1}{\sigma'}\frac{\partial l}{\partial a}=\frac{\cos\varphi}{\sigma'},\quad l\frac{\partial s}{\partial a}=-\frac{\sin\varphi}{\varphi'},$$
$$\frac{\partial s}{\partial b}+\frac{1}{\sigma'}\frac{\partial l}{\partial b}=\frac{\sin\varphi}{\sigma'},\quad l\frac{\partial s}{\partial b}=-\frac{\cos\varphi}{\varphi'},\qquad (\mathfrak{f}.)$$

Dies in (e.) eingesetzt giebt nach einiger Umformung mit (c.):

$$\sigma'^2\varphi'\alpha_1=\xi_0'b_0''-\xi_0''b_0',\quad \sigma^2\varphi'\alpha_2=-\xi_0'a_0''+\xi_0''a_0',$$
$$\sigma'^2\varphi'\beta_1=\eta_0'b_0''-\eta_0''b_0',\quad \sigma^2\varphi'\beta_2=-\eta_0'a_0''+\eta_0''a_0',$$
$$\sigma'^2\varphi'\gamma_1=\zeta_0'b_0''-\zeta_0''b_0',\quad \sigma_2\varphi'\gamma_2=-\zeta_0'a_0''+\zeta_0''a_0'.$$

Daraus entwickelt man dann mit Hülfe der allgemeinen Sätze aus der analytischen Geometrie:

$$\alpha=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1,$$
$$\beta=\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1,$$
$$\gamma=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,$$

die Formeln:

$$\sigma'^2\varphi'\alpha=\eta_0'\zeta_0''-\zeta_0'\eta_0'',$$
$$\sigma'^2\varphi'\beta=\zeta_0'\xi_0''-\xi_0'\zeta_0'',$$
$$\sigma'^2\varphi'\gamma=\xi_0'\eta_0''-\eta_0'\xi_0''.$$

In diesen Werthen ist l nicht vorhanden und nur noch s enthalten, mithin sind die Coordinatensysteme x, y, z aller längs einer Linie l gelegenen Elemente nicht blos im natürlichen Zustande der Platte, sondern auch noch nach der Biegung einander parallel. Darnach ist mit Hülfe von (f.): $\frac{\partial\alpha}{\partial a}=\alpha'\frac{\partial s}{\partial a}=-\frac{\sin\varphi}{l\varphi'}\alpha'$ u. s. w. Dies in die Werthe r und s, wie sie entwickelt sind aus (d.) S. 117, eingesetzt giebt:

$$r_2=\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{l}\,\Omega,\qquad s_1=-\frac{\cos^2\varphi}{l}\,\Omega,$$
$$r_2=\frac{\sin^2\varphi}{l}\,\Omega,\qquad s_2=-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{l}\,\Omega,$$

wo ist

$$\Omega=\frac{\xi_0'''(\eta_0'\zeta_0''-\zeta_0'\eta_0'')+\eta_0'''(\zeta_0'\xi_0''-\xi_0'\xi_6'')+\zeta_0'''(\xi_0'\eta_0''-\eta_0'\xi_0'')}{\varphi'^3\sigma'^3}.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke müssen wir unsere Gleichgewichtsbedingungen (τ) und (τ') verwerthen. Wir brauchen hier von diesen Gleichungen nur die beiden letzten von (τ) und die drei letzten von (τ'). Wir berechnen λ_1 und λ_2 aus (τ) und setzen es in (τ') ein, wobei die eben näherungsweise gefundenen Werthe von α, β, γ, r, s durch Functionen von ξ_0, η_0, ζ_0 benutzt werden. Wir erhalten so drei Differentialgleichungen, welche ξ_0, η_0, ζ_0, l, φ, σ, λ_1' enthalten. Noch kann darin vorkommen a_0, b_0, insofern es möglich ist, dass die auf einen Punkt des Randes wirkenden Kräfte von der Lage des Ortes abhängig sein können, an dem dieser Punkt sich ursprünglich befand.

Zwischen den in den nun erhaltenen Differentialgleichungen vorkomkommenden Grössen können noch Gleichungen aufgestellt werden. Nach (b.) und (c.) ist: $a_0=a-l\cos\varphi$, $b_0=b-l\sin\varphi$,

wo a und b, die ursprünglichen Coordinaten eines Randelementes, gegebene Functionen von s sind. Da nun gemäss der Bedeutung von p ist

$$a' = -\sin p, \quad b' = \cos p,$$

so erhalten wir durch Differentiation von (g.) mit Berücksichtigung von (c.):

$$\sigma' \cos \varphi = -\sin p - l' \cos \varphi + l\varphi' \sin \varphi,$$
$$\sigma' \sin \varphi = \cos p - l' \sin \varphi + l\varphi' \cos \varphi,$$

oder transformirt:

$$\left.\begin{aligned}\sigma' &= \sin(\varphi - p) - l',\\ 0 &= -\cos(\varphi - p) + l\varphi'.\end{aligned}\right\} \quad (\mathfrak{h}.)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen können l und σ' entfernt werden, so dass nur ξ_0, η_0, ζ_0, φ, λ_1' bleiben, von denen λ_1' leicht zu eliminiren ist. Ausserdem gilt noch die Gleichung: $\xi_0'^2 + \eta_0'^2 + \zeta_0'^2 = \sigma'^2$ und die Gleichung, welche man erhält durch Gleichsetzung der Krümmungshalbmesser, so dass wir nach Elimination von λ_1' im Ganzen noch 4 Gleichungen behalten mit den 4 Unbekannten ξ_0, η_0, ζ_0, φ, die also dadurch bestimmt werden können.

2) Nachdem nun durch 1) näherungsweise die Biegung bestimmt ist, setze man die erhaltenen Werthe in die ersten drei Gleichungen (τ) ein, so können daraus die Dilatationen σ_1, σ_2, τ berechnet werden.

3) Um endlich die geforderte Correction zu finden, setzen wir $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, ... $\bar{\alpha}$, ... die oben näherungsweise gefundenen Werthe und $\bar{\bar{\xi}}$, $\bar{\bar{\eta}}$ ... $\bar{\bar{\alpha}}$ ... die anzubringenden Correctionen, so dass also die vollständigen Werthe sind:

$$\xi = \bar{\xi} + \bar{\bar{\xi}}, \quad \eta = \bar{\eta} + \bar{\bar{\eta}}, \ldots \quad \alpha = \bar{\alpha} + \bar{\bar{\alpha}}, \ldots$$

von denen die letzteren nur gelten, weil die $\bar{\bar{\alpha}}$ etc. sehr kleine Grössen sind.

Führt man die letzteren Werthe in die zwei ersten Gruppen der Gleichungen (d.) S. 98 ein und bedenkt, dass denselben die Werthe α, β ... und auch $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ ... allein genügen, so erhält man:

$$\bar{\alpha}_1 \bar{\bar{\alpha}}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\bar{\beta}}_1 + \bar{\gamma}_1 \bar{\bar{\gamma}}_1 = 0,$$

und ebenso mit den anderen Indices.

$$(\bar{\alpha}_1 \bar{\bar{\alpha}}_2 + \bar{\beta}_1 \bar{\bar{\beta}}_2 + \bar{\gamma}_1 \bar{\bar{\gamma}}_2) + (\bar{\alpha}_2 \bar{\bar{\alpha}}_1 + \bar{\beta}_2 \bar{\bar{\beta}}_1 + \bar{\gamma}_2 \bar{\bar{\gamma}}_1) = 0$$

und ebenso zwei andere.

Alle diese Gleichungen erfüllt man gleichzeitig, wenn man statt der 9 Grössen $\bar{\bar{\alpha}}$, $\bar{\bar{\beta}}$ ... 3 Grössen q, q_1, q_2 einführt und erstere durch diese ausdrückt mittelst der Formeln:

$$\bar{\bar{\alpha}}_1 = q_2 \bar{\alpha} - q \bar{\alpha}_2, \quad \bar{\bar{\alpha}}_2 = q \bar{\alpha}_1 - q_1 \bar{\alpha}, \quad \bar{\bar{\alpha}} = q_1 \bar{\alpha}_2 - q_2 \bar{\alpha}_1$$

und entsprechende für die β und γ. Dies in die r und s eingesetzt giebt für die Correctionen dieser Grössen folgende Ausdrücke:

$$\bar{\bar{r}}_1 = \frac{\partial q_1}{\partial a} + q_2 \bar{r}_0 - q \bar{r}_2, \quad \bar{\bar{s}}_1 = \frac{\partial q_1}{\partial b} + q_2 \bar{s}_0 - q \bar{s}_2,$$

$$\bar{\bar{r}}_2 = \frac{\partial q_2}{\partial a} + q \bar{r}_1 - q_1 \bar{r}_0, \quad \bar{\bar{s}}_2 = \frac{\partial q_2}{\partial b} + q \bar{s}_1 - q_1 \bar{s}_0,$$

$$\bar{\bar{r}}_0 = \frac{\partial q}{\partial a} + q_1 \bar{r}_2 - q_2 \bar{r}_1, \quad \bar{\bar{s}}_0 = \frac{\partial q}{\partial b} + q_1 \bar{s}_2 - q_2 \bar{s}_1.$$

Die Correctionen der Grössen $\frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial \xi}{\partial b}, \dots$ folgen aus (ε.) S. 116, indem man die Grössen Nullter-Ordnung, die auf beiden Seiten bereits gleich sind, fortlässt und nur die Grössen erster Ordnung beibehält. Aus den so erhaltenen 6 Gleichungen können dann die unbekannten Functionen q eliminirt werden, so dass noch 3 Differentialgleichungen, welche die durch 2) nun bekannten Dilatationen enthalten, übrig bleiben zur Bestimmung der $\overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{\eta}}, \overline{\overline{\zeta}}$. Die Ausführung der hier angedeuteten Rechnungen giebt:

$$\sigma_1 = \bar{\alpha}_1 \frac{\partial \overline{\overline{\xi}}}{\partial a} + \bar{\beta}_1 \frac{\partial \overline{\overline{\eta}}}{\partial a} + \bar{\gamma}_1 \frac{\partial \overline{\overline{\zeta}}}{\partial a},$$

$$\sigma_2 = \bar{\alpha}_2 \frac{\partial \overline{\overline{\xi}}}{\partial b} + \bar{\beta}_2 \frac{\partial \overline{\overline{\eta}}}{\partial b} + \bar{\gamma}_2 \frac{\partial \overline{\overline{\zeta}}}{\partial b},$$

$$\tau = \bar{\alpha}_2 \frac{\partial \overline{\overline{\xi}}}{\partial a} + \bar{\beta}_2 \frac{\partial \overline{\overline{\eta}}}{\partial a} + \bar{\gamma}_2 \frac{\partial \overline{\overline{\zeta}}}{\partial a},$$

$$+ \bar{\alpha}_1 \frac{\partial \overline{\overline{\xi}}}{\partial b} + \bar{\beta}_1 \frac{\partial \overline{\overline{\eta}}}{\partial b} + \bar{\gamma}_1 \frac{\partial \overline{\overline{\zeta}}}{\partial b}.$$

5. Kleine Verschiebungen.

Bei kleinen Verschiebungen können wir die ursprüngliche Lage bereits als erste Annäherung betrachten. Unter diesen Umständen fallen überall die Axen der x, y, z zusammen mit den x′, y′, z′Axen und die erste Annäherung besteht darin, dass $\bar{\alpha}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\gamma} = 1$, $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\beta}_1 = \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0$ ist. Dann erhält man zunächst nach den am Schluss von 4) angegebenen Rechnungen:

$$\frac{\partial \overline{\overline{\xi}}}{\partial a} = \sigma_1, \qquad \frac{\partial \overline{\overline{\eta}}}{\partial a} = -q, \qquad \frac{\partial \overline{\overline{\zeta}}}{\partial a} = q_2,$$

$$\frac{\partial \overline{\overline{\xi}}}{\partial b} = q + \tau, \qquad \frac{\partial \overline{\overline{\eta}}}{\partial b} = \sigma_2, \qquad \frac{\partial \overline{\overline{\zeta}}}{\partial b} = -q_1.$$

Daraus $\tau = \frac{\partial \overline{\overline{\xi}}}{\partial b} + \frac{\partial \overline{\overline{\eta}}}{\partial a}$.

Die $\bar{r}$ und $\bar{s}$ müssen verschwinden, da die cos constant sind, also fallen die $\overline{\overline{r}}$ und $\overline{\overline{s}}$ mit den r und s zusammen. Dies giebt hier:

$$r_1 = \frac{\partial q_1}{\partial a} = -\frac{\partial^2 \overline{\overline{\zeta}}}{\partial a \partial b}, \qquad s_1 = \frac{\partial q_1}{\partial b} = -\frac{\partial^2 \overline{\overline{\zeta}}}{\partial b^2},$$

$$r_2 = \frac{\partial q_2}{\partial b} = \frac{\partial^2 \overline{\overline{\zeta}}}{\partial a^2}, \qquad s_2 = \frac{\partial q_2}{\partial b} = \frac{\partial^2 \overline{\overline{\zeta}}}{\partial a \partial b},$$

$$r_0 = \frac{\partial q}{\partial a} = -\frac{\partial^2 \overline{\overline{\eta}}}{\partial a^2}, \qquad s_0 = \frac{\partial q}{\partial b} = -\frac{\partial^2 \overline{\overline{\eta}}}{\partial a \partial b}.$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichgewichtsgleichungen (τ) und (τ') ein und lassen nunmehr die Striche weg. Es ist aber hier nicht nothwendig,

bei der Berechnung der Spannungen mehr als die Terme niedrigster Ordnung beizubehalten, denn diese werden bereits von einer höheren Ordnung, als in dem Falle endlicher Biegung, indem die früher endlichen Grössen r, s hier Grössen der ersten Ordnung sind.

Die resultirenden Gleichungen sind:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2}+\mu\frac{\partial^2\eta}{\partial a\partial b}+\frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)+\frac{(1-\mu^2)}{hE}A'=0,$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial b^2}+\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial a\partial b}+\frac{(1-\mu)}{2}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)+\frac{(1-\mu^2)}{hE}B'=0,$$

mit den Grenzbedingungen

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\mu\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)\cos p+\frac{(1-\mu)}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)\sin p=\frac{(1-\mu^2)}{hE}U',$$

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial b}+\mu\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\sin p+\frac{(1-\mu)}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)\cos p=\frac{(1-\mu^2)}{hE}V' \qquad \text{(A.)}$$

und

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial a^4}+2\frac{\partial^4\zeta}{\partial a^2\partial b^2}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial b^4}=\frac{12(1-\mu^2)}{h^3E}\left(C'+\frac{\partial A''}{\partial a}+\frac{\partial B''}{\partial b}\right)$$

$$+\frac{12}{h^2}\left\{\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}+\mu\frac{\partial\eta}{\partial b}\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial b}+\mu\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2}+(1-\mu)\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\right)\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\,\partial b}\right\}$$

mit den Grenzbedingungen

$$(1-\mu)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2}\sin^2p+\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2}\cos^2q+2\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\partial b}\sin p\cos q\right)+\mu\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2}\right)$$

$$=\frac{12(1-\mu^2)}{h^3E}(U''\cos p+V''\sin p),$$

$$(1-\mu)\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial^2 a}\right)\sin p\cos p+\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\,\partial b}(\cos^2p-\sin^2p\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial a^3}+\frac{\partial^3\zeta}{\partial a\,\partial b^2}\right)\cos p+\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial b^3}+\frac{\partial^3\zeta}{\partial b\,\partial a^2}\right)\sin p=$$

$$\frac{12(1-\mu^2)}{h^3E}\left[A''\cos p+B''\sin p-W'+\frac{\partial(U''\sin p-V''\cos p)}{\partial s}\right]. \qquad \text{(B.)}$$

Hier haben sich unter (A.) diejenigen Gleichungen abgesondert, welche die Verschiebungen parallel der Mittelfläche enthalten, während die Gleichungen unter (B.) die Verschiebungen senkrecht zur Mittelfläche ergeben, wenn die ersteren bekannt sind.

Die Gleichung unter (B.), in der ξ und η vorkommt, vereinfacht sich, wenn wir annehmen, dass die Verschiebungen parallel der Mittelfläche nur in einer gleichförmigen Ausdehnung bestehen, welche der ganzen Platte mitgetheilt ist. Für eine kreisförmige Scheibe, wo wir die auf das Innere wirkenden Kräfte A′ und B′ gleich 0 setzen, wollen wir statt der auf den Rand wirkenden Kräfte U′, V′ eine überall normal wirkende Zugkraft, welche auf die Flächeneinheit = T sei, wirken lassen, dann ist

$$U'=Th\cos p,\qquad V'=Th\sin p.$$

Es ist dann, wenn wir dem Anfangspunkt der a, b keine Verrückung parallel der Mittelfläche ertheilen, die Lösung der Gleichungen (A.):

$$\xi = \varepsilon a, \quad \eta = \varepsilon b, \quad \varepsilon = (1 - \mu) E T$$

und die erste Gleichung von (B.) wird dann:

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial a^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial a^2 \partial b^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial b^4} - \frac{12 \varepsilon}{h^2} (1 + \mu) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial b^2} \right)$$
$$= \frac{12 (1 - \mu^2)}{h^3 E} \left(C' + \frac{\partial A''}{\partial a} + \frac{\partial B''}{\partial b} \right). \qquad (B^*)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen hat nun Clebsch folgende Probleme gelöst: Kleine Verschiebungen einer kreisförmigen Platte in ihrer Ebene § 74, senkrecht gegen ihre Ebene § 75. Biegung einer am Rande eingespannten kreisförmigen Platte durch ein einzelnes Gewicht § 76.

II. Wellenbewegung, Akustik.

Beziehungen zwischen den Grössen der Wellenbewegung. (§ 224.)

1. Die beschleunigende Kraft sei proportional der Entfernung von der Gleichgewichtslage.

Die Kraft, welche die Masse m in der Entfernung s zurücktreibt, sei $m\varkappa s$. Setzen wir diese gleich $-m\frac{d^2s}{dt^2}$, so erhalten wir zur Bestimmung der gewünschten Grössen nach Division durch m die Differentialgleichung

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\varkappa s.$$

Wir geben der rechten Seite das negative Zeichen, weil die Richtung, nach der die schwingende Masse gezogen wird, immer der Richtung entgegengesetzt ist, nach welcher dieselbe aus der Gleichgewichtslage entfernt ist. Durch Multiplication dieser Gleichung mit $v = \frac{ds}{dt}$ und dt erhalten wir

$$v\,dv = -\varkappa s\,ds.$$

Deren Integral ist:

$$v^2 = -\varkappa s^2 + c.$$

Setzen wir zur Bestimmung der willkürlichen Constanten c die Geschwindigkeit $v = 0$, wenn $s = r$ ist, so ergiebt sich $c = \varkappa r^2$. Es ist also

$$v^2 = \varkappa (r^2 - s^2)$$

oder

$$\frac{ds}{\sqrt{\varkappa}\,\sqrt{r^2 - s^2}} = dt.$$

Deren Integral ist:

$$\frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \arcsin \frac{s}{r} = t + c'.$$

Setzen wir $s = 0$, wenn $t = 0$ ist, so ergiebt sich $c' = 0$. Wir erhalten also schliesslich:

$$s = r \sin (\sqrt{\varkappa}\, t) \text{ und } \frac{ds}{dt} = v = r\sqrt{\varkappa} \cos (\sqrt{\varkappa}\, t).$$

Zählen wir die Zeit anders, so dass $s = r$ wird, wenn $t = 0$ ist, so erhalten wir $c' = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}\pi$, mithin

$$s = r \sin(\sqrt{\varkappa}\,t + \tfrac{1}{2}\pi) = r \cos(\sqrt{\varkappa}\,t) \text{ und } v = -r\sqrt{\varkappa}\sin(\sqrt{\varkappa}\,t).$$

Die Integration unserer Gleichung $\frac{d^2s}{dt^2} = -\varkappa s$ kann auch anders und in grösserer Uebereinstimmung mit dem Folgenden vorgenommen werden. Es genügt nämlich derselben das particuläre Integral

$$s = e^{\alpha t},$$

wo α bestimmt wird durch Einsetzung dieses Ausdrucks in die gegebene Gleichung. Dadurch erhalten wir

$$\alpha^2 + \varkappa = 0, \text{ mithin } \alpha = \pm\sqrt{\varkappa}\,i.$$

Aus diesen beiden Particularlösungen ergiebt sich

$$s = Ce^{\sqrt{\varkappa}\,ti} + C'e^{-\sqrt{\varkappa}\,ti}$$

oder

$$s = A\cos(\sqrt{\varkappa}\,t) + B\sin(\sqrt{\varkappa}\,t).$$

Die Bestimmung der Constanten geschieht nun wie oben. Wir setzen $s = r$ und $v = 0$, wenn $t = 0$ ist, und finden dann $A = r$ und $B = 0$ und damit die obigen Gleichungen.

2. Schwingungen im widerstehenden Medium.

1) Sei der Widerstand des Mediums, in dem der Körper schwingt, der augenblicklichen Geschwindigkeit der sich bewegenden Masse proportional.

Bezeichnen wir die Verzögerung, welche die Masse m bei der Geschwindigkeit 1 erfährt, mit $2\varepsilon m$, so ist die Verzögerung, welche m bei der Geschwindigkeit v erfährt, $2\varepsilon m v$. Es ist demnach die zu integrirende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\varkappa s - 2\varepsilon v.$$

Ein particuläres Integral derselben ist

$$s = e^{\alpha t}.$$

Die Einsetzung dieses Werthes in die Differentialgleichung giebt:

$$\alpha^2 = -\varkappa - 2\varepsilon\alpha, \text{ also } \alpha = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \varkappa}.$$

Mithin ist

$$s = Ce^{-\varepsilon t}e^{\sqrt{\varkappa - \varepsilon^2}\,i} + C'e^{-\varepsilon t}e^{-\sqrt{\varkappa - \varepsilon^2}\,i}$$

oder

$$s = e^{-\varepsilon t}[A\cos(\sqrt{\varkappa - \varepsilon^2}\,t) + B\sin(\sqrt{\varkappa - \varepsilon^2}\,t)].$$

Zur Bestimmung einer der willkürlichen Constanten rechnen wir die Zeit so, dass $s = 0$ wird, wenn $\sqrt{\varkappa - \varepsilon^2}\,t = \frac{\pi}{2}$ ist. Diese Bedingung giebt $B = 0$, also ist:

$$s = e^{-\varepsilon t}A\cos(\sqrt{\varkappa - \varepsilon^2}\,t).$$

Bei der hierdurch charakterisirten Schwingungsbewegung ist immer $s = 0$, wenn $\cos\sqrt{x^2 - \varepsilon}\, t = 0$ oder $\sqrt{x^2 - \varepsilon^2}\, t = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ ist, wo $n = 0, 1, 2 \ldots$ ist. Ferner sind alle verschiedenen Phasen durchgemacht, wenn t alle Werthe durchläuft, die gegeben sind durch

$$\sqrt{x - \varepsilon^2}\, t = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \text{ bis } \sqrt{x - \varepsilon^2}\, t = (2n + 5)\frac{\pi}{2}.$$

Es ist demnach die Schwingungsdauer T gegeben durch $T\sqrt{x - \varepsilon^2} = 2\pi$, also $T = \frac{2\pi}{\sqrt{x - \varepsilon^2}}$, selbstverständlich grösser als ohne Berücksichtigung des Widerstandes.

Setzen wir T in die Schwingungsgleichung ein, so erhalten wir folgende Form derselben:

$$s = A e^{-\varepsilon t} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

Vergleicht man diese Formel mit der in 1) gefundenen $s = r\cos(\sqrt{x}\, t)$, so sieht man, dass, während dort die Amplitude constant $= r$ ist, sich dieselbe hier mit der Zeit ändert.

Die Amplituden sind für

$$t = \frac{T}{4}, \qquad 3.\frac{T}{4}, \qquad 5.\frac{T}{4}, \ldots (2n + 1)\frac{T}{4}$$

$$A e^{-\varepsilon\frac{T}{4}}, \qquad A e^{-\varepsilon 3.\frac{T}{4}}, \qquad A e^{-\varepsilon 5.\frac{T}{4}}, \ldots . A e^{-\varepsilon(2n + 1)\frac{T}{4}}.$$

Diese Werthe bilden eine geometrische Progression mit dem Exponenten $e^{-\varepsilon\frac{T}{2}}$. Der absolute Werth des log dieses Progressionsexponenten $\varepsilon\frac{T}{2}\log e$ ist eine Constante, die proportional der verzögernden Kraft ist. Diese Grösse nennt Gauss (Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins 1857, S. 55) das logarithmische Decrement der Schwingungen.

3. Berücksichtigung des Quadrates der Verschiebung.*)

Wenn die Schwingungsamplituden gross sind, werden die Quadrate der Verschiebungen noch einen merklichen Einfluss auf die Grösse der Bewegungskräfte ausüben, so dass wir dann folgende Differentialgleichung erhalten:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\mu s - b s^2.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setzen wir für s eine Reihe, geordnet nach Potenzen einer kleinen Grösse ε, also

$$s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2 + \varepsilon^3 s_3 + \ldots .$$

*) Helmholtz, Pogg. Ann. 99.

Zur Bestimmung der Grössen s_1, s_2... erhalten wir, wenn wir die Reihe für s in die gegebene Differentialgleichung einsetzen, nach der Methode der unbestimmten Coefficienten folgende Gleichungen:

$$-\frac{d^2 s_1}{dt^2} = \mu s_1, \qquad \text{(a.)}$$

$$-\frac{d^2 s_2}{dt^2} = \mu s_2 + b s_1^2, \qquad \text{(b.)}$$

$$-\frac{d^2 s_3}{dt^2} = \mu s_3 + 2 b s_1 s_2 \dots \qquad \text{(c.)}$$

Nun ist nach 1) $s_1 = r \sin(\sqrt{\mu}\, t)$, wenn für $t = 0$ ist $s_1 = 0$. Führt man diesen Werth in (b.) ein, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} = -\mu s_2 - b r^2 \sin^2(\sqrt{\mu}\, t).$$

Das Integral dieser Gleichung ist, wie man sich durch Differenzirung überzeugen kann:

$$s_2 = r \sin(\sqrt{\mu}\, t) - \tfrac{1}{2}\frac{br^2}{\mu} - \tfrac{1}{6}\frac{br^2}{\mu}\cos(2\sqrt{\mu}\, t),$$

wo die Constanten unter den trigonometrischen Functionen der physikalischen Deutung (§ 259) wegen entfernt werden können.

Dies giebt, wenn wir hierbei stehen bleiben (cf. § 259):

$$s = \varepsilon r \sin(\sqrt{\mu}\, t) + \varepsilon^2 \left[r \sin(\sqrt{\mu}\, t + \tfrac{1}{2}\frac{br^2}{\mu} - \tfrac{1}{6}\frac{br^2}{\mu}(\tfrac{1}{2}\pi - 2\sqrt{\mu}\, t) \right].$$

Fortpflanzungsgeschwindigkeit. (§ 225.)

1. Gleichung eines Wellenstrahles.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$s = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

und legen durch den Anfangspunkt der Bewegung drei neue zu einander rechtwinklige Axen x', y', z', welche mit der alten Richtung von x, der Normalen zur Wellenebene, Winkel, deren cos respective m, n, p sind, einschliessen. Sind nun x', y', z' die Coordinaten des schwingenden Theilchens, so ist

$$x' = xm, \quad y' = xn, \quad z' = xp.$$

Werden diese Gleichungen bez. mit m, n, p multiplicirt, addirt und berücksichtigt, dass $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ ist, so erhält man:

$$x = x'm + y'n + z'p,$$

also

$$s = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'm + y'n + z'p}{\lambda}\right).$$

Macht ferner s mit den neuen Axen Winkel, deren cos sind α, β, γ, so kann man setzen statt der einen Schwingung die nach den drei neuen Axen stattfindenden:

$$u = r\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'm + y'n + z'p}{\lambda}\right),$$
$$v = r\beta \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'm + y'n + z'p}{\lambda}\right),$$
$$w = r\gamma \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'm + y'n + z'p}{\lambda}\right).$$

Bezeichnet man mit Θ den Winkel, den die Schwingungsrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung macht, so ist:

$$\cos \Theta = \alpha m + \beta n + \gamma q.$$

Für $\begin{matrix}\text{longitudinale}\\ \text{transversale}\end{matrix}$ Schwingungen ist dann $\cos \Theta = \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$.

2. Fortpflanzungsgeschwindigkeit in festen Körpern.

In § 64, 7., S. 14 sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines homogenen elastischen Mediums aufgestellt worden. In diesen Gleichungen ist $X = Y = Z = 0$ zu setzen, da von den Kräften von Aussen auf die Masse hier abgesehen werden muss; denn es handelt sich um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung allein abhängig vom Material. Wir verlegen den Coordinatenanfang in die erste ebene Welle. In einem Abstande D vom Coordinatenanfang ist dann die Gleichung der ebenen Welle $D = mx + ny + pz$, wo nun der Einfachheit wegen die in 1) geschriebenen Accente wegfallen. Es wird demnach ein Molekül dieser zweiten Welle $\frac{mx + ny + pz}{c}$ Zeiteinheiten dem Anfangselemente in der Schwingung nach sein. Ist demnach der Schwingungszustand im Erregungspunkt gegeben durch $s_0 = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T}\right)$, so ist derselbe in der Entfernung D vom Erregungspunkt $s = r \sin 2\pi \left(\frac{t - \frac{mx + ny + pz}{c}}{T}\right)$, wobei der Kleinheit der Schwingungen wegen vorausgesetzt ist, dass die Amplituden sich nicht geändert haben. Seien ferner α, β, γ die cos der Winkel, welche die Schwingungsrichtung mit den Axen bildet, so ist nach den Bezeichnungen von § 64 und 1): $u = \alpha s$, $v = \beta s$, $w = \gamma s$
und mithin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha r \frac{2\pi m}{cT} \cos 2\pi \left(\frac{t - \frac{mx+ny+pz}{c}}{T}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\beta r \frac{2\pi n}{cT} \cos 2\pi \left(\frac{t - \frac{mx+ny+pz}{c}}{T}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\gamma r \frac{2\pi p}{cT} \cos 2\pi \left(\frac{t - \frac{mx+ny+pz}{c}}{T}\right).$$

und ebenso die anderen Differentialquotienten, also z. B.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha . \frac{4\pi^2 m^2}{c^2 T^2} s, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha . \frac{4\pi^2 n^2}{c^2 T^2} s, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \alpha . \frac{4\pi^2 p^2}{c^2 T^2} s.$$

So erhält man dann:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} (\alpha m + \beta n + \gamma p) s$$

und dem entsprechend $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$.

Durch Einsetzung dieser Werthe in die allgemeinen Bewegungsgleichungen § 64, 7. (A′), S. 14 erhält man dann nach Division durch $\frac{4\pi^2}{c^2 T^2}$ und gehöriger Reduction:

$$\begin{aligned}
&\frac{E}{2(1+\mu)}\left[\alpha + \frac{1}{1-2\mu} m (\alpha m + \beta n + \gamma p)\right] - \alpha d c^2 = 0,\\
&\frac{E}{2(1+\mu)}\left[\beta + \frac{1}{1-2\mu} n (\alpha m + \beta n + \gamma p)\right] - \beta d c^2 = 0, \quad (*)\\
&\frac{E}{2(1+\mu)}\left[\gamma + \frac{1}{1-2\mu} p (\alpha m + \beta n + \gamma p)\right] - \gamma d c_2 = 0.
\end{aligned}$$

Indem man nun diese Gleichungen respective mit m, n, p multiplicirt und dann addirt, erhält man:

$$(\alpha m + \beta n + \gamma p)\left[\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} - d . c^2\right] = 0.$$

Dieser Bedingungsgleichung können wir, da sie aus zwei Factoren besteht, auf zweierlei Art genügen.

$$1) \quad \frac{E(1-\mu)}{d(1+\mu)(1-2\mu)} = c^2.$$

Führt man diesen für c^2 erhaltenen Werth in die Bedingungsgleichungen ein, so reduciren sich dieselben auf:

$$\alpha = m(\alpha m + \beta n + \gamma p), \quad \beta = n(\alpha m + \beta n + \gamma p), \quad \gamma = p(\alpha m + \beta n + \gamma p).$$

Wenn nun diese Gleichungen respective mit α, β, γ multiplicirt und dann addirt werden, so ergiebt sich:

$$(\alpha m + \beta n + \gamma p)^2 = 1.$$

Da aber nach 1) $\alpha m + \beta n + \gamma p = \cos \Theta$ ist, so folgt $\Theta = 0$, d. h. es fällt die Schwingungsrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung zusammen. Das gefundene c bezieht sich demnach auf die longitudinalen Schwingungen.

2) $\alpha m + \beta n + \gamma p = 0$. Nach der eben gemachten Erörterung ist diese Bedingung erfüllt für Transversalschwingungen. Setzt man diese Bedingung in (*) ein und bezeichnet die hierher gehörige Fortpflanzungsgesshwindigkeit mit c′, so erhält man:

$$\frac{E}{2(1+\mu) d} = c'^2.$$

Die Vergleichung dieser Werthe für die Fortpflanzungsgeschwindig-

keiten giebt $\frac{c^2}{c'^2} = \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}$. Nun ist jedenfalls $1-\mu > 1-2\mu$, also pflanzen sich die longitudinalen Wellen schneller als die transversalen fort.

Ist μ (§ 65) $= 0{,}3$, so ist $\frac{c^2}{c'^2} = 3{,}5$.

3. Die allgemeinen Gleichungen, welche die oscillatorischen Bewegungen in festen Körpern von constanter Elasticität bestimmen.

Werden die eben erhaltenen Werthe der Geschwindigkeiten in die allgemeinen Bewegungsgleichungen eingeführt, so nehmen dieselben die folgende Form an:

$$c^2 \frac{\partial V}{\partial x} + c'^2 \left[\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$c^2 \frac{\partial V}{\partial y} + c'^2 \left[\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$c^2 \frac{\partial V}{\partial y} + c'^2 \left[\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial y} \right] = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

A. Schwingungen mit Dilatationen.

Für diese müssen die Factoren von c' verschwinden. Es bleibt daher

$$c^2 \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c^2 \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad c^2 \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad \text{(a.)}$$

Die Factoren von c' verschwinden, wenn wir setzen

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad \text{(b.)}$$

wo ψ eine Function ist, die ebenso periodisch ist, wie u, v, w.

Wird nun von den Gleichungen (a.) die zweite nach z, die dritte nach y differenzirt und deren Differenz gebildet, so erhält man die erste der folgenden Gleichungen. Die beiden anderen erhält man durch ähnliche Rechnungen:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

das ist nach (b.):

$$\frac{\partial^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \frac{\partial \psi}{\partial z}}{\partial t^2} = 0.$$

Dies ist nur möglich, da ψ eigentlich periodisch ist, wenn $\psi = 0$ ist. Die nothwendig zu erfüllenden Bedingungen sind demnach:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dadurch ist aber bewiesen, dass es eine periodische Function F giebt, so dass

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial F}{\partial z},$$

und es ist dann

$$dF = u\,dx + v\,dy + w\,dx.$$

Weil $V = \Delta F$, wo Δ abgekürzt gesetzt wird für $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, gehen die drei Gleichungen (a.) über in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \Delta F.$$

B. Schwingungen ohne Dilatation.

Es ist hier $V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ zu setzen, damit der Factor von c verschwindet. Dieser Bedingung ist genügt, wenn wir schreiben:

$$u = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \text{(c.)}$$

wo ξ, η, ζ eben solche periodische Functionen wie u, v, w sind.

Diese Functionen ξ, η, ζ sollen nun in die noch übrig bleibenden Coefficienten von c'^2 eingesetzt werden. Es ist

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} - \Delta\xi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} - \Delta\eta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} - \Delta\zeta,$$

wo statt $\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ abgekürzt $\tilde{\omega}$ gesetzt ist.

Dies in die erste Bewegungsgleichung eingeführt giebt:

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)}{\partial t^2} = c'^2 \left(\frac{\partial \Delta\eta}{\partial z} - \frac{\partial \Delta\zeta}{\partial y}\right)$$

oder

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c'^2 \Delta\eta\right)}{\partial z} = \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c'^2 \Delta\zeta\right)}{\partial y}.$$

Die beiden anderen Gleichungen transformiren sich dem entsprechend und geben dann zusammen mit der ersten

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c'^2 \Delta\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c'^2 \Delta\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c'^2 \Delta\zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad \text{(d.)}$$

Hier kann die Funktion φ entfernt werden; denn die Werthe (c.), wo die ξ, η, ζ den Gleichungen (d.) genügen, geben, was auch φ sei:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c'^2 \Delta u, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c'^2 \Delta v, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c'^2 \Delta w.$$

Man findet demnach die u, v, w durch (c.), wenn man die ξ, η, ζ bestimmt hat nach (d.) durch die Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c'^2 \Delta F.$$

Auf diese Form der Differentialgleichung kommen wir zurück § 229, nur haben dort die u, v, w andere Bedeutung.

4. Angenäherte Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

1) Longitudinalschwingungen.

Wir gehen aus von der Gleichung $s = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right)$.

Nehmen wir drei Punkte A, B, C in einem gegenseitigen Abstand dx von einander und lassen A sich verschieben um s_1, B um s und C um s_2, so ist die Aenderung von AB: $s - s_1$, die von BC: $s_2 - s$. Nach § 65 ist demnach die Spannung im verschobenen Punkte B von A her, wenn E den Elasticitätsmodul (§ 64, 6.) bedeutet $\frac{Eq(s - s_1)}{dx}$ und vom Punkt C her $\frac{Eq(s_2 - s)}{dx}$, wo q den Querschnitt bezeichnet. Die resultirende Kraft ist daher $\frac{Eq[(s_2 - s) - (s - s_1)]}{dx}$; dies ist aber nach der gewöhnlichen Bezeichnung $Eq \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx$, oder nach Ausführung der Differentiation $-Eq \frac{4\pi}{c^2 T^2} s\, dx$, da $l = cT$ ist. Ist nun d die Dichtigkeit des Materials, d. h. die Menge der Masse in der Volumeneinheit, so enthält q dx die Masse d q dx. Mithin ist die auf die Masseneinheit wirkende Kraft $\frac{4\pi^2 Es}{dc^2T^2}$. Dies ist aber nach § 224 $\varkappa s$. Da nun dort gefunden ist $\varkappa = \frac{4\pi^2}{T^2}$, so ist

$$\frac{4\pi^2 Es}{dc^2T^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} s, \quad \text{also} \quad c = \sqrt{\frac{E}{d}}.$$

2) Eine ähnliche Betrachtung giebt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen, nur ist dem E ein constanter Coefficient beizufügen, der die Aenderung des E bezeichnet, da die Verschiebung gegen die Verbindungsrichtung der Moleküle geneigt ist.

Die Aenderungen von AB und BC sind hier

$$\sqrt{dx^2 + (s - s_1)^2} - dx, \qquad \sqrt{dx^2 + (s_2 - s)^2} - dx,$$

Bei kleinen Werthen von s sind diese Grössen bis auf Kleines der zweiten Ordnung gleich $s - s_1$ und $s_2 - s$, also erhalten wir dieselben Ausdrücke wie bei den Longitudinalschwingungen, mithin ist

$$c = C\sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Vergl. dazu § 279, 5,

3) Für die Torsionsschwingungen gehen wir aus von § 68. Es ist nämlich mit den dort eingeführten Bezeichnungen und analog dem Obigen zu setzen $\mathfrak{D} = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right)$. Wenn wir nun drei Punkte in dem gegenseitigen Abstand dx nehmen, so ist das Drehungsmoment

$$G \frac{d^2\mathfrak{D}}{dx^2} dx \int r^2 dq = -G \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} \mathfrak{D}\, dx \int r^2 dq.$$

Nun ist hier $\varkappa$ die Beschleunigung, mit der ein Punkt in der Entfernung 1 in die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird, wenn die Verschiebung seiner Punkte $\mathfrak{D}$ gleich 1 wird. Wenn nun wieder d die Dichtigkeit des Materials ist, so ist die in der Entfernung 1 zu setzende Masse $d . dx \int r^2 dq$, also da unsere Gleichheit sich bezieht auf die Masseneinheit, muss obiger Ausdruck damit dividirt werden. Es ist mithin $\varkappa = G \frac{4\pi^2}{c^2 T^2 d}$, da nun ausserdem $\varkappa = \frac{4\pi^2}{T^2}$ ist, so erhält man

$$1 = \frac{G}{d c^2}, \text{ also } c = \sqrt{\frac{G}{d}} \text{ oder nach § 73, 3. } c = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)} \frac{1}{d}}.$$

Die obige Entwickelung giebt dann im Vergleich mit § 224 die allgemeinen Differentialgleichungen für die fortschreitenden Wellen

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \alpha E q\, dx \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \text{ oder abgekürzt } \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{\partial s^2}{\partial x^2},$$

wo nun der Werth μ für Transversalschwingungen ein anderer ist als für Longitudinalschwingungen. Zu deren Integration werden wir in späteren §§ kommen.

Interferenz der Wellen von gleicher Schwingungsrichtung. (§ 226.)

Verallgemeinerung der aufgestellten Formeln.

Wir gehen aus von zwei Schwingungen, die gegeben sind durch

$$s = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right), \quad s_1 = r_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-a}{l}\right),$$

deren Interferenzschwingung ist

$$S = \sqrt{r^2 + r_1^2 + r r_1 \cos\left(2\pi \frac{a}{l}\right)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-D}{l}\right),$$

wo ist

$$\operatorname{tang} 2\pi \frac{D}{l} = \frac{r_1 \sin 2\pi \frac{a}{l}}{r + r_1 \cos 2\pi \frac{a}{l}}.$$

Es mag bemerkt werden, dass man dieselben Formeln erhält, wenn man statt des Schwingungsausschlages die Geschwindigkeit des vibrirenden

Moleküles einführt, wie schon aus der Gleichung § 224, 1. hervorgeht; denn wenn ist

$$s = r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right),$$

so erhält man

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = r\frac{2\pi}{T}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right) = -u \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right)$$

oder wenn t anders angefangen wird

$$v = u \sin 2\pi\left(\frac{t'}{T} - \frac{x}{l}\right).$$

Ist in den obigen Formeln $a = \frac{1}{4} l$, so ist

$$S = \sqrt{r^2 + r_1^2} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - D}{l}\right), \quad \operatorname{tang} 2\pi\frac{D}{l} = \frac{r_1}{r}.$$

Wenn nun umgekehrt eine Wellenbewegung gegeben ist durch

$$U = V \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + D}{l}\right),$$

so können wir diese hervorgebracht denken durch zwei Schwingungen, deren Gleichungen sind

$$u = v \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right),$$

$$u_1 = v_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right) = -v_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right),$$

die also den Phasenunterschied $\frac{1}{4} l$ haben. Es muss dann sein

$$v^2 + v_1^2 = V^2, \quad \operatorname{tang} 2\pi\frac{D}{l} = \frac{v_1}{v}$$

oder

$$v_1 = V \sin 2\pi\frac{D}{l}, \qquad v = V \cos 2\pi\frac{D}{l}.$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die resultirende Schwingung von mehreren parallelen, ähnlichen und nach derselben Richtung polarisirten Wellensystemen zu finden.*)

Es seien die Oscillationsgeschwindigkeiten von $n + 1$ einzelnen Schwingungen durch folgende Gleichungen gegeben:

$$U_1 = V_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \frac{a_1}{l}\right)\right] = \text{abgekürzt } V_1 \sin(\alpha - \gamma_1),$$

$$U_2 = V_2 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \frac{a_2}{l}\right)\right] = \quad - \quad V_2 \sin(\alpha - \gamma_2),$$

$$U_3 = V_3 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \frac{a_3}{l}\right)\right] = \quad - \quad V_3 \sin(\alpha - \gamma_3),$$

. . . .

$$V_{n+1} = V_{n+1} \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \frac{a_{n+1}}{l}\right)\right] = \text{abgekürzt } V_{n+1} \sin(\alpha - \gamma_{n+1}),$$

*) Schwerd, die Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.

Nach der Bemerkung im Anfang dieser Nummer können wir jede dieser Schwingungen in zwei zerlegen, deren Phasenunterschied $\frac{1}{4}$ l ist. Wir erhalten darnach

$$U_1 = v_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right) + v_1' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right)$$

oder abgekürzt

$$U_1 = v_1 \sin \alpha \qquad + v_1' \sin(\alpha - \tfrac{1}{2}\pi),$$

und dem entsprechend

$$U_2 = v_2 \sin \alpha \qquad + v_2' \sin(\alpha - \tfrac{1}{2}\pi),$$
$$U_3 = v_3 \sin \alpha \qquad + v_3' \sin(\alpha - \tfrac{1}{2}\pi),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_{n+1} = v_{n+1} \sin \alpha \qquad + v_{n+1}' \sin(\alpha - \tfrac{1}{2}\pi)$$

wo ist

$$v_r = V_r \cos 2\pi\frac{a_r}{l} = V_r \cos \gamma_r,$$

$$v_r' = V_r \cos 2\pi\frac{a_r}{l} = V_r \sin \gamma_r.$$

Daraus können wir dann ableiten, wenn wir mit Σ kurz bezeichnen die Summe der einzelnen darin stehenden Grössen, die sich ergeben, wenn statt r nach einander alle Indices von 1 bis n + 1 gesetzt werden:

$$\Sigma U_r = \Sigma v_r \sin \alpha + \Sigma v_r' \sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Dies ist aber nach § 226:

$$\Sigma U_r = \sqrt{(\Sigma v_r)^2 + (\Sigma v_r')^2} \sin(\alpha - i), \text{ wo } \operatorname{tg} i = \frac{\Sigma v_r'}{\Sigma v_r} \text{ ist.}$$

Diese allgemeinen Resultate sollen im Folgenden auf specielle Fälle angewendet werden.

A. Ist $V_1 = V_2 = V_3 = \ldots V_{n+1} = V$, dann ist

$$\Sigma v_r = V\,\Sigma \cos \gamma_r, \qquad \Sigma v_r' = V\,\Sigma \sin \gamma_r, \qquad \operatorname{tg} i = \frac{\Sigma \sin \gamma_r}{\Sigma \cos \gamma_r} \text{ und}$$

$$\Sigma U_r = V\sqrt{(\Sigma \cos \gamma_r)^2 + (\Sigma \sin \gamma_r)^2} \sin(\alpha - i).$$

B. Sind neben der Annahme unter A. die gleichzeitigen Phasen der componirenden Systeme einander gleich, d. h. $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 \ldots \gamma_{n+1} = \gamma$, so ist $\Sigma U_r = \Sigma V_r \sin(\alpha - \gamma)$.

C. Ist $V_1 = V_2 = V_3 \ldots = V_{n+1} = V$ und bilden ihre gleichzeitigen Phasen eine arithmetische Progression, so dass $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma + \varepsilon$, $\gamma_3 = \gamma + 2\varepsilon, \ldots. \gamma_{n+1} = \gamma + n\varepsilon$, so handelt es sich nach A. um die Bestimmung der Summen $\Sigma \cos \gamma_r$ und $\Sigma \sin \gamma_r$.

Nach den Formeln

$$\cos x + \cos(x + y) + \cos(x + 2y) + \ldots + \cos(x + ny)$$
$$= \frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}y}{\sin \frac{1}{2}y} \cos\left(x + \frac{n}{2}y\right),$$

$$\sin x + \sin(x + y) + \sin(x + 2y) + \ldots + \sin(x + ny)$$
$$= \frac{\sin(n+1)\frac{1}{2}y}{\sin \frac{1}{2}y} \cos\left(x + \frac{n}{2}y\right)$$

ist nun
$$\Sigma \cos \gamma_r = \frac{\sin (n+1) \frac{1}{2} \varepsilon}{\sin \frac{1}{2} \varepsilon} \cos \left(\gamma + \frac{n}{2} \varepsilon\right),$$
$$\Sigma \sin \gamma_r = \frac{\sin (n+1) \frac{1}{2} \varepsilon}{\sin \frac{1}{2} \varepsilon} \sin \left(\gamma + \frac{n}{2} \varepsilon\right), \text{ mithin}$$
$$(\Sigma \cos \gamma_r)^2 + (\Sigma \sin \gamma_r)^2 = \frac{\sin^2 (n+1) \frac{1}{2} \varepsilon}{\sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon}, \quad \frac{\Sigma \sin \gamma_r}{\Sigma \cos \gamma_r} = \operatorname{tang} \left(\gamma + \frac{n}{2} \varepsilon\right),$$
$$\text{also } i = \gamma + \frac{n}{2} \varepsilon.$$

Die Einführung dieser Werthe giebt
$$\Sigma U_r = V . \frac{\sin (n+1) \frac{1}{2} \varepsilon}{\sin \frac{1}{2} \varepsilon} . \sin \left[\alpha - \left(\gamma + \frac{n}{2} \varepsilon\right)\right].$$
Dafür kann gesetzt werden
$$\Sigma U_r = \frac{V}{2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon} \sin [\alpha - \gamma + \tfrac{1}{2} \varepsilon - \tfrac{1}{2} \pi] - \frac{V}{2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon} \sin [\alpha - \gamma + \tfrac{1}{2} \varepsilon - \tfrac{1}{2} \pi - (n+1) \varepsilon].$$

D. Sei ausserdem, dass die γ eine arithmetische Progression bilden, V_r gegeben durch folgende Form:
$$V_r = V \sin a_r,$$
wo die a_r eine arithmetische Progression bilden, also
$$a_1 = a, \quad a_2 = a + \delta, \quad a_3 = a + 2\delta, \ldots \; a_{m+1} = a + m\delta.$$
Dann erhält man
$$\Sigma v_r = V \Sigma \sin a_r \cos \gamma_r, \qquad \Sigma v_r' = V \Sigma \sin a_r \sin \gamma_r.$$

Nun ist allgemein
$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2} \sin (y + x) - \tfrac{1}{2} \sin (y - x),$$
$$\sin x \sin y = -\tfrac{1}{2} \cos (y + x) + \tfrac{1}{2} \cos (y - x),$$
folglich
$$\Sigma v_r = \tfrac{1}{2} V \left\{ \Sigma \sin (\gamma_r + a_r) - \Sigma \sin (\gamma_r - a_r) \right\},$$
$$\Sigma v_r' = \tfrac{1}{2} V \left\{ - \Sigma \sin (\gamma_r + a_r) + \Sigma \cos (\gamma_r - a_r) \right\}.$$

Da nun aber, weil a_r und γ_r arithmetische Progressionen bilden, auch $\gamma_r + a_r$ und $\gamma_r - a_r$ arithmetische Progressionen bilden, deren Differenzen $\varepsilon + \delta$ und $\varepsilon - \delta$ sind, so ist nach dem oben citirten Satz (⊙):
$$\Sigma v_r = \tfrac{1}{2} V \left\{ \frac{\sin (m+1) \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta)} \sin \left[\gamma + a + \frac{m}{2} (\varepsilon + \delta)\right] - \frac{\sin (m+1) \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta)} \sin \left[\gamma - a + \frac{m}{2} (\varepsilon - \delta)\right] \right\},$$
$$\Sigma v_r' = \tfrac{1}{2} V \left\{ - \frac{\sin (m+1) \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta)} \cos \left[\gamma + a + \frac{m}{2} (\varepsilon + \delta)\right] + \frac{\sin (m+1) \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta)} \cos \left[\gamma - a + \frac{m}{2} (\varepsilon - \delta)\right] \right\},$$
$$(\Sigma (v_r)^2 + (\Sigma v_r')^2 = (\tfrac{1}{2} V)^2 \left\{ \frac{\sin^2 (m+1) \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta)}{\sin^2 \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta)} + \frac{\sin^2 (m+1) \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta)}{\sin^2 \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta)} - 2 \frac{\sin (m+1) \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta)} . \frac{\sin (m+1) \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \delta)} \cos (2a + m\delta) \right\} = A^2.$$
$$\operatorname{tg} i = \frac{\Sigma v_r}{\Sigma v_r'}, \qquad \Sigma U_r = A \sin (\alpha - i).$$

Interferenz von Wellen verschiedener Schwingungsrichtung. (§ 228.)

Wird ein Punkt gleichzeitig durch zwei zu einander irgendwie geneigte Schwingungen erregt, die ausgedrückt sind durch die Gleichungen

$$x = r \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \qquad y = r_1 \sin\left(2\pi\frac{t + nT'}{T'}\right),$$

so erhält man die Schwingungscurve durch Elimination von t. Diese Elimination lässt sich ausführen, wenn die Schwingungszeiten einander gleich oder ganze Vielfache von einander sind.

1) $T = T'$. Die Grösse n, welche den Phasenunterschied bestimmt ist nach § 225 die Anzahl der Wellenlängen, um welche die eine Schwingung von der anderen verschieden ist.

Die Entwickelung des sin giebt:

$$y = r_1 \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\cos 2n\pi + r_1 \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\sin 2n\pi.$$

Nun ist

$$\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = \frac{x}{r}, \qquad \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}},$$

also

$$y = \frac{r_1}{r}x\cos 2n\pi + \frac{r_1}{r}\sqrt{r^2 - x^2}\sin 2n\pi,$$

oder

$$y^2 - 2\frac{r_1}{r}\cos 2n\pi\,.\,xy + \frac{r_1^2}{r^2}x^2 = r_1^2\sin^2 2n\pi.$$

Dies ist im Allgemeinen die Gleichung einer Ellipse. Die Lage der Hauptaxen gegen die componirenden Schwingungsrichtungen, wenn diese senkrecht zu einander sind, ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{2rr_1}{r^2 - r_1^2}\cos n\pi = \operatorname{tg} 2\varrho \cos n\pi, \quad \text{wenn} \quad \operatorname{tg}\varrho = \frac{r_1}{r} \text{ ist.}$$

Ist $n = 0, 1, 2\ldots$, so wird die Gleichung

$$y^2 - 2\frac{r_1}{r}xy + \frac{r_1^2}{r^2}x^2 = \left(y - \frac{r_1}{r}x\right)^2 = 0.$$

Die Ellipse geht über in eine Gerade.

Ist n ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$, so ist

$$y^2 + 2\frac{r_1}{r}xy + \frac{r_1^2}{r^2}x^2 = \left(y + \frac{r_1}{r}x\right)^2 = 0,$$

also wieder eine Gerade.

Ist $n = \frac{1}{4}(2m + 1)$, $m = 0, 1, 2\ldots$, so wird die Gleichung

$$\frac{y^2}{r_1^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1,$$

d. i. eine Ellipse.

Die Schwingungsrichtungen bestimmen ganz allgemein ein Paar conjugirte Durchmesser der Ellipse.

Wenn im Besonderen dann die beiden Amplituden r_1 und r einander gleich und die Bewegungsrichtungen zu einander senkrecht sind, so geht die Ellipse in einen Kreis über.

Die hier gefundenen Resultate erläutern die Figuren 144 a, a.

2) Ist $T = 2T'$, also, wenn wir statt T' schreiben T:

$$x = r \sin\left(2\pi \frac{t}{2T}\right), \quad y = r_1 \sin 2\pi \frac{t + nT}{T},$$

oder

$$y = r_1 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \cos 2n\pi + r_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \sin 2n\pi.$$

Bedenkt man, dass

$$\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = 2 \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) = 2 \frac{x}{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}},$$

$$\cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\pi \frac{t}{T}\right) = 1 - 2 \frac{x^2}{r^2}$$

ist, so erhält man

$$y = 2 \frac{r_1}{r} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \cos 2n\pi + r_1 \left(1 - 2 \frac{x^2}{r^2}\right) \sin 2n\pi.$$

Ist speciell

$$n = \frac{1 + 4m}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{3 + 4m}{4},$$

so ist

$$y = \pm r_1 \left(1 - 2 \frac{x^2}{r^2}\right).$$

Diese Gleichung repräsentirt Parabeln, die sich nur durch die Lage unterscheiden.

Die verschiedenen Werthe von n geben die Curven, wie sie gezeichnet sind in Fig. 144 d, wenn die componirenden Schwingungen senkrecht zu einander sind.

Die interferirenden Schwingungen können auch Transversal- und Longitudinalschwingungen sein, dann aber geht die Ebene der Schwingungsbahn durch die Richtung des Strahles. Solche Schwingungen treffen wir bei den Wasserwellen.

Aus den obigen Rechnungen lässt sich eine Methode ableiten, wie jede elliptische Schwingung zerlegt werden kann in zwei geradlinig polarisirte Schwingungen, deren Schwingungsebenen senkrecht zu einander sind. (§ 384.)

Bemerkung. Eine genaue Fassung des Satzes über Superposition kleiner Schwingungen findet sich § 229, 11.

Ausbreitung der Wellen. (§ 229.)

1. Wellenfläche.

Nach § 225, 2. ist für feste Körper

$$c^2 = \frac{E(1-\mu)}{d(1+\mu)(1-2\mu)}, \qquad c'^2 = \frac{E}{d\,2(1+\mu)}.$$

In diesen Ausdrücken für die Geschwindigkeiten kommt nur E, d und μ vor, also nur Grössen, welche von der Beschaffenheit des Materials abhängen, aber nicht von der Schwingungsamplitude und der Schwingungszeit. Da aber beide Werthe stets von einander verschieden sind, so muss jede Verschiebung im Schwingungscentrum sich in zwei verschiedene sich fortpflanzende Bewegungen trennen. Die Longitudinalschwingungen gehen schneller, ein Punkt, der vom Schwingungscentrum um R entfernt ist, wird von diesen in $\frac{R}{c}$, von den Transversalschwingungen aber in $\frac{R}{c'}$ Zeiteinheiten erreicht.

Das Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten ist $\frac{c}{c'} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}}$.

Dieselben Folgerungen können gezogen werden aus § 225, 4.

Sind die Grössen E, μ, d nicht nach allen Richtungen hin dieselben, so sind die betreffenden R für dieselben Zeiten nicht einander gleich, also ist dann die Wellenfläche nicht eine Kugel.

In Bezug auf Wellenflächen in anisotropen Mitteln verweisen wir auf § 373, 5. und § 374, 4., 6., 7.

2. Aufstellung der Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit.

Wir setzen voraus, dass eine Flüssigkeit eine continuirliche Vereinigung materieller Punkte ist von der Art, dass, wenn an irgend einer Stelle nach irgend einer Richtung hin die Verbindung mit dem System aufgehoben wird, die Kraft, welche den Einfluss des Zusammenhangs darstellt (der Druck), von der Richtung unabhängig ist.

Es ist nun die nächste Aufgabe, die Bewegungsgleichungen eines kleinen rechtwinkligen Flüssigkeitsparallelepipedums aufzustellen. Die Auflösung kann auf zwei verschiedene Arten unternommen werden. Erstens indem man jedes Theilchen der Flüssigkeit im Laufe der Zeit verfolgt oder zweitens, indem man im Gegentheil die Bewegung untersucht, die an irgend einem Punkte der Zeit nach vor sich geht. Diese beiden Behandlungsweisen würden sich in Buchstaben wie folgt ausdrücken lassen, wenn man Alles auf rechtwinklige Coordinaten bezieht. Die erste Auffassung verlangt x, y, z, die Coordinaten eines Punktes und damit die Bahn, welche das Theilchen beschreibt, die Componenten seiner Geschwindigkeit, den Druck p, der auf ihn ringsherum wirkt, und seine specifische Masse zu finden als Functionen

der Zeit t, wenn die Anfangslage und der anfängliche Geschwindigkeitszustand des Systems bekannt sind. Nach der zweiten Auffassung hätte man für die drei Componenten der Geschwindigkeit u, v, w, die specifische Masse ϱ und den Druck p fünf Differentialgleichungen aufzustellen zwischen den vier Variabeln x, y, z, t und durch deren Integration jene fünf Grössen als Functionen dieser vier Variabeln darzustellen. Man würde dann von der Lösung der zweiten Art auf die der ersten kommen, wenn man aus den erhaltenen Gleichungen u, v, w, p und ϱ eliminirte und also die Grössen x, y, z als Functionen von t fände.

Es sollen nun zunächst die Gleichungen nach der zweiten Auffassungsweise, die sogenannten Euler'schen Gleichungen, gesucht werden.

Den Systempunkt x, y, z denken wir uns als ein verschwindend kleines Parallelepipedum, dessen Kanten dx, dy, dz sind, welches während des Zeitelementes dt sich um die Strecken dx, dy, dz parallel den Axen fortbewegt.

Um nun das D'Alembert'sche Princip anwenden zu können, suchen wir zunächst die Beschleunigungen $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$.

Da u, v, w unserer Annahme gemäss Functionen von x, y, z, t sind, so ist:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w,$$

und diesem analog

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w,$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w.$$

Die beschleunigenden Kräfte erhalten wir dann, wenn wir diese Ausdrücke mit der Masse $dm = \varrho\, dx\, dy\, dz$ multipliciren.

Diese Kräfte sind gleichzusetzen den bewegenden Kräften, welche auf das mit Flüssigkeit erfüllte unendlich kleine Parallelepipedum einwirken. Die äusseren accelerirenden Kräfte bezeichnen wir mit X, Y, Z. Es sind noch die Druckkräfte von der benachbarten Flüssigkeit zu betrachten. Der Druck auf die Flächeneinheit ist bezeichnet mit p, es erfährt mithin die Fläche dy dz in der Richtung der x Axe den Druck p dy dz. Den Druck auf die der dy dz entgegengesetzten Fläche erhalten wir, da p eine Function von x, y, z ist, wenn wir x übergehen lassen in x + dx, es ist mithin der Druck auf diese Fläche, da er dem vorigen entgegengesetzt ist,

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy\, dz.$$

Es bleibt mithin als gesammte Druckkraft, welche in der Richtung der x das Parallelepipedum zu bewegen strebt:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

Analog erhalten wir für die Pressungen parallel der y- und z Axe

$$-\frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy\,dz, \qquad -\frac{\partial p}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Die Gleichungen des D'Alembert'schen Principes sind demnach

$$\varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} - \varrho\frac{du}{dt} = 0,$$

$$\varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} - \varrho\frac{dv}{dt} = 0,$$

$$\varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} - \varrho\frac{dw}{dt} = 0,$$

oder, wenn die obigen Werthe von $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ eingesetzt werden,

$$X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{1.}$$

$$Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}, \tag{2.}$$

$$Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3.}$$

Zu diesen Gleichungen kommt zunächst eine, welche die Dichtigkeitsänderung ϱ betrifft. Dazu muss untersucht werden, was während des Zeitelementes dt in das Parallelepipedum von der einen Seite her einfliesst und was auf der anderen Seite wieder hinausgeht.

Durch die Seitenfläche dy dz tritt parallel der x Axe mit der Geschwindigkeit u die Masse $dy\,dz\,\varrho\,u\,dt$ ein, weil während dt zusammenhängende Masse um die Strecke $dx = u\,dt$ fortrückt. Die austretende Masse erhält man aus diesem Ausdrucke, wenn man x um dx zunehmen lässt, denn die austretende Masse kann auch als diejenige betrachtet werden, welche in das benachbarte Element eintritt. Die austretende Masse ist demnach $dy\,dz\left(u\varrho + \frac{\partial(u\varrho)}{\partial x}\right)dt$. Die Differenz zwischen diesen beiden Grössen mit dx multiplicirt giebt demnach die in dt entstandene Aenderung der Dichtigkeit in Folge des Ein- und Abflusses nach der x Axe. Dies giebt

$$-\frac{\partial(u\varrho)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Die analogen Ausdrücke nach der y- und z Axe sind

$$-\frac{\partial(u\varrho)}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,dt, \qquad -\frac{\partial(u\varrho)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Die Summe dieser Grössen ist die Aenderung des ganzen Volumens, also durch dx dy dz dividirt die Aenderung der Dichtigkeit in der Zeit dt, d. i. $\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,dt$. Es ist mithin nach Division mit dt:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial(u\varrho)}{\partial x} + \frac{\partial(u\varrho)}{\partial y} + \frac{\partial(u\varrho)}{\partial z} = 0. \tag{4.}$$

Diese Gleichung wird die Gleichung der Continuität genannt.

Diese vier Gleichungen gelten zugleich für compressible und für incompressible Flüssigkeiten. Zu denselben kommt endlich noch eine fünfte, welche den Zusammenhang zwischen Druck und Dichtigkeit bei compressibeln Flüssigkeiten angiebt. Die Auffindung dieser Gleichung ist eine Aufgabe des Experimentes, sie sei dargestellt durch

$$p = \Phi(\varrho). \tag{5.}$$

Bei incompressibeln Flüssigkeiten ist

$$\varrho = \text{Const.} \tag{5*}$$

Für incompressible Flüssigkeiten lässt sich (5*) und (4.) verbinden. Nach (5*) ist das totale Differential von ϱ gleich 0, d. h.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0.$$

Wenn aber in (4.) die angedeuteten Differentiationen ausgeführt werden, erhält man

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

Es ist mithin

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Da die Gleichungen, welche aus der ersten Auffassungsweise, wie es zuerst von Lagrange in seiner analytischen Mechanik gemacht ist, hervorgehen, im Weiteren nicht verwendet werden, möge deren Andeutung hier genügen. Wir haben nach § 64, 1. in den dort aufgestellten Gleichungen zu setzen statt X, Y, Z die Grössen $X - \frac{d^2x}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2y}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2z}{dt^2}$.

Da ferner nach der Eigenschaft der Flüssigkeiten der Druck immer normal ist, so verschwinden die mit T bezeichneten Kräfte und es wird $N_1 = N_2 = N_3 = p$. Die drei ersten Bedingungsgleichungen werden also

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$
$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$
$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Dazu kommt dann noch eine Gleichung $p = \Phi(\varrho)$ und die Continuitätsbedingung, welche ausspricht, dass bei der Bewegung des Massenelementes dieses unverändert bleibt.

3. Vereinfachung der obigen Gleichungen.

Wir sehen zunächst ab von den Kräften, die von Aussen wirken, wozu namentlich die Schwere der Masse zu rechnen sein wird, setzen also $X = Y = Z = 0$.

Die ganze Masse ist im Ruhestand homogen. Das Gleichgewicht soll nur wenig gestört werden, so dass wir u, v, w als unendlich klein ansehen können. Demnach sind die Produkte von der Form $u \frac{\partial u}{\partial x}$ als unendlich klein zweiter Ordnung gegen die der ersten Ordnung zu vernachlässigen. Es reduciren sich in Folge dessen die Gleichungen (1.), (2.), (3.) der vorigen Nummer auf:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1.}$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{2.}$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{3.}$$

Sei ferner die Dichtigkeit im Gleichgewichtszustand constant und durch c bezeichnet, während ϱ die veränderliche Dichtigkeit bedeutet. Wir können dann setzen:
$$\varrho = c(1+\sigma),$$
wo σ ein kleiner Bruch ist, der, je nachdem er positiv oder negativ ist, Condensation oder Dilatation angiebt.

Da nun nach (5.) ist
$$p = \Phi(\varrho),$$
so haben wir
$$\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial \Phi(\varrho)}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{c}{c(1+\sigma)}\Phi'(c+c\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Weil σ sehr klein ist, so ist $\frac{c}{c(1+\sigma)} = 1$ und $\Phi'(c+c\sigma) = \Phi'(c)$, also bei Vernachlässigung der Glieder mit σ:
$$\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(c)}{\partial c}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Da $\Phi'(c) > 0$ ist, weil der Druck mit der Dichtigkeit wächst, können wir dafür abgekürzt schreiben a^2, und erhalten also
$$\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = a^2\frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Dadurch gehen die Gleichungen (1.), (2.), (3.) über in

$$a^2\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1*}$$

$$a^2\frac{\partial \sigma}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{2*}$$

$$a^2\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{3*}$$

Die Gleichung (4.) der vorigen Nummer vereinfacht sich auch, denn es ist
$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = c\frac{\partial \sigma}{\partial t},$$
$$\frac{\partial u\varrho}{\partial x} = \frac{\partial uc}{\partial x} + \frac{\partial uc\sigma}{\partial x} = c\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u\sigma}{\partial x}$$
$$= c\frac{\partial u}{\partial x}, \text{ da } \frac{\partial u\sigma}{\partial x} \text{ unendlich klein gegen } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ ist.}$$

Ebenso ist

$$\frac{\partial u\varrho}{\partial y} = c\,\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u\varrho}{\partial z} = c\,\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Dies in die citirte Gleichung eingesetzt giebt

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (4^*)$$

Diese nun gefundenen Gleichungen (1*), (2*), (3*), (4*) können so combinirt werden, dass sie nur eine Variable enthalten. Durch Differentiation der Gleichungen (1*), (2*), (3*) und (4*) respective nach x, y, z, t erhalten wir

$$a^2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}, \quad a^2\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial y}, \quad a^2\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial z}.$$

Substituiren wir die ersteren Werthe in die letzte Gleichung, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}\right).$$

Zur Lösung der allgemeinen Aufgabe ist ferner gegeben der Anfangszustand des Mediums, also für $t = 0$ die Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 für jeden Punkt und die anfängliche Dichtigkeitsänderung $\sigma_0 = f(x, y, z)$, ferner

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial z} = F(x, y, z).$$

4. Oscillatorische Bewegung einer unendlichen, elastischen Flüssigkeit.

Die Gleichungen dieser Bewegung sind in 3. gegeben. Aus

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}\right)$$

ist σ bestimmt, da für $t = 0$ gegeben ist $\sigma_0 = f(x,y,z)$. Sobald aber σ gegeben ist, so findet man u, v, w durch einfache Quadratur, denn es ist

$$u - u_0 = -a^2\int_0^t \frac{\partial\sigma}{\partial x}\,dt, \quad v - v_0 = -a^2\int_0^t \frac{\partial\sigma}{\partial y}\,dt, \quad w - w_0 = -a^2\int_0^t \frac{\partial\sigma}{\partial z}\,dt.$$

Es handelt sich also um die Integration der obigen Differentialgleichung, die im Folgenden gegeben werden soll nach der Darstellung von Riemann (Partielle Differentialgleichungen von Riemann. Herausgegeben von Hattendorff. S. 283) oder Schell (Theoretische Mechanik S. 948).

Wegen der voraussichtlich periodischen Beschaffenheit der Bewegung ist eine Particularlösung:

$$\sigma = e^{(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t)\,i}$$

$$= \cos(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t) + i\sin(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t),$$

wo $\varrho^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ ist.

Es genügen dann aber auch die Ausdrücke

$$\cos(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t) \text{ und } \sin(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t),$$
$$\cos(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t) \;+\; \sin(\lambda x + \mu y + \nu z \pm a\varrho t),$$
$$\cos(\lambda x + \mu y + \nu z)\cos a\varrho t \text{ und } \cos(\lambda x + \mu y + \nu z)\sin a\varrho t.$$

Von diesen letzteren Formen wollen wir ausgehen. Wir zerlegen σ in $\sigma = \sigma' + \sigma''$, so dass für den Anfangszustand also $t = 0$ ist:

$$\sigma_0' = f(x,y,z), \quad \left(\frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \text{ und } \sigma_0'' = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma''}{\partial t}\right)_{t=0} = F(x,y,z).$$

Diesen beiden Bedingungen entsprechen die letzteren Particularlösungen, denn die Werthe der ersten und des Differentialquotienten der zweiten verschwinden nicht für $t = 0$, während wirklich der Differentialquotient der ersten und der Werth der zweiten für $t = 0$ verschwinden. Um dieselben aber noch zu verallgemeinern, schreiben wir $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ an die Stelle von x, y, z, wodurch sie nicht aufhören zu genügen, sodann multipliciren wir sie mit einer willkürlichen Function $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ und nehmen das sechsfache Integral zwischen $-\infty$ und $+\infty$ in Bezug auf λ, μ, ν, α, β, γ. Da die Differentiationen nach x, y, z, t unter dem Integralzeichen ausgeführt werden dürfen, so haben wir immer noch eine Particularlösung. Es ist also

$$\sigma' = \overset{(6)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\} \cos a\varrho t . \varphi(\alpha,\beta,\gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Dieses σ' genügt der Bedingung $\left(\frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$. Da nun aber für $t = 0$ $\sigma' = f(x,y,z)$ ist, so muss sein.

$$\overset{(6)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\}\, \varphi(\alpha,\beta,\gamma)\, d\alpha \ldots d\nu = f(x,y,z).$$

Ganz analog erhalten wir, wenn wir noch den Factor $\frac{1}{a\varrho}$ hinzufügen:

$$\sigma'' = \overset{(6)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\} \frac{\sin a\varrho t}{a\varrho}\, \psi(\alpha,\beta,\gamma)\, d\alpha \ldots d\nu,$$

mit der Bedingung

$$\overset{(6)}{\int_{-\infty}^{+\infty}} \cos\{\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma)\}\, \psi(\alpha,\beta,\gamma)\, d\alpha \ldots d\nu = F(x,y,z).$$

Sobald φ und ψ gefunden sind, giebt $\sigma = \sigma' + \sigma''$ die vollständige Lösung des Problems. Auch sieht man leicht, dass nur eine einzige Lösung möglich ist, indem σ durch die partielle Differentialgleichung vollständig bestimmt ist, sobald σ_0 und $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{t=0}$ gegeben sind.

Zur Bestimmung der Functionen φ und ψ dient der Satz von Fourier über die Darstellung willkürlicher Functionen durch doppelte und mehrfache Integrale:

$$\overset{(6)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}} \cos\lambda(\alpha - x)\cos\mu(\beta - y)\cos\nu(\gamma - z).\chi(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu$$
$$= (2\pi)^3\chi(x,y,z).$$

Um diesen Satz für unseren Zweck umzuformen, benutzen wir die trigometrische Formel:

$$\cos a\cos b\cos c = \tfrac{1}{4}\{\cos(a+b+c)+\cos(-a+b+c)$$
$$+\cos(a-b+c)+\cos(a+b-c)\}.$$

Darnach zerfällt der vorige Ausdruck in eine Summe von 4 Integralen, die aber alle dasselbe Resultat der Integration ergeben; denn es tritt z. B. in dem zweiten Ausdruck auf

$$\cos[-\lambda(\alpha - x)+\mu(\beta - y)+\nu(\gamma - z)].$$

Die Integration in Bezug auf λ ist zu erstrecken von $-\infty$ bis $+\infty$, man darf daher $-\lambda$ mit $+\lambda$ vertauschen und es wird dadurch der zweite Ausdruck dem ersten gleich. Dasselbe gilt dann von dem dritten und vierten Ausdruck, wenn man $-\mu$ mit $+\mu$ und $-\nu$ mit $+\nu$ vertauscht.

Mit Hülfe dieses Satzes ergiebt sich nun

$$\sigma' = \frac{1}{(2\pi)^3}\overset{(6)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}\cos[\lambda(x-\alpha)+\mu(y-\beta)$$
$$+\nu(z-\gamma)]\cos a\varrho t\, f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

$$\sigma'' = \frac{1}{(2\pi)^3}\overset{(6)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}\cos[\lambda(x-\alpha)+\mu(y-\beta)$$
$$+\nu(z-\gamma)]\frac{\sin a\varrho t}{a\varrho} F(\alpha,\beta\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

Man übersieht, dass σ' aus σ'' hervorgeht, wenn man in σ'' setzt f statt F und nach t differenzirt.

5. Reduction der Integrale.

Wir suchen zunächst σ'' auf ein Doppelintegral zu reduciren.

Man denke sich die λ, μ, ν als rechtwinklige Coordinaten und transformire diese Coordinaten auf ein Polarcoordinatensystem, setze also

$$\lambda = \varrho\cos\vartheta,\quad \mu = \varrho\sin\vartheta\cos\varphi,\quad \nu = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi,\quad \varrho^2 = \lambda^2+\mu^2+\nu^2.$$

Das Volumenelement $d\lambda\,d\mu\,d\nu = \varrho^2\sin\vartheta\,d\varrho\,d\vartheta\,d\varphi$.

Die Grenzen in der obigen Integration beziehen sich auf den ganzen unendlichen Raum, mithin sind jetzt für ϱ, ϑ, φ die Grenzen 0 und ∞, 0 und π, 0 und 2π. Es ist demnach

$$\sigma'' = \frac{1}{(2\pi)^3}\overset{(3)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}} F(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\vartheta\int\limits_0^{\infty}\cos\{\varrho[(\alpha - x)\cos\vartheta$$
$$+(\beta - y)\sin\vartheta\cos\varphi+(\gamma - z)\sin\vartheta\sin\varphi]\}\frac{\sin a\varrho t}{a\varrho}\varrho^2\sin\pi\,d\varrho.$$

Man betrachte nun zuerst das Integral:

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\left\{\varrho\left[(\alpha - x)\cos\vartheta + (\beta - y)\sin\vartheta\cos\varphi + (\gamma - z)\sin\vartheta\sin\varphi\right]\right\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Denken wir uns den Anfang unseres beliebig zu Grunde gelegten Coordinatensystemes um x, y, z verschoben, so dass wir statt α, β, γ (natürlich auch in der noch übrigen Integration) schreiben $\alpha + x$, $\beta + y$, $\gamma + z$, so ist, da dies die Grenzen unverändert lässt,

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\left\{\varrho\left[\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta\cos\varphi + \gamma\sin\vartheta\sin\varphi\right]\right\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Setzt man*) nun $\varrho\alpha = r\cos p$, $\varrho\beta = r\sin p\cos q$, $\varrho\gamma = r\sin p\sin q$, also $r = \varrho\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, so ist

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\left\{r\left[\cos p\cos\vartheta + \sin p\cos q\sin\vartheta\cos\varphi + \sin p\sin q\sin\vartheta\sin\varphi\right]\right\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\left\{r\left[\cos p\cos\vartheta + \sin p\sin\vartheta\cos(q - \varphi)\right]\right\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Dem Ausdruck in der eckigen Parenthese lässt sich folgende geometrische Deutung geben. Um den Pol des Coordinatensystemes beschreibe man eine Kugel mit dem Halbmesser 1., so ist, wenn ω den Verbindungsbogen der beiden Punkte, deren sphärische Coordinaten ϑ, φ und p, q sind, bezeichnet:

$$\cos\omega = \cos p\cos\vartheta + \sin p\sin\vartheta\cos(q - \varphi).$$

Demnach können wir setzen:

$$J = \frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\left\{r\cos\omega\right\} r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

wo $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ das sphärische Element bedeutet.

Der Bogen ω misst den Winkel, welchen der Radiusvector des Punktes (ϑ, φ), an dem das Flächenelement liegt, mit dem Radiusvector des Punktes (p, q) bildet; $r\cos\omega$ ist daher der Abstand des Flächenelementes $r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ von einer zur Richtung (p, q) senkrechten Aequatorialebene für die Kugel mit dem Radius r.

Das Integral bedeutet daher die Summe aller Flächenelemente einer Kugel mit dem Radius r, jedes multiplicirt mit seinem Abstande von einer festen Aequatorebene ausgedehnt über die ganze Kugel. Die Lage unserer Aequatorebene ist durch Nichts bestimmt, wir können demnach jede beliebige nehmen, ohne den Werth des Integrals zu verändern. Wir wählen dieselbe nun so, dass $p = q = 0$ ist, dass also die Richtung (p, q) mit der Polaraxe zusammenfällt, dann ist $\omega = \vartheta$, mithin:

---

*) Diese hier vorgenommene Entwickelung gilt ganz allgemein für das folgende Integral, worin ψ ein Functionszeichen ist,

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta\cos\varphi + \gamma\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

$$J = \frac{2\pi}{r^3}\int_0^\pi \cos\{r\cos\vartheta\}\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = -2\pi\int_{+1}^{-1}\cos\{r\cos\vartheta\}\, d\cos\vartheta = 4\pi\frac{\sin r}{r}.$$

Somit erhalten wir

$$\sigma'' = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}{}^{(4)} F(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)\frac{\sin a\varrho t \sin\left(\varrho\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\right)}{a\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\varrho.$$

Wir führen nun abermals Polarcoordinaten ein, indem wir setzen $\alpha = r\cos\vartheta$, $\beta = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $\gamma = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, so ist

$$\sigma'' = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta}{a}\, d\vartheta\, d\varphi \int_0^\infty\int_0^\infty r F(x+r\cos\vartheta,\ y+r\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$z + r\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\varrho a t \sin r\varrho\, dr\, d\varrho.$$

Nun ist aber nach dem Fourier'schen Satz für Functionen einer Variabeln:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(r)\sin r\varrho \sin\varrho a t\, dr\, d\varrho = \frac{\pi}{2} f(at).$$

Da hier $f(r) = rF(x+r\cos\vartheta,\ y+r\sin\vartheta\cos\varphi,\ z+r\sin\vartheta\sin\varphi$ ist, so findet man

$$\sigma'' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi t F(x+at\cos\vartheta, y+at\sin\vartheta\cos\varphi, z+at\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

σ' erhält man dann nach 4. durch Differentiation nach t und Vertauschung von F mit f, so dass also schliesslich ist

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi t f(x+at\cos\vartheta, y+at\sin\vartheta\cos\varphi, z+at\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int^\pi t F(x+at\cos\vartheta, y+at\sin\vartheta\cos\varphi, z+at\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta.$$

6. Discussion der erhaltenen Werthe.

Nach der in 4. gegebenen Bedeutung von $F(x, y, z)$ folgt, dass

$$F(x+at\cos\vartheta,\quad y+at\sin\vartheta\cos\varphi,\quad z+at\sin\vartheta\sin\varphi)$$

ist, der Anfangswerth von $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$ in einem Punkte, dessen Coordinaten sind

$$x+at\cos\vartheta,\quad y+at\sin\vartheta\cos\varphi,\quad z+at\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Dieser Punkt liegt auf einer Kugelfläche, die mit dem Halbmesser $R = at$ um den Punkt x, y, z als Mittelpunkt beschrieben ist. Das an dem Endpunkte dieses Radius R anstossende Kugelelement ist aber $= a^2 t^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$. Der Ausdruck

$$\frac{1}{4\,a^2t^2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F\,(x + at\cos\vartheta,\ldots)\,a^2t^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$$

bedeutet demnach den Mittelwerth der Function F auf der eben betrachteten Kugeloberfläche und daher ist

$$\sigma'' = t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{F(x + at\cos\vartheta\ldots.)}{4\,a^2t^2\pi}\,a^2t^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi,$$

derselbe Mittelwerth, multiplicirt mit t.

Aehnliches lässt sich von dem zweiten Werth σ', welcher zu σ gehört, behaupten.

Daraus folgt: Die Condensation oder Dilatation, welche zur Zeit t in einem Punkte x, y, z stattfindet, hängt ab von dem Anfangszustande auf einer um diesen Punkt mit dem Radius at beschriebenen Kugeloberfläche.

Hiernach lässt sich nun die Zeit finden, zu der in einem Punkte x, y, z die Bewegung beginnt, wenn die Erschütterung auf einen gegebenen Anfangsraum beschränkt ist. Für den Punkt x, y, z, der also ausserhalb des Erschütterungsraumes liegt, sind anfangs f und F gleich Null, wenn aber at so gross geworden ist, dass die um den Punkt x, y, z beschriebene Kugel mit dem Radius at den Erschütterungsraum berührt, so beginnt die Bewegung und findet so lange Condensation oder Dilatation statt, als die Kugeloberfläche den Raum schneidet, innerhalb dessen f und F von 0 verschiedene Werthe haben, so lange also, bis sie denselben nach der äussersten Berührung verlässt. Sind demnach r_1 und r_2 die kleinste und die grösste Entfernung des Punktes x, y, z von der Oberfläche des Erschütterungsraumes, so $\begin{matrix}\text{beginnt}\\ \text{endet}\end{matrix}$ die Bewegung, wenn $\begin{matrix}a t_1 = r_1\\ a t_2 = r_2\end{matrix}$, also $\begin{matrix}t_1 = r_1 : a\\ t_2 = r_2 : a\end{matrix}$ ist. Dazwischen kann die Bewegung öfters intermittiren.

Die Verbreitung der Wellenbewegung finden wir demnach folgendermassen. Alle Punkte, welche gleichzeitig die Bewegung beginnen, liegen in demselben Abstande r von der Aussenfläche des Erschütterungsraumes. Errichtet man in allen Punkten dieser Fläche nach aussen Normalen von der Länge r, so erhält man eine Parallelfläche als Ort dieser Punkte, d. i. die Wellenfläche.

Die Zeiten, in denen zwei Punkte x, y, z und x′, y′, z′, deren Normalabstände von dem Erschütterungsraum r und r′ sind, die Bewegung beginnen, findet man dann $t = \frac{r}{a}$ und $t' = \frac{r'}{a}$, mithin ist die Zeit, in der sich die Bewegung, von dem einen zum anderen fortpflanzt $t' - t = \frac{r' - r}{a}$.

Um nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu finden, setzen wir $t' - t = 1$ und erhalten also $r' - r = a$. Es bedeutet also in den obigen Eormeln a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oscillationsbewegung.

7. Einführung des Geschwindigkeitspotentials.

Unter dem Geschwindigkeitspotential*) φ verstehen wir eine Function von x, y, z, von der Beschaffenheit, dass $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ ist.

Diese Function ist noch nicht vollkommen bestimmt, wenn auch die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w gegebene Functionen von x, y, z, t sind, es bleibt in seinem Ausdrucke noch eine additive Function von t willkürlich.

Ehe wir nun diese Funktion φ in die allgemeinen Gleichungen 2. einführen, sollen die Bedingungen und deren Bedeutung gefunden werden, die erfüllt sein müssen, damit überhaupt eine solche Function existirt.

Wenn die Function φ existirt, so wird aus

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy + w\,dz.$$

Die rechte Seite muss also wie die linke ein vollständiges Differential sein. Dies ist aber nur möglich, wenn gilt

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.}$$

Um die Art der Bewegung zu finden, für welche diese Gleichungen erfüllt sind, nehmen wir vorläufig an, dass für einen Punkt, dessen Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ sind, die angegebenen Bedingungen erfüllt seien. Die Werthe der Differentialquotienten für diesen Punkt wollen wir durch Parenthesen kenntlich machen. Für Punkte, deren Coordinaten x, y, z unendlich wenig von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ verschieden sind, seien die Geschwindigkeiten u′, v′, w′. Dann ist nach dem Taylor'schen Satz:

$$u' = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x - \mathfrak{x}) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(y - \mathfrak{y}) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)(z - \mathfrak{z}),$$

$$v' = v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x - \mathfrak{x}) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(y - \mathfrak{y}) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)(z - \mathfrak{z}),$$

$$w' = w + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(x - \mathfrak{x}) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(y - \mathfrak{y}) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)(z - \mathfrak{z}).$$

Setzen wir

$$\varphi = u(x-\mathfrak{x}) + v(y-\mathfrak{y}) + w(z-\mathfrak{z}) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x - \mathfrak{x})^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(y - \mathfrak{y})^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)(z-\mathfrak{z})^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)(y-\mathfrak{y})(z-\mathfrak{z}) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)(x-\mathfrak{x})(z-\mathfrak{z})$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x-\mathfrak{x})(y-\mathfrak{y}),$$

so ist

$$u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w' = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

---

*) Helmholtz, Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Crelle's Journal 55. 1858.

Führen wir nun ein neues Coordinatensystem (x_1, y_1, z_1) ein, dessen Coordinatenanfang mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ zusammenfällt, so können wir dieses so wählen, dass wir erhalten, wenn alle auf diese bezogene Grössen den Index 1 bekommen,

$$\varphi_1 = u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) x_1^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right) y_1^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) z_1^2,$$

Dann ist

$$u_1' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = u_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) x_1,$$

$$v_1' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} = v_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right) y_1,$$

$$w_1' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} = w_1 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) z_1.$$

Es sind also die Geschwindigkeiten u_1', v_1', w_1' so, dass die Theilchen, welche zu Anfang von dt auf einer der $y_1 z_1$, $x_1 y_1$, $x_1 z_1$ parallelen Ebene lagen, auch nach derselben noch auf dieser Ebene sich befinden. Es kann demnach die Bewegung eine Translationsbewegung sein, und auch eine Ausdehnung oder Zusammenziehung eines rechtwinkligen Parallelepipedums in der Richtung der Kanten kann stattfinden.

Denken wir uns nun zu den bisher vorhandenen Bewegungen der dem Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ benachbarten Punkte noch Drehungen um Axen, die den x, y, z Axen parallel sind, ausgeführt und bezeichnen mit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Winkelgeschwindigkeiten. Es sind dann die davon herrührenden Geschwindigkeitscomponenten parallel den x, y, z Axen:

$$\begin{array}{ccc} 0, & (z-\mathfrak{z})\,\omega_1, & -(y-\mathfrak{y})\,\omega_1, \\ -(z-\mathfrak{z})\,\omega_2, & 0, & (x-\mathfrak{x})\,\omega_2, \\ (y-\mathfrak{y})\,\omega_3, & -(x-\mathfrak{x})\,\omega_3, & 0. \end{array}$$

Die Geschwindigkeiten der Theilchen x, y, z sind dann:

$$u'' = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x-\mathfrak{x}) + \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \omega_3\right)(y-\mathfrak{y}) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \omega_2\right)(z-\mathfrak{z}),$$

$$v'' = v + \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \omega_3\right)(x-\mathfrak{x}) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(y-\mathfrak{y}) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \omega_1\right)(z-\mathfrak{z}),$$

$$w'' = w + \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \omega_2\right)(x-\mathfrak{x}) + \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \omega_1\right)(y-\mathfrak{y}) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)(z-\mathfrak{z}).$$

Daraus folgt durch Differenziation:

$$\frac{\partial v''}{\partial z} - \frac{\partial w''}{\partial y} = 2\,\omega_1,$$

$$\frac{\partial w''}{\partial x} - \frac{\partial u''}{\partial z} = 2\,\omega_2,$$

$$\frac{\partial u''}{\partial y} - \frac{\partial v''}{\partial x} = 2\,\omega_3.$$

Es sind die Grössen der linken Seiten, welche nach (1.) gleich 0 sein müssen, wenn ein Geschwindigkeitspotential existiren soll, also gleich den doppelten Rotationsgeschwindigkeiten der betreffenden Flüssigkeitstheilchen

um die drei Coordinatenaxen. Die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials schliesst also die Existenz von Rotationsbewegungen der Theilchen aus.

Bewegungen, denen ein Geschwindigkeitspotential nicht zukommt, nennt Helmholtz Wirbelbewegungen.

Um nun die Function φ in die allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen einzuführen, sind die Gleichungen (1.), (2.), (3.) in 2. respective mit dx, dy, dz zu multipliciren und dann zu addiren. Dadurch erhält man eine Gleichung, deren Integral ist, wenn die X, Y, Z = 0 gesetzt werden:

$$-\frac{1}{\varrho}\,p = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + C.$$

Da C unabhängig von x, y, z und nur von t abhängig ist, so kann bei passendem Anfang der Zeit t dieses C ganz weggelassen werden. Es ist also

$$-\frac{1}{\varrho}\,p = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \qquad (1.)$$

Die Gleichung der Continuität (4.) wird dann

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\partial z} = 0.$$

Betrachten wir nun die Geschwindigkeit als sehr klein, so wird aus (1.)

$$-\frac{1}{\varrho}\,p = \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

oder, da $\frac{1}{\varrho}\,p = a^2\sigma$ ist,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\sigma = 0. \qquad (2.)$$

Die Gleichung (4*) aus 3. wird

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \Delta\varphi = 0, \qquad (3.)$$

wo Δ abgekürzt gesetzt ist für

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Beide Gleichungen (2.) und (3.) geben zusammengenommen

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi. \qquad (4.)$$

Da nun $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ die Componenten der Geschwindigkeiten und $\sigma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ die Verdichtung im Punkte x, y, z zur Zeit t sind, so sind alle diese Grössen ermittelt, wenn φ als Function von x, y, z, t bis auf ein völlig constantes Glied gefunden ist.

Wir können die Gleichung (4.) noch umformen, indem wir statt x, y, z einführen $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, also φ als abhängig von t und r betrachten. Dann finden wir

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

also

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right), \tag{4*}$$

oder nach Multiplication mit r

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}\right).$$

Lassen sich die Kräfte X, Y, Z ausdrücken als Differentialquotienten einer Potentialfunction, also

$$X = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial P}{\partial z},$$

und werden diese Grössen in den linken Seiten (1.), (2.), (3.) in 2. eingesetzt und dann die oben angegebenen Operationen ausgeführt, so erhält man statt (1.):

$$P - \frac{1}{\varrho}p = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{1*}$$

und dann

$$P - \frac{1}{\varrho}p = \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$P - a^2\sigma = \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Diese Gleichung verbunden mit (3.) giebt dann:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial t} + a^2\Delta\varphi. \tag{4**}$$

8. Berechnung des Geschwindigkeitspotentials.*)

Nehmen wir an, φ wäre unabhängig von x und y, so reducirt sich die von φ zu erfüllende Gleichung auf

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{a.}$$

Setzen wir $\xi = z - at$, $\eta = z + at$, so ist

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\right),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}.$$

Die Gleichung (a.) verlangt dann, dass

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt, dass φ sich darstellen lässt als die Summe einer Function von ξ und einer von η, also ist allgemein

$$\varphi = F_1(\xi) + F_2(\eta),$$
$$= F_1(z - at) + F_2(z + at).$$

---

*) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Leipzig 1876. S. 312.

Gesetzt, es sei $\varphi = F_1(z - at)$, und es habe F_1 variable Werthe, es gäbe also eine Oscillationsgeschwindigkeit, wenn $z - at$ zwischen 0 und ε liegt. Für ein bestimmtes t giebt es also nur zwischen $z = at$ und $z = at + \varepsilon$ eine Bewegung. Wenn wir ausserdem annehmen, dass φ immer dieselben Werthe, wie gross auch t sein möge, habe, so sagt man: eine Welle oder auch ein Wellensystem von gleichbleibender Gestalt pflanzt sich mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der z Axe fort.

Ist $\varphi = F_2(z + at)$ und machen wir dieselben Annahmen wie oben, so dass es also nur eine Bewegung giebt zwischen $z = -at$ und $z = -at + \varepsilon$, so müssen wir nun sagen, dass dies die Fortpflanzung einer Welle nach der entgegengesetzten Richtung bedeutet.

Nehmen wir nun zusammen

$$\varphi = F_1(z - at) + F_2(z + at),$$

so wird dies bezeichnen, dass sich zwei Wellensysteme mit der Geschwindigkeit a in der z Richtung fortbewegen und zwar nach entgegengesetzten Seiten.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (4*) in 7. giebt auf dieselbe Weise:

$$\varphi = \frac{1}{r} F_1(r - at) + \frac{1}{r} F_2(r + at).$$

Hierdurch sind also zwei Systeme von Kugelwellen dargestellt, von denen das eine sich vom Kugelmittelpunkt entfernt, das andere sich ihm nähert.

Für einen einfachen Ton ist allgemein

$$\varphi = \psi' \cos(2\pi nt) + \psi'' \sin(2\pi nt),$$

wenn $a = \frac{2\pi n}{\varkappa}$ ist und ψ', ψ'' Functionen von x, y, z sind. Durch Einsetzen dieses Ausdrucks von φ in die Gleichung (4.) in 7. erhält man die Bedingung, der die ψ unterworfen sind. Diese ist $\varkappa^2\psi + \Delta\psi = 0$.

Sind die X, Y, Z nicht gleich Null, so muss dann ausserdem, damit die Gleichung (4**) in 7. erfüllt ist, das P eine solche Form haben, dass es der Gleichung $\frac{n}{2a^2} P = - q'' \cos(2\pi nt) + q' \sin(2\pi nt)$ genügt, und die Gleichungen für ψ' und ψ'' haben dann folgende Form:

$$0 = 4\pi q + \varkappa^2\psi + \Delta\psi.$$

9. Schwingungen in einem elastischen Mittel, welches einen nach beiden Seiten unendlich langen Cylinder erfüllt.

Die Resultate der vorigen Nummer können wir auch erhalten aus den Gleichungen in 3., von denen wir jetzt ausgehen.

Wir setzen die Störung des Gleichgewichtes in unserem Cylinder, dessen Axe die x Axe bilde, so beschaffen voraus, dass alle Punkte eines zur Axe senkrechten Querschnittes gleiche Geschwindigkeiten parallel der Axe und gleiche Condensation besitzen.

Weil alle Punkte sich nur bewegen in der Richtung der Cylinderaxe, so ist

$$v = w = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

und weil σ nicht von y und z abhängt, so ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0.$$

Die Gleichungen unter 3. werden also für unseren Fall:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

und aus beiden die eine

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \qquad p = \varphi(\varrho), \qquad \varrho = c(1 + \sigma).$$

Der Anfangszustand für $t = 0$ sei gegeben durch $u = f(x)$, $\sigma = F(x)$.

Diesen Gleichungen wird genügt durch:

$$u = \psi(x \pm at), \qquad \sigma = \mp \frac{1}{a} \psi(x \pm at),$$

so dass wir zunächst zwei Lösungen haben, wenn zugleich statt ψ einmal ein anderes Functionszeichen χ gesetzt wird, nämlich

$$u = \psi(x + at), \qquad \sigma = -\frac{1}{a} \psi(x + at)$$

und

$$u = \chi(x - at), \qquad \sigma = \frac{1}{a} \chi(x - at).$$

Daraus bildet man durch Addition die allgemeine Lösung mit 2 willkürlichen Functionen:

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at),$$
$$\sigma = -\frac{1}{a} \psi(x + at) + \frac{1}{a} \chi(x - at).$$

Diese willkürlichen Functionen werden durch den Anfangszustand bestimmt; denn es ist

$$f(x) = \psi(x) + \chi(x), \qquad a F(x) = -\psi(x) + \chi(x),$$

also

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2} f(x) - \tfrac{1}{2} a F(x), \qquad \chi(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \tfrac{1}{2} a F(x),$$

so dass also die vollständige Lösung ist

$$u = \tfrac{1}{2} f(x + at) - \tfrac{1}{2} a F(x + at) + \tfrac{1}{2} f(x - at) + \tfrac{1}{2} a F(x - at),$$
$$\sigma = -\frac{1}{2a} f(x + at) + \tfrac{1}{2} F(x + at) + \frac{1}{2a} f(x - at) + \tfrac{1}{2} F(x - at).$$

10. Es werde der ursprüngliche Gleichgewichtszustand nur innerhalb des Raumes von $x = -\alpha$ bis $x = +\alpha$ gestört.

Bei dieser Annahme hat für $t = 0$, $u = f(x)$ und $\sigma = F(x)$ an allen Stellen, für die $x > \alpha$ und $x < -\alpha$ den Werth 0, während zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ der Werthe von f(x) und F(x) gegebene im Allgemeinen von 0 verschiedene Werthe hat.

1) Für einen Punkt $x > \alpha$, der also ausserhalb des Erregungsraumes liegt, ist immer $x + at > \alpha$, mithin $f(x + at)$ und $F(x + at)$ gleich Null und es bleibt von den obigen Gleichungen nur

$$u = \tfrac{1}{2} f(x - at) + \tfrac{1}{2} a F(x - at),$$

$$\sigma = \frac{1}{2a} f(x - at) + \tfrac{1}{2} F(x - at).$$

Jeder Punkt $x > \alpha$ ist mithin zu Anfang in Ruhe, denn für ihn ist bei $t = 0$, $f(x)$, $F(x) = 0$, mit wachsendem t nimmt aber $x - at$ ab und sobald $x - at$ gleich α geworden ist, hören die Functionen f und F auf Null zu sein, und damit auch u und σ. Der Punkt $x > \alpha$ fängt also seine Bewegung an zur Zeit t_1, wenn $x - at_1 = \alpha$, also $t_1 = \frac{x - \alpha}{a}$ ist. Wenn die Zeit weiter zunimmt, so wird zur Zeit t_2 der Punkt wieder zur Ruhe kommen, wenn $x - at_2 = -\alpha$, also $t_2 = \frac{x + \alpha}{a}$ ist. Die Dauer seiner Bewegung ist demnach $t_2 - t_1 = \frac{2\alpha}{a}$ proportional der Länge des Erschütterungsraumes. Es rückt mithin eine Welle oder ein Wellensystem nach der positiven Seite von x fort.

2) Für einen Punkt ausserhalb des Erschütterungsraumes auf der negativen Seite ist $x < -\alpha$. Hierfür ist $x - at$ stets kleiner als α, mithin fallen $f(x - at)$ und $F(x - at)$ weg und es bleibt nur

$$u = \tfrac{1}{2} f(x + at) - \tfrac{1}{2} a F(x + at),$$

$$\sigma = -\frac{1}{2a} f(x + at) + \tfrac{1}{2} F(x + at).$$

Auf dieselbe Art wie oben ergeben sich die Anfangs- und Endzeiten der Schwingung $t_1 = -\frac{x + \alpha}{a}$, $t_2 = -\frac{x - \alpha}{a}$ und die Bewegungsdauer $t_2 - t_1 = \frac{2\alpha}{a}$.

Es pflanzt sich mithin ebenso eine Welle oder ein Wellensystem nach der negativen Seite fort.

3) Für einen Punkt innerhalb des Erschütterungsraumes, für $-\alpha < x < \alpha$, verschwinden zwei Glieder, wenn $x + at = \alpha$, also $t = \frac{\alpha - x}{a}$ und die beiden anderen, wenn $x - at = -\alpha$, also $t = \frac{x + \alpha}{a}$ wird. Für die grösste von beiden Zeiten verschwinden alle vier Glieder, also u und σ, und es hört dann die Bewegung ganz auf.

Für zwei Punkte x und x′ ausserhalb des Erschütterungsraumes sind die Zeiten t und t′, zu welchen sie die Bewegung beginnen $t = \frac{\pm x - \alpha}{a}$, $t' = \frac{\pm x' - \alpha}{a}$, je nachdem der Punkt auf der positiven oder negativen Seite liegt. Es ist nun $t' - t = \pm \frac{x' - x}{a}$ die Zeit, während welcher sich

das Phänomen von dem dem Erschütterungsraum näher liegenden Punkt x bis zu dem entfernteren x′ fortgepflanzt hat, mithin ist a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Da nun in einer isotropen elastischen Flüssigkeit $a^2 = \frac{\partial p}{\partial \varrho}$ constant ist, so ist hiermit bewiesen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, da unsere Richtung x willkürlich ist, für alle longitudinalen Wellen dieselbe ist.

Ist x ein Punkt, in dem die Schwingung zur Zeit t beginnt, und x′ ein Punkt, in dem sie zu derselben Zeit aufhört, so ist $t = \frac{\pm x - \alpha}{a}$, $t = \frac{\pm x' + \alpha}{a}$. Hieraus ergiebt sich $x - x' = \pm 2\alpha$ als die Länge des Raumes, welcher zur Zeit t sich in Erschütterung befindet, der demnach eben so lang ist, als der anfängliche Erschütterungsraum. Dieser Raum, der mit der Geschwindigkeit a fortrückt, ist die Länge der Welle oder des Wellensystems.

Aus den Gleichungen ergiebt sich noch $u = \pm a\sigma$, d. h. die Geschwindigkeit ist der Condensation proportional. Ferner ist, da a stets positiv ist, u entweder positiv oder negativ, je nachdem σ positiv oder negativ ist, d. h. der Systempunkt oscillirt immer nach der Seite hin, nach der Verdichtung des Systems stattfindet.

Aus 1) folgt weiter, dass wenn wir im Anfangszustand setzen $u = a\sigma$ wir nur ein Wellensystem erhalten, welches nach der positiven Seite fortschreitet, setzen wir aber im Anfangszustand $u = -a\sigma$, so erhalten wir nur ein nach der entgegengesetzten Seite fortschreitendes System.

Es werden demnach durch eine anfänglich zwischen $x = +\alpha$ und $x = -\alpha$ auftretende Erschütterung zwei Wellensysteme erregt, jedes von der Länge 2α, welche sich mit der constanten Fortpflanzungsgeschwindigkeit a nach entgegengesetzten Richtungen parallel der x Axe fortbewegen.

11. Die Wellenbewegung geht nur vorwärts.

Euler, der die obige Theorie zuerst gegeben hat, warf die Frage auf, wie es komme, dass aus dem Anfangszustande zwei Wellen hervorgehen, die sich nach entgegengesetzten Seiten fortpflanzen, dass aber nicht zu jeder Zeit aus dem zu dieser stattfindenden Zustande zwei solche Wellen hervorgehen. An sich kann der Anfangszustand nichts voraus haben vor dem Zustand, welcher zu irgend einer späteren Zeit stattfindet.

Der Beweis dafür, dass nicht jeder Zustand zwei entgegengesetzte Wellenzüge zur Folge hat, stützt sich auf den Satz von der Superposition oder Coexistenz kleiner Bewegungen. Dieser Satz (§ 228) lautet mit Benutzung unserer Bezeichnungen: Wenn aus einem Anfangszustande $u = f_1(x)$, $\sigma = F_1(x)$ für die Geschwindigkeit und die Condensation zur Zeit t die Functionen u_1 und σ_1 folgen; wenn ferner ein zweiter Anfangszustand

$u = f_2(x)$, $\sigma = F_2(x)$ für die Geschwindigkeit und Condensation zur Zeit t die Functionen u_2 und σ_2 ergiebt und man führt nun einen Anfangszustand $u = f_1(x) \pm f_2(x)$, $\sigma = F_1(x) \pm F_2(x)$ ein, dessen Geschwindigkeit und Condensationen durch die algebraischen Summen der Geschwindigkeiten und Condensationen jener beiden Anfangszustände gebildet werden, so folgen aus diesem dritten Anfangszustand zur Zeit t für die Geschwindigkeit u_3 und Condensation σ_3 die Functionen $u_3 = u_1 \pm u_2$, $\sigma_3 = \sigma_1 \pm \sigma_2$, d. h. die algebraischen Summen aus den Functionen, welche diese Grössen für die einzelnen Bewegungen darstellen unter der Voraussetzung, dass die u und σ so kleine Grössen sind, dass die höheren Potenzen und Produkte derselben gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden können.

Die vollständige Erörterung dieses Satzes findet sich in Lagrange, Mécanique analytique, II partie, Sect. V.

Es gehen u_3 und σ_3 aus $f_1(x) \pm f_2(x)$ und $F_1(x) \pm F_2(x)$ hervor, indem man in 9. diese Summen an die Stelle von $f(x)$ und $F(x)$ treten lässt. Man erhält so 8 Glieder, von denen 4 Glieder die u und σ bilden, welche man erhält durch Einführung von $f_1(x)$, $F_1(x)$, die anderen 4 die u und σ, welche entstehen durch Einführung von $f_2(x)$ und $F_2(x)$.

Nach dem obigen Satze können wir nun unseren Anfangszustand in beliebige zwei Anfangszustände zerlegen, wir können also setzen:

$$u = f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$\sigma = F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

und dann können wir weiter über diese Functionen annehmen, dass folgende Beziehung besteht:

$$f_1(x) = a F_1(x), \qquad f_2(x) = - a F_2(x).$$

Dies aber ist erreicht, wenn wir unsere Functionen so wählen, dass

$$f_1(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{a}{2} F(x),$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2a} f(x) + \frac{1}{2} F(x),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{a}{2} F(x),$$

$$F_2(x) = - \frac{1}{2a} f(x) + \frac{1}{2} F(x).$$

Mit Einführung dieser Werthe in die Ausdrücke für u unter 9. erhalten wir für die u, welche dem $f_1(x)$ und $F_1(x)$ angehören:

$$u_1 = \tfrac{1}{2} f(x - at) + \tfrac{1}{2} a F(x - at)$$

und für diejenigen, welche dem $f_2(x)$ und $F_2(x)$ angehören:

$$u_2 = \tfrac{1}{2} f(x + at) + \tfrac{1}{2} a F(x + at).$$

Aehnliche Formeln erhält man für σ.

Es schreitet mithin nach der vorigen Nummer das Wellensystem, welches dem f_1 und F_1 entspricht, nur nach der negativen Seite fort, und das dem f_2 und F_2 entsprechende nur nach der positiven Seite. Es ist also hiermit dargethan, dass jeder Anfangszustand in Folge der Superposition

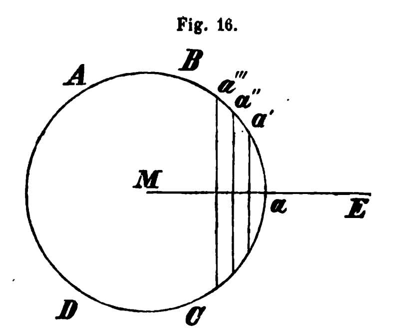
hergestellt werden kann aus zwei einzelnen Zuständen, von denen der eine nur nach der einen, der andere nur nach der entgegengesetzten Seite mit der constanten Geschwindigkeit a fortschreitet.

Auf dieser Erörterung beruht es, dass wir in § 230 nur die Interferenz der von dem Erregungspunkte ausgehenden fortschreitenden Wellen zu berücksichtigen haben.

Das Huyghens'sche Princip. (§ 230.)

Nach § 229, 11 giebt es nicht zurückgehende Elementarwellen, wenn nicht das Mittel ein anderes wird, also ein neuer Anfangszustand eintritt. Es bleibt demnach hier nur noch zu beweisen, dass die Bewegung der einzelnen Punkte in den nach dem Huyghens'schen Princip abgeleiteten Wellen dieselbe ist, als ob die Bewegung sich geradlinig vom Erregungsmittelpunkt aus fortgepflanzt hätte; dass also die Wirkungen der Schwingungen aller Nachbarmolecüle sich wirklich aufheben.

Fig. 16.



Sei M (Fig. 16) der Erregungsmittelpunkt, ABCD, ein Kreis mit dem Halbmesser r, der Durchschnitt der Wellenfläche zur Zeit t und E von a um x entfernt. Nehmen wir an, dass der Punkt a am Anfange der Zeit τ seine Bewegung gerade beginnt, so ist die Phase der Oscillation des Punktes E bestimmt durch die Gleichung

$$y = r \sin 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \quad (\S\ 225.)$$

Nach unserem Princip sind nun alle Punkte der Wellenfläche Mittelpunkte der Bewegung, von denen Schwingungen nach allen Seiten fortgehen. Da aber die Punkte der Oberfläche ABCD im Allgemeinen verschiedene Entfernungen von E haben, so wird dieser Punkt E in Folge der verschiedenen Elementarwellen in verschiedener Phase sich befinden, und zwar wird für die Entfernung x' sein $y' = r \sin 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{x'}{\lambda}\right)$, demnach ist die Phasendifferenz $x' - x$. Um nun die Resultirende sämmtlicher Bewegungen zu erhalten, denken wir uns durch Ebenen senkrecht zu ME die Wellenfläche in eine Reihe von Zonen zerlegt und zwar so, dass die Abstände der Punkte des Grenzkreises einer Zone von E sich von denen der nächsten um $\frac{1}{2}\lambda$ unterscheiden, so dass also, wenn a', a'', a'''... Punkte dieser Grenzkreise sind, $a'''E - a''E = a''E - a'E = a'E - aE = \frac{1}{2}\lambda$ ist. Es wird dann E von den Bewegungen, die von Punkten der Zone aa' ausgehen, nach derselben Richtung bewegt, da die Phasendifferenz kleiner als

$\frac{1}{2}\lambda$ ist. Von der Bewegung, die von Punkten der zweiten Zone ausgeben, wird E nach entgegengesetzter Richtung getrieben, da alle Strahlen dieser Zone gegen die entsprechend liegenden der vorigen um $\frac{1}{2}\lambda$ verschoben sind. Die von der dritten Zone ausgehenden Bewegungen sind nun gegen die der ersten um λ verschoben und bewegen deshalb E in demselben Sinne wie die Wellen von der ersten Zone. Ihnen entgegen wirken nun die Strahlen der vierten Zone u. s. f. Die Bewegung, welche der Punkt E von einer bestimmten Zone erhält, wird daher sowohl von derjenigen, welche von der vorhergehenden, als von derjenigen, welche von der nachfolgenden Zone ausgeht, geschwächt. Es würde demnach die Bewegung von E vollständig aufhören, wenn die Zonen alle einander gleich wären.

Bezeichnet man aber die Abstände der einzelnen Ebenen, welche die Zonen abschneiden, der Reihe nach mit e, e′, e″...., so findet man durch Gleichsetzung zweier Werthe für den Halbmesser des $n+1^{ten}$ Schnittkreises

$$e + e' + e'' + \ldots + e^{(n)} = \frac{(n+1)\lambda\left[x + \frac{1}{2}(n+1)\lambda\right]}{2(r+x)}.$$

Demnach ist nach einer einfachen Rechnung

$$\begin{aligned} e' &= \tfrac{1}{2}(e + e''), \\ e'' &= \tfrac{1}{2}(e' + e'''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{n} &= \tfrac{1}{2}(e^{(n-1)} + e^{(n+1)}). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Grösse jeder Zone gleich ist der halben Summe der vorhergehenden und nachfolgenden Zone. Also ist die zweite Zone gleich der halben ersten plus der halben dritten; die vierte gleich der halben dritten plus der halben fünften etc. Mithin ist die Wirkung der Bewegung der zweiten Zone aufgehoben durch die halbe Summe der Wirkungen der ersten und dritten Zone. Der Rest der dritten Zone mit der halben fünften Zone hebt auf die vierte Zone u. s. f. Aus dieser Betrachtung geht sogleich hervor, dass wir auf den Richtungsunterschied der zusammentreffenden Schwingungen nicht Rücksicht zu nehmen brauchen, denn die Schwingungen aus den benachbarten Zonen sind immer nahezu einander parallel. Es bleibt demnach auf E nur die Hälfte der Wirkung der Bewegung übrig, welche aus der unmittelbaren Nähe von a hervorgeht.

Reflexion der Wellenbewegung. (§ 231.)

1. Einseitig begrenzter Cylinder.

Wir wollen den unbegrenzten Cylinder von § 229, 9. durch eine zur Axe senkrechte Ebene schliessen. An dieser Grenzwand ist mithin die Geschwindigkeit fortwährend gleich Null.

Die hier zu erfüllenden Gleichungen sind dieselben wie oben, nur kommt zu den Bedingungen noch hinzu:

$$u = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und jedes } t.$$

Die allgemeine Lösung in § 229 führte zu den Gleichungen:

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at), \quad \sigma = -\frac{1}{a}\psi(x + at) + \frac{1}{a}\chi(x - at)$$

und für $t = 0$:

$$\psi(x) + \chi(x) = f(x), \quad -\psi(x) + \chi(x) = aF(x).$$

Die $f(x)$ und $F(x)$ sind hier nur für positive Argumente gegeben, da die negative Richtung der x Axe in Folge der Schlussebene nicht dem System angehört. Es sind demnach die ψ und χ für positive Argumente gegeben durch die Gleichungen

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2} f(x) - \tfrac{1}{2} aF(x), \quad \chi(x) = \tfrac{1}{2} f(x) + \tfrac{1}{2} aF(x).$$

In den Werthen für u und σ hat nun das Argument der Function ψ nur positive Werthe $x + at$, also ist die Bestimmung dieser Function vollendet. Anders ist es mit der Function χ, denn in dieser kann das Argument $x - at$ negativ werden. Wir müssen demnach suchen, was aus $\chi(x)$ wird, wenn das Argument einen negativen Werth erhält, wenn also $t > \frac{x}{a}$ ist.

Nach unserer Bedingung $u = 0$ für $x = 0$ ist

$$0 = \psi(at) + \chi(-at) \text{ oder}$$

$$\chi(-at) = -\psi(at).$$

Daraus geht hervor, dass wir, wenn in χ das Argument $x - at$ negativ wird, statt $\chi(x - at)$ schreiben müssen $-\psi(at - x)$, wo dann, da $at - x > 0$ ist, $\psi(at - x)$ eine bekannte Function ist.

Unsere Formeln geben also für die verschiedenen Argumente folgende Resultate.

Für $x - at > 0$:

$$u = \frac{1}{2} f(x + at) - \frac{a}{2} F(x + at) + \frac{1}{2} f(x - at) + \frac{a}{2} F(x - at),$$

$$\sigma = -\frac{1}{2a} f(x + at) - \frac{1}{2} F(x + at) + \frac{1}{2a} f(x - at) + \frac{1}{2} F(x - at).$$

Für $x - at < 0$:

$$u = \frac{1}{2} f(x + at) - \frac{a}{2} F(x + at) - \frac{1}{2} f(at - x) + \frac{a}{2} F(at - x),$$

$$\sigma = -\frac{1}{2a} f(x + at) + \frac{1}{2} F(x + at) - \frac{1}{2a} f(at - x) + \frac{1}{2} F(at - x).$$

Da uns die $f(x)$ und $F(x)$ nur gegeben sind für positive Argumente, so ist es erlaubt, denselben für negative Werthe von x beliebige Bestimmungen zu geben. Wir können daher setzen, um die oben getrennten u und σ in einen Ausdruck zusammenzubringen:

$$f(x - at) = -f(at - x),$$

$$F(x - at) = F(at - x).$$

Es ist aber nun zu untersuchen, was diese Definition bedeutet. Wir wollen annehmen, dass die Erregung der Bewegung zur Zeit $t = 0$ nur innerhalb eines bestimmten Raumes stattfindet, also z. B. innerhalb des Raumes von $x = m$ bis $x = n$, wo $n > m$, so dass also unsere f und F für

grössere und kleinere Argumente als m und n verschwinden. (§ 229, 10.) Unsere Definitionen sagen dann, dass während einer Erschütterung auf der positiven Seite zwischen m n, wie der Erschütterungsraum kurz bezeichnet werden möge, zugleich eine Erschütterung auf der negativen Seite der x in gleicher Entfernung von der yzEbene und gleicher Ausdehnung stattfindet und dass wir dann die Schlussebene ganz wegdenken müssen, also einen unbegrenzten Cylinder haben. Im Anfang $t = 0$ ist auf der positiven Seite von x also die Geschwindigkeit und Condensation gegeben durch $f(x)$ und $F(x)$ innerhalb m n und auf der negativen ist die anfängliche Geschwindigkeit und Condensation $-f(x)$ und $F(x)$. Es verhält sich demnach der negative Erschütterungsraum zum anderen, wie dessen Spiegelbild, also auch in der Art der Wellenerregung und Fortpflanzung. Ein jeder Anfangszustand verursacht zwei Wellenbewegungen, eine nach der positiven, die andere nach der negativen Seite. Die Welle, welche nach der negativen Seite von der negativen Erregungsstelle ausgeht, haben wir, unserer Aufgabe entsprechend, nicht zu berücksichtigen. Wir haben demnach folgende Gleichungen, wenn wir nur die Werthe von u suchen:

1) Von dem positiven Erschütterungsraum aus:

$u_1 = \frac{1}{2} f(x - at) + \frac{1}{2} a F(x - at)$ nach der positiven Seite zu, § 229, 10.

$u_2 = \frac{1}{2} f(x + at) - \frac{1}{2} a F(x + at)$ - - negativen - -

2) Von dem negativen Erschütterungsraum aus:

$$u_3 = -\tfrac{1}{2} f(x + at) + \tfrac{1}{2} a F(x + at),$$

da dies das Spiegelbild der zweiten Wellenerregung von 1) sein muss.

Eine besondere Untersuchung verdienen nun noch die u_2 und u_3, um zu finden, ob die Bedingung $x = 0$, $u = 0$ für jedes t erfüllt ist.

u_2 erreicht den Punkt $x = 0$ in der Zeit $\frac{m}{a}$ und verlässt ihn nach der Zeit $\frac{n}{a}$ und u_3 ebenso in der Zeit $\frac{m}{a}$ und $\frac{n}{a}$. Zwischen dieser Zeit haben wir also für $x = 0$ immer die entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten, mithin immer Ruhe.

Nach Verlauf der Zeit $\frac{n}{a}$ kommt u_2 nicht mehr in Betracht und es bleiben nur noch u_1 und u_3. Der letztere Wellenzug ist dann der reflectirte, der sich in der Richtung der positiven x fortpflanzt, während u_1 dem gewöhnlich fortschreitenden angehört.

2. An beiden Seiten begrenzter Cylinder.

Der Cylinder sei beiderseits durch Ebenen senkrecht zur Axe begrenzt und zwar in $x = 0$ und $x = c$. Zu den Bedingungen der vorigen Nummer kommt noch $u = 0$, wenn $x = c$ für jedes beliebige t. $f(x)$, $F(x)$ sind jetzt für $t = 0$ bestimmt, wenn $0 < x < c$ ist.

Wir setzen wieder

$$u = \psi(x + at) + \chi(x - at), \quad \sigma = -\frac{1}{a}\psi(x + at) + \frac{1}{a}\chi(x - at),$$

und erhalten dann wie oben

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{a}{2}F(x), \quad \chi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{a}{2}F(x).$$

Da x nur die positiven Werthe von 0 bis c haben kann, so umfasst
$x + at$ alle positiven Werthe von 0 bis ∞,
$x - at$ alle Werthe von c bis $-\infty$.

Innerhalb der Grenzen 0 bis ∞ wird für u und σ ψ in Anspruch genommen und von c bis $-\infty$ die Function χ, beide aber sind bis jetzt nur für die Argumente 0 bis c bekannt.

Nun ist weiter nach den Grenzbedingungen

$$0 = \psi(at) + \chi(-at), \qquad \psi(c + at) + \chi(c - at) = 0.$$

Da nun ψ von 0 bis c gegeben ist, so liefert die erste Gleichung χ von 0 bis $-c$, da aber χ der Annahme nach schon bekannt ist von 0 bis $+c$, so ist es nun bestimmt für alle Argumente von $-c$ bis $+c$.

Setzt man dies in die andere Gleichung ein, also statt $c - at$ alle Werthe von $-c$ bis $+c$, d. h. alle Werthe at von 2c bis 0, so ergiebt sich ψ bestimmt für alle Argumente $c + at$ von 3c bis c, also für at von 2c bis 0.

Benutzt man nun die Kenntniss der Function ψ für die erweiterten Argumente at wiederum in der ersten Gleichung, so findet man χ für Argumente von $+c$ bis $-2c$. Damit kann nun abermals mit Hülfe der zweiten Gleichung das Gebiet von ψ erweitert werden u. s. f.

Setzt man $c + at = s$, so ist $-\psi(s) = +\chi(-s + 2c)$ aus der zweiten Gleichung und aus der ersten Gleichung $\psi(s) = -\chi(-s)$. Daraus folgt $\chi(-s) = \chi(-s + 2c)$, wodurch die Periodicität von χ und damit von ψ erwiesen ist.

Das ganze Problem können wir ebenso behandeln, wie das der vorigen Nummer, nur haben wir hier zwei Definitionen mehr einzuführen, es muss sein

$$f(-x) = -f(x), \qquad F(-x) = F(x),$$
$$f(x + 2c) = f(x), \qquad F(x + 2c) = F(x).$$

Ausbreitung des Schalles. (§ 236.)

1. Ausbreitung der Schwingung in der Luft, die ausgeht von einer kleinen schwingenden Kugel.*)

Es möge eine kleine feste Kugel vom Radius R in der Richtung einer Geraden (der z Axe) Schwingungen machen, die gegeben sind durch

$$v = f(t) = c \sin \varkappa at.$$

*) Kirchhoff a. a. O. S. 317.

Die Schwingung beginnt mit t, es ist also f(t) für negative t gleich Null. Wir können das Geschwindigkeitspotential (§ 229, 7.) setzen

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F(r-at)}{r}\right),$$

wo wir über F noch bestimmen können. r bezeichnet die Entfernung eines Punktes in der die Kugel umgebenden Luft vom Coordinatenanfang, so dass also $r > R$ ist.

Statt des obigen Ausdruckes von φ können wir setzen

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r-at)}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r-at)}{r}\right)\cos\vartheta, \qquad \text{(a.)}$$

wo ϑ den Winkel zwischen der z Axe und der Richtung r bedeutet.

Die Componente der Geschwindigkeit nach der Richtung r ist also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{F(r-at)}{r}\right)\cos\vartheta.$$

In der Entfernung R ist diese gleich der gegebenen Geschwindigkeit der schwingenden Kugel. Wir erhalten demnach folgende Differentialgleichung zur Bestimmung der noch willkürlichen Function F

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R} = \frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(\frac{F(R-at)}{R}\right).\cos\vartheta = c\sin\varkappa at.\cos\vartheta.$$

Die Ausführung der angedeuteten Differentiation giebt

$$\frac{2}{R^3}F(R-at) - \frac{2}{R^2}F'(R-at) + \frac{1}{R}F''(R-at) = c\sin\varkappa at.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$F(R-at) = U(t) = U, \qquad \text{(b.)}$$

also

$$\frac{dU}{dt} = -aF'(R-at), \quad F'(R-at) = -\frac{1}{a}.\frac{dU}{dt}, \quad F''(R-at) = \frac{1}{a^2}.\frac{d^2U}{dt^2},$$

so geht unsere Differentialgleichung über in

$$\frac{2}{R^3}U + \frac{2}{aR^2}.\frac{dU}{dt} + \frac{1}{a^2R}\frac{d^2U}{dt^2} = c\sin(\varkappa at). \qquad \text{(c.)}$$

Da nun U jedenfalls eine periodische Function ist, so können wir schreiben

$$U = \mathcal{A}\cos\varkappa at + \mathcal{B}\sin\varkappa at.$$

Die hier noch unbekannten Coefficienten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ erhält man, indem man diesen angenommenen Werth von U in (c.) einführt und einzeln die Coefficienten von $\sin\varkappa at$ und $\cos\varkappa at$ einander gleich setzt.

Diese Rechnung giebt

$$\mathcal{A} = -cR^3\frac{2\varkappa R}{4+\varkappa^4R^4}, \qquad \mathcal{B} = cR^3\frac{2-\varkappa^2R^2}{4+\varkappa^4R^4},$$

also ist

$$U = -cR^3\frac{2\varkappa R}{4+\varkappa^4R^4}\cos a\varkappa t + cR^3\frac{2-\varkappa^2R^2}{4+\varkappa^4R^4}\sin\varkappa at.$$

Nun ist nach (b.)

$$F(r-at)=U\left(t-\frac{r-R}{a}\right),$$

also endlich

$$F(r-at)=\mathcal{A}\cos a\varkappa\left(t-\frac{r-R}{a}\right)+\mathcal{B}\sin\varkappa a\left(t-\frac{r-R}{a}\right).$$

Das Geschwindigkeitspotential des Punktes r ist dann

$$\varphi=\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathcal{A}\frac{\cos\varkappa(at-r+R)}{r}+\mathcal{B}\frac{\sin\varkappa(at-r+R)}{r}\right)\cos\vartheta.$$

Wenn nun $\varkappa a$ zwischen gewissen Grenzen liegt, giebt die Gleichung das Gesetz, nach dem sich dieser Ton, der von der sich bewegenden Kugel hervorgebracht wird, in der Luft verbreitet.

Nach den früheren § 224 etc. eingeführten Bezeichnungen ist

$$T=\frac{2\pi}{\varkappa a},\qquad \lambda=\frac{2\pi}{\varkappa},$$

da die hier mit a bezeichnete Grösse die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist.

Suchen wir nun die Punkte, auf denen keine Verdichtung stattfindet, so haben wir zu untersuchen, wo $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ ist. Es enthält aber $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ den Factor $\cos\vartheta$, mithin ist für $\cos\vartheta=0$ oder $\vartheta=90^\circ$, d. h. in einer Ebene senkrecht zur Schwingungsrichtung durch den Mittelpunkt der schwingenden Kugel gelegt, ist die Verdichtung gleich Null.

Die obige Gleichung für φ kann noch vereinfacht werden, indem man setzt $F(r-at)=C\sin\varkappa(at-r+R+\delta)$.

Wenn man nämlich die eben eingeführten Ausdrücke entwickelt und dann die Coefficienten von $\cos\varkappa(at-r)$ und $\sin\varkappa(at-r)$ einander gleichsetzt, erhält man die beiden Gleichungen:

$$\mathcal{A}\cos\varkappa R+\mathcal{B}\sin\varkappa R=C\sin\varkappa(R+\delta),$$

$$-\mathcal{A}\sin\varkappa R+\mathcal{B}\cos\varkappa R=C\cos\varkappa(R+\delta),$$

mithin

$$C^2=\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2,$$

$$\operatorname{tg}(R+\delta)=\frac{\mathcal{A}\cos\varkappa R+\mathcal{B}\sin\varkappa R}{-\mathcal{A}\sin\varkappa R+\mathcal{B}\cos\varkappa R},$$

2. Potential für weit entfernte Punkte.

Nach 1. ist für einen Punkt, dessen Entfernung vom Anfangspunkte r ist,

$$\varphi=\frac{\partial}{\partial r}\frac{C\sin\varkappa(at-r+R+\delta)}{r}\cos\vartheta,\text{ d. i.}$$

$$\varphi=\left\{-C.\frac{\varkappa\cos\varkappa(at-r+R+\delta)}{r}-C\frac{\sin\varkappa(at-r+R+\delta)}{r^2}\right\}\cos\vartheta.$$

Wenn wir nun zunächst für weit entfernte Punkte, also grosse r, das Glied mit r^2 im Nenner vernachlässigen gegen das, welches nur r dort hat, so bleibt

$$\varphi=-C\frac{\varkappa\cos\varkappa(at-r+R+\delta)}{r}\cos\vartheta.$$

Wir verallgemeinern ferner diesen Ausdruck, indem wir statt der erregenden Kugel einen erregenden Punkt nehmen, also $R = 0$ setzen, und ein anderes Coordinatensystem einführen, so dass der erregende Punkt die Coordinaten α, β, γ hat, während der erregte Punkt vom Coordinatenanfang die Entfernung ϱ habe und r nun, da $R = 0$ ist, die Entfernung des erregenden Punktes vom erregten ausdrückt. Wenn wir ferner statt der Coordinaten x, y, z Kugelcoordinaten einführen, so können wir setzen

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega \cos \psi, \quad z = \varrho \sin \omega \sin \psi$$

und es ist, wenn $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = e^2$ ist:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + e^2 - 2\varrho e\left(\frac{\alpha}{e}\cos\omega + \frac{\beta}{e}\sin\omega\cos\psi + \frac{\gamma}{e}\sin\omega\sin\psi\right)},$$

$$= \varrho - \alpha\cos\omega - \beta\sin\omega\cos\psi - \gamma\sin\omega\sin\psi,$$

wenn die weiteren Glieder, welche ϱ im Nenner bekommen, vernachlässigt werden. Den Factor $\cos\vartheta$ müssen wir dann auch entfernen, wenn der Erregungspunkt, der statt der erregenden Kugel gesetzt ist, solche Schwingungen erregt, die nach allen Richtungen dieselben Geschwindigkeiten haben. Wenn noch zur Abkürzung $\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega\cos\psi + \gamma\sin\omega\sin\varphi = \Theta$ gesetzt wird und nur Glieder der Dimension $\frac{1}{\varrho}$ beibehalten werden, so erhalten wir

$$\varphi = -C\,\frac{\varkappa\cos\varkappa(at-\varrho)\cos(\Theta+\delta)}{\varrho} + C\,\frac{\varkappa\sin\varkappa(at-\varrho)\sin(\Theta+\delta)}{\varrho}$$

oder endlich abgekürzt

$$= M\,\frac{\cos\varkappa(\varrho - at)}{\varrho} - M_1\,\frac{\sin\varkappa(\varrho - at)}{\varrho},$$

wo die M, M_1 unabhängig von ϱ sind, aber möglicher Weise abhängig von den Winkeln, welche die Richtung ϱ mit den Coordinatenaxen bildet.

Statt dieses Ausdrucks können wir nun wieder einfacher setzen

$$\varphi = \mathfrak{A}\,\frac{\cos(\varkappa\varrho - \varkappa at + \delta)}{\varrho},$$

wo ist

$$\mathfrak{A}^2 = M^2 + M_1^2, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{M_1}{M}.$$

Transversale Schwingungen der Saiten. (§ 245.)

1. Differentialgleichungen einer schwingenden Saite.*)

Um die hierher gehörigen Gleichungen aufzustellen, müssen wir zurück zum Anhang zu §§ 64—74, I. B. und dort mit Hülfe des Princips von D'Alembert zu den auf das Innere wirkenden Kräften die Trägheitskräfte hinzufügen. Diese sind aber, wenn G das Gewicht der Volumeneinheit und damit $G\,dx\,dy\,ds$ das Gewicht des Volumenelementes $dx\,dy\,ds$ bedeutet, nach den dort eingeführten Raumcoordinaten

---

*) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. § 59.

$$-\frac{G}{g}\,dx\,dy\,ds\,\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2},\qquad -\frac{G}{g}\,dx\,dy\,ds\,\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2},\qquad -\frac{G}{g}\,dx\,dy\,ds\,\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2},$$

Um nun diese Grössen auf das mit dem Elemente sich bewegende Coordinatensystem zu beziehen, benutzen wir die Formeln S. 97 (b), wenn u, v, w als von höherer Ordnung vernachlässigt werden. Wir können dann ausserdem $z = 0$ setzen, da es sich um einen Punkt des Querschnitts handelt, der einem bestimmten Werthe von s entspricht. Diese Einsetzung giebt zunächst für den ersten Werth

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + x\,\frac{\partial^2 \cos xx'}{\partial t^2} + y\,\frac{\partial^2 \cos yx'}{\partial t^2}.$$

Mithin ist, wenn die abgekürzte Bezeichnung der cos S. 98 benutzt wird:

$$-\frac{G}{g}\,ds\iint\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}\,dx\,dy = -\frac{G}{g}\,ds\iint\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + x\,\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + y\,\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2}\right)dx\,dy.$$

Da nun $\xi, \eta, \zeta, \alpha \ldots$ von x, y unabhängig sind, so erhält man für diesen Ausdruck, mit Rücksicht auf die Gleichungen $\iint x\,dx\,dy = 0$, $\iint y\,dx\,dy = 0$ den einfachen Werth

$$-\frac{G}{g}\,q\,ds\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Ebenso findet man die anderen Trägheitskräfte ausgedrückt durch

$$-\frac{G}{g}\,q\,ds\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},$$

$$-\frac{G}{g}\,q\,ds\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

Das Drehungsmoment in Bezug auf eine Axe, welche der im Raume festen x Axe parallel durch den Punkt ξ, η, ζ gelegt wird, ist, da die Momentenarme sind $y' - \eta$, $z' - \zeta$:

$$-\frac{G}{g}\,ds\iint\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}(y' - \eta) - \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}(z' - \zeta)\right)dx\,dy.$$

Wird dies wie oben für das bewegliche Coordinatensystem transformirt, so erhält man dafür

$$-\frac{G}{g}\,ds\iint\left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + x\,\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} + y\,\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2}\right)(x\beta_1 + y\beta_2)\right]$$
$$-\left[\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + x\,\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + y\,\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2}\right)(x\gamma_1 + y\gamma_2)\right]dx\,dy.$$

Dies giebt, da $\iint xy\,dx\,dy = 0$ und $\iint x^2\,dx\,dy = \lambda^2 q$, $\iint y^2\,dx\,dy = \varkappa^2 q$, wie schon früher eingeführt, den ersten der folgenden Ausdrücke. Die anderen beiden erhält man auf dieselbe Art.

$$-\frac{G}{g}\,q\,ds\left\{\lambda^2\left(\beta_1\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} - \gamma_1\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2}\right) + \varkappa^2\left(\beta_2\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2} - \gamma_2\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2}\right)\right\}.$$

$$-\frac{G}{g}\,q\,ds\left\{\lambda^2\left(\gamma_1\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} - \alpha_1\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2}\right) + \varkappa^2\left(\gamma_2\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} - \alpha_2\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2}\right)\right\},$$

$$-\frac{G}{g}\,q\,ds\left\{\lambda^2\left(\alpha_1\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} - \beta_1\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2}\right) + \varkappa^2\left(\alpha_2\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2} - \beta_2\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2}\right)\right\}.$$

Vergleicht man diese Werthe mit S. 101, so ist nun zu setzen statt $P_{x'}, P_{y'}, P_{z'}, M_1, M_2, M_1', M_1'' \ldots$

$$P_{x'} - \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad P_{y'} - \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad P_{z'} - \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

$$M_1 - \frac{G}{g} q \lambda^2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2}, \quad M_2 - \frac{G}{g} q \varkappa^2 \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2},$$

$$M_1' - \frac{G}{g} q \lambda^2 \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2}, \quad M_2' - \frac{G}{g} q \varkappa^2 \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2},$$

$$M_1'' - \frac{G}{g} q \lambda^2 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2}, \quad M_2'' - \frac{G}{g} q \varkappa^2 \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2}.$$

Für unseren Zweck vereinfachen sich aber diese Ausdrücke wegen der folgenden Voraussetzungen. Die Anfangslage einer Saite ist eine gerade Linie, denn von der Krümmung, die in Folge der Schwere eintreten kann, ist hier abzusehen; ferner werden die Amplituden sehr klein angenommen. Es ist mithin $xx' = yy' = zz' = 0$, also $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma = 1$, während die anderen Winkel wenig von $90°$ abweichen. Dann ist nach S. 107:

$$\alpha = -\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \beta = -\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\beta_1 = -\alpha_2 = \varphi, \quad \xi = u, \quad \eta = v, \quad \zeta = z + w.$$

Die obigen Ausdrücke reduciren sich demnach auf die folgenden:

$$P_{x'} - \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad P_{y'} - \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad P_{z'} - \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$M_1, \quad M_2 + \frac{G}{g} q \varkappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

$$M_1' - \frac{G}{g} q \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad M_2',$$

$$M_1'' + \frac{G}{g} q \lambda^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z}, \quad M_2'' + \frac{G}{g} q \varkappa^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial z}.$$

Durch Einführung dieser Werthe bleiben die Variabeln getrennt, wie in S. 108.

Da wir nun hier nur die Transversalschwingungen betrachten, so erhalten wir endlich durch Einsetzung der erhaltenen Ausdrücke in die Gleichgewichtsgleichungen S. 108 die gewünschten Differentialgleichungen.

$$E q \varkappa^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = C \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + P_{y'} + \frac{\partial M_2''}{\partial z} - \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{G}{g} q \varkappa^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial z^2},$$

$$E q \lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = C \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + P_{x'} + \frac{\partial M_1''}{\partial z} - \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{G}{g} q \lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial z^2},$$

und die Grenzbedingungen für $z = l$:

$$E q \varkappa^2 \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} = -B + C \frac{\partial v}{\partial z} + M_{2l}'' + \frac{G}{g} q \varkappa^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial z},$$

$$E q \lambda^2 \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = -A + C \frac{\partial u}{\partial z} + M_{1l}'' + \frac{G}{g} q \lambda^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z}.$$

$$E q \varkappa^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_{z=l} = - M_{yl},$$

$$E q \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{z=l} = M_{xl}.$$

Da, wie unter 5. nachgewiesen werden soll, für unsere Untersuchung von allen äusseren Kräften abgesehen werden darf, so können wir $P_{y'} = P_{x'} = M_2'' = M_1'' = 0$ setzen.

Beide Gleichungen stimmen für u und v bis auf die Trägheitsradien völlig überein. Daraus geht hervor, dass, wenn die beiden Hauptträgheitsmomente des Querschnittes nicht gleich sind, die ursprünglich erregten Schwingungen sich in zwei Componenten sondern, von denen die eine der einen, die andere der anderen Hauptaxe des Querschnittes parallel gerichtet ist und dass die Tonreihen, welche bei diesen beiden Theilen der Schwingungen erzeugt werden, nicht völlig identisch sind, sondern um so verschiedener, je verschiedener jene Trägheitsmomente sind.

Ist ferner der Querschnitt der Saite so klein, dass selbst noch $E q \varkappa^2$ oder $E q \lambda^2$ sehr klein bleiben und ist die Spannung sehr gross, so wird aus den obigen Gleichungen

$$C \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad C \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{G}{g} p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Letztere Gleichungen erhält man also, wenn die Saiten als absolut biegsam vorausgesetzt sind, also dieselben die Elasticität nur durch die spannenden Gewichte erhalten haben, während in den obigen allgemeinen eine gegenseitige Anziehung der einzelnen Moleküle, die diesen schon eine gewisse Gleichgewichtslage giebt, hinzugenommen ist.

2. Integration der Gleichungen.

Da jede Art der Transversalschwingungen sogleich in zwei zu einander senkrechte zerlegt werden kann und jede derselben zu derselben Art Gleichung führt, so ist es genügend, nur eine Art zu betrachten. Die zu behandelnde Gleichung ist demnach unter Vernachlässigung der äusseren Kräfte, wenn die Spannung C nun mit S bezeichnet wird:

$$E q \lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{G}{g} q \lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial z^2}.$$

Nehmen wir an, dass die Enden fest sind, ohne die Richtung der Saite zu bestimmen, dass ferner die Enden keinerlei Drehungsmomenten unterworfen sind, also $M_{xl} = M_{yl} = 0$, so ist

$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und } z = l.$$

Die Schwingungen sollen ferner eine so geringe Amplitude haben, dass trotz derselben die Grösse der Spannung unverändert bleibt.

Die erste der obigen Grenzbedingungen bleibt hier unberücksichtigt, denn sie könnte nur dazu dienen, eine Beziehung zwischen der Spannung

und den anderen Kräften A und B zu geben, die für unsere Betrachtung gleichgültig ist.

Da unser u eine periodische Function von t ist, so können wir nach § 224 setzen:

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} (u_n \cos \varkappa_n t + u_n' \sin \varkappa_n t),$$

wo u_n und u_n Functionen von z allein und die $\varkappa_n$, welche nach § 224 (27.) $\frac{2\pi}{T} = 2\pi n$ sind, weiter zu bestimmende Grössen sind.

Die mit demselben sin. oder cos. multiplicirten Glieder dieser Summe stellen eine Einzelschwingung vor und jedes dieser Glieder muss für sich der Differentialgleichung genügen.

Setzen wir zunächst, um die Einzelschwingungen zu erhalten,

$$u = u_n \cos \varkappa_n t.$$

Die Einführung dieses Ausdrucks in die Bedingungsgleichung giebt zur Bestimmung von u_n folgende Differentialgleichung:

$$Eq\lambda^2 \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4} = S \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{G}{g} q \varkappa_n^2 u_n - \frac{G}{g} \lambda^2 q \varkappa_n^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch $u_n = e^{\alpha_n z}$, wo nun für α_n sich vier Werthe ergeben, als die Wurzeln der Gleichung des vierten Grades, die durch Einsetzen dieses Integrals in die Differentialgleichung folgt, also der Gleichung

$$Eq\lambda^2 \alpha_n^4 = S\alpha_n^2 + \frac{G}{g} q \varkappa_n^2 - \frac{G}{g} \lambda^2 q \varkappa_n^2 \alpha_n^2.$$

Da diese Gleichung auf 0 gebracht einen Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge enthält, so hat α_n^2, wenn $\varkappa_n$ reell ist, einen positiven und einen negativen Werth. Die Form der Werthe von α_n ist demnach, wenn durch α^2 und $-\beta^2$ die Werthe von α_n^2 bezeichnet werden:

$$\alpha, \quad -\alpha, \quad \beta\sqrt{-1}, \quad -\beta\sqrt{-1}.$$

Die betreffenden Integrale sind dann:

$$e^{\alpha z}, \quad e^{-\alpha z}, \quad e^{\beta\sqrt{-1}}, \quad e^{-\beta\sqrt{-1}},$$

wo ist

$$\alpha^2 = \frac{gS - G\lambda^2 q \varkappa_n^2}{2Eq\lambda^2 g} + \sqrt{\left(\frac{gS - G\lambda^2 q \varkappa_n^2}{2Eq\lambda^2 g}\right)^2 + \frac{G\varkappa_n^2}{Eq\lambda^2}}$$

und

$$\beta^2 = -\frac{gS - G\lambda^2 q \varkappa_n^2}{2Eq\lambda^2 g} + \sqrt{\left(\frac{gS - G\lambda^2 q \varkappa_n^2}{2Eq\lambda^2 g}\right)^2 + \frac{G\varkappa_n^2}{Eq\lambda^2}}.$$

Statt der obigen Integrale können wir setzen:

$$e^{\alpha z}, \quad e^{-\alpha z}, \quad \cos \beta z, \quad \sin \beta z,$$

so dass endlich der allgemeine Ausdruck von u_n ist:

$$u_n = A_n \cos \beta z + B_n \sin \beta z + C_n e^{\alpha z} + D_n e^{-\alpha z}.$$

Zur Bestimmung der Constanten benutzen wir die oben angegebenen Bedingungen für z = 0 und z = l. Dies führt zu den Gleichungen:

$$z=0,\quad 0=A_n+C_n+D_n,$$
$$0=-\beta^2 A_n+\alpha^2(C_n+D_n),$$
$$z=l,\quad 0=A_n\cos\beta l+B_n\sin\beta l+C_n e^{\alpha l}+D_n e^{-\alpha l},$$
$$0=-\beta^2(A_n\cos\beta l+B_n\sin\beta l)+\alpha^2\left(C_n e^{\alpha l}+D_n e^{-\alpha l}\right).$$

Wenn nun α^2 nicht $=\beta^2$ ist, so ist hiernach

1) $A_n=0,\ C_n=0,\ D_n=0$
$\sin\beta l=0$, d. h. $\beta l=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi\ldots$

2) $A_n=0,\ B_n=0,\ C_n=-D_n$
$e^{\alpha l}=e^{-\alpha l}$, d. h. $\alpha l=\pi\sqrt{-1},\ 2\pi\sqrt{-1},\ 3\pi\sqrt{-1}\ldots$

Die Resultate unter 2) geben für αl die Werthe von βl aus 1) nur mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Schreiben wir daher in dem allgemeinen Ausdruck $\frac{\alpha}{\sqrt{-1}}$ statt β, so erhalten wir dieselben Werthe, nur mit einer Verdrehung der Buchstaben, mithin ist 2) nur eine Wiederholung von 1).

Wenn aber $\alpha^2=\beta^2$ ist, so muss die obige Gleichung, da dann $gS=G\lambda^2 q\varkappa_n^2$ ist, sich reduciren auf

$$Eq\lambda^2\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}=\frac{G}{g}q\varkappa_n^2 u_n.$$

Dieser Fall soll später § 247, 4. untersucht werden, denn diese Differentialgleichung resultirt aus Bedingungen, denen die Schwingungen der Stäbe, bei denen keine Spannung vorhanden ist, unterworfen sind.

Setzt man nun $\beta=\frac{\pi}{l},\frac{2\pi}{l},\frac{3\pi}{l},\ldots$ in die obige Gleichung ein zur Berechnung von $\varkappa_n$, so erhält man wirklich nur reelle Werthe von $\varkappa_n$, was den Satz ergiebt, dass nur periodische Bewegungen eintreten können. Denn könnte $\varkappa_n$ imaginär werden, so würde auch $\sin\varkappa_n t$ und $\cos\varkappa_n t$ imaginär werden und die trigonometrischen Grössen würden auf Theile führen, welche die Zeit in Exponentialgrössen enthielten, d. h. auf Glieder, die mit zunehmender Zeit entweder Null werden oder ins Unendliche wachsen müssen, so dass also die Ausdehnungen nicht innerhalb unveränderlicher Grenzen ausgeführt werden.

Die verschiedenen $\varkappa_n$ sind dann:

$$\varkappa_n=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{g.(Eq\lambda^2\pi^2+Sl^2)}{G.q(l^2+\lambda^2\pi^2)}},\quad \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{g(Eq\lambda^2 4\pi^2+Sl^2)}{G.q(l^2+\lambda^2 4\pi^2)}},\ldots$$
$$\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{g(Eq\lambda^2 n^2\pi^2+Sl^2)}{G.q(l^2+\lambda^2 n^2\pi^2)}}.$$

Nehmen wir hier die Spannung S sehr gross und dagegen den Querschnitt ausserordentlich klein, d. h. nehmen wir die Saiten vollkommen biegsam, so dass $Ep\lambda^2 n^2\pi^2$ gegen Sl^2 und $\lambda^2\pi^2$ gegen l^2 verschwindet, so ist:

$$\varkappa_n=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{gS}{Gq}},\quad \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{gS}{Gq}},\quad \frac{3\pi}{l}\sqrt{\frac{gS}{Gq}},\ldots$$

Diese Reihe zeigt, dass die vorhandenen Einzelschwingungen geben Grundton, Octave, Quinte der Octave u. s. f. und dass die Schwingungszahl des Grundtones ist proportional $\frac{1}{l}\sqrt{\frac{gS}{Gq}}$.

Dieselben Resultate liefern die anderen Einzelschwingungen, für die $u = u_n \sin \varkappa_n t$ ist.

Die allgemeine Gleichung der Transversalschwingungen der gespannten Saiten ist demnach

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} (B_n \cos \varkappa_n t + \mathfrak{B}_n \sin \varkappa_n t) \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Zur Bestimmung der darin noch enthaltenen Constanten gehören die zu Anfang stattfindenden Bedingungen. Setzen wir nun für $t = 0$, $u = f(z)$, wo $f(z) = 0$ wird, wenn die Saite gerade ist, und $\frac{\partial u}{\partial t} = F(z)$, wo also $F(z)$ die anfängliche Geschwindigkeit parallel der x Axe bedeutet. Die Einführung dieser Bedingungen giebt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \sin \frac{n\pi z}{l},$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varkappa_n \mathfrak{B}_n \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Hieraus lassen sich die B_n und $\mathfrak{B}_n$ wie folgt bestimmen. Multiplicirt man jede der obigen Gleichungen mit $\sin \frac{h\pi z}{l}$ und integrirt sodann über die ganze Saite, also von 0 bis l, so fallen rechts alle Glieder fort bis auf B_h und $\mathfrak{B}_h$ und man erhält:

$$\int_0^l f(z) \sin \frac{h\pi z}{l} dz = \frac{l}{2} B_h,$$

wo $B_h = 0$ ist, wenn $f(z) = 0$, d. h. die Saite zu Anfang geradlinig ist, und

$$\int_0^l F(z) \sin \frac{h\pi z}{l} dz = \varkappa_h \frac{l}{2} \mathfrak{B}_h.$$

3. Näherungsformeln.

Wenn wir die in 1. gefundenen Momente der Trägheitskräfte oder die betreffenden Cos. vernachlässigen, so reducirt sich die Differentialgleichung für die transversal schwingende Saite in 2. auf:

$$E q \lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = S \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad \text{(a.)}$$

Die Bedingungen am Ende der Saite bleiben dieselben.

Die Gleichung zur Bestimmung des α_n wird aber

$$E q \lambda^2 \alpha_n^4 = S \alpha_n^2 + \frac{G}{g} q \varkappa_n^2,$$

also

$$\alpha^2 = \frac{S}{2 E q \lambda^2} + \sqrt{\frac{G \varkappa_n^2}{g E \lambda^2} + \left(\frac{S}{2 E q \lambda^2}\right)^2}, \qquad \text{(b.)}$$

$$\beta^2 = -\frac{S}{2 E q \lambda^2} + \sqrt{\frac{G \varkappa_n^2}{g E \lambda^2} + \left(\frac{S}{2 E q \lambda^2}\right)^2}. \qquad \text{(c.)}$$

Die weitere Rechnung, wie sie in 2. angegeben ist, liefert dann

$$\varkappa_n^2 = \frac{n^4 \pi^4 E g \lambda^2}{l^4 G} + \frac{n^2 \pi^2 g S}{G q l^2}.$$

Nach § 247, 4. ist das erste Glied dem Quadrat der Schwingungszahl für einen nicht gespannten Stab und das zweite Glied nach 2. dem Quadrat der Schwingungszahl einer vollkommen biegsamen Saite proportional. Diese Zusammensetzung der Schwingungszahl ist von Savart*) und deren theoretische Begründung von Duhamel**) gegeben worden.

Bezeichnet man mit n und P die Schwingungszahl und die Spannung einer absolut biegsamen Saite, so ist $n^2 = \varkappa P$, wo $\varkappa$ eine Constante ist, welche von der Länge und Masse der Saite abhängt. Wenn man nun bei der wirklichen ungespannten Saite annimmt, sie wäre vollkommen biegsam und dafür einer Spannung P_0 unterworfen, so würde dann die Bewegung die sein, welche blos aus ihrer Steifheit entspringt; es würde also, da die Saite sich in dem vorigen Zustande befände, sein $n_0^2 = \varkappa P_0$. Die gespannte Saite könnte man sich darnach vorstellen als eine solche, die bei vollkommener Biegsamkeit durch $P_0 + P_1$ gespannt wäre, mithin ist dann

$$\varkappa_n^2 : 4 \pi^2 = \varkappa (P_0 + P_1) = n_0^2 + n_1^2.$$

Diese Schlussfolgerung ist im Allgemeinen nicht richtig, wie Seebeck***) nachgewiesen hat, denn die Kraft, welche ein Theilchen bei eintretender Biegung vermöge der Spannung durch P_0 erfährt, ist $P_0 . \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, die Kraft aber, welche von der Steifheit herrührt, ist $-E q \lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}$, es müsste also nach der obigen Betrachtung sein:

$$P_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -E q \lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}$$

Diese Gleichung kann aber nur gelten für eine bestimmte Gestalt des schwingenden Drahtes, die gegeben ist durch $u = \alpha \sin cz$. Diese Gestalt aber kann nie bei einem an beiden Enden eingeklemmten Stab oder Draht, wie ihn Savart nach Seebeck benutzte, vorhanden sein, sondern diese Bedin-

---

*) Ann. de Chim. et Phys. S. III. T. VI.

**) Compt. rend. T. XIV.

***) Ueber die Querschwingungen gespannter und nicht gespannter elastischer Stäbe. Abh. der math.-phys. Classe der Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1849.

gung ist nur erfüllt bei der im Obigen gemachten Vernachlässigung oder nach § 247, 4. bei einem an beiden Seiten angestemmten Stab oder bei einer bestimmten Annahme über die Spannung, die in 2. angegeben und wiederum § 247, 4. erwähnt ist.

Da nun auch die Versuchsreihen von Savart nicht vollständig mit den von ihm benutzten Formeln übereinstimmen, so macht Seebeck folgende theoretische Entwickelung, die eine genügende Uebereinstimmung mit den Beobachtungen gegeben hat. Wir gehen aus von der obigen vereinfachten Gleichung (a.), nehmen aber andere Grenzbedingungen, indem wir voraussetzen, dass durch eine Einspannung der Enden eines steifen Fadens die Drehungsmomente nicht verschwinden, wohl aber die Saite an den Endpunkten so bleiben muss, dass $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ ist. Diese Annahme wiederholt sich bei den Stäben § 247. Dies führt mit den in 2. gebrauchten Bezeichnungen zu den Bedingungen

$$z = 0,\quad u = 0,\quad 1)\ A_n + C_n + D_n = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,\quad 2)\ \beta B_n + \alpha C_n - \alpha D_n = 0.$$

$$z = l,\quad u = 0,\quad 3)\ A_n \cos\beta l + B_n \sin\beta l + C_n e^{\alpha l} + D_n e^{-\alpha l} = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,\quad 4)\ -\beta A_n \sin\beta l + \beta B_n \cos\beta l + \alpha C_n e^{\alpha l} - \alpha D_n e^{-\alpha l} = 0.$$

Aus diesen 4 Gleichungen kann durch Elimination von A, B, C, D eine Gleichung gefunden werden, in der α und β nur noch enthalten sind.

Aus 1) und 2) findet man für C_n und D_n:

$$2\alpha C_n = -\alpha A_n - \beta B_n,$$
$$2\alpha D_n = \beta B_n - \alpha A_n.$$

Werden dann die dritte und vierte mit α multiplicirt und unter Berücksichtigung dieser letzten Gleichungen addirt und subtrahirt, so erhält man:

$$B\left(\beta e^{\alpha l} - \alpha \sin\beta l - \beta\cos\beta l\right) = A\left(-\alpha e^{\alpha l} - \beta\sin\beta l + \alpha\cos\beta l\right),$$
$$A\left(\alpha e^{-\alpha l} - \beta\sin\beta l - \alpha\cos\beta l\right) = B\left(\beta e^{-\alpha l} + \alpha\sin\beta l - \beta\cos\beta l\right).$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen erhält man endlich

$$(\alpha^2 - \beta^2)\left(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}\right)\sin\beta l = 2\alpha\beta\left(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}\right)\cos\beta l - 4\alpha\beta.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\left\{\frac{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}} - \frac{2}{\cos\beta l\left(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}\right)}\right\}$$

und

$$\cot\beta l = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}\cdot\frac{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}} + \frac{2}{\sin\beta l\left(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}\right)}.$$

Die Entwickelung der Division giebt:

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\Big\{1+2\left(e^{-2\alpha l}+e^{-4\alpha l}+e^{-6\alpha l}+\ldots\right)$$
$$-\frac{2}{\cos\beta l}\left(e^{-\alpha l}+e^{-3\alpha l}+e^{-5\alpha l}+\ldots\right)\Big\},$$
$$\cot\beta l = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}\Big\{1-2\left(e^{-2\alpha l}-e^{-4\alpha l}+e^{-6\alpha l}+\ldots\right)$$
$$+\frac{2}{\sin\beta l}\left(e^{-\alpha l}-e^{-3\alpha l}+e^{-5\alpha l}+\ldots\right)\Big\}.$$

Wenn keine Spannung vorhanden ist, also $S = 0$, so sind die Werthe α und β nach (b.) und (c.) einander gleich und dann nach § 247, 2. die Werthe αl und βl wenig von $\frac{2i+1}{2}\pi$ verschieden. Wenn aber eine Spannung hinzukommt, so wird α^2 ohne Ende nach (b.) bis ∞ zunehmen, während βl nach den eben gefundenen Gleichungen nur bis $i\pi$ abnehmen kann.

Um eine erste Annäherung zu erhalten, setzen wir $e^{-\alpha l}$, welches schon bei ungespanntem Draht sehr klein ist, verschwindend klein und erhalten demnach $\operatorname{tg}\beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$ oder nach (b.) und (c.):

$$= \frac{2\varkappa_n}{S}\sqrt{\frac{GEq^2\lambda^2}{g}}. \qquad \text{(d.)}$$

Diese erste Annäherung von β setzt man in (c.) ein und berechnet damit $\varkappa_n$. Wenn nun dieser Näherungswerth in (d) eingesetzt wird, erhält man eine zweite Näherung von β für (c) u. s. f.

Mit Hülfe dieses Verfahrens kann man also die Näherung so weit treiben, als man nur will, wenn aber die Steifheit sehr gering ist gegen die Spannung, was bei gewöhnlichen Saiten zutrifft, kann man noch besondere Näherungsformeln aufstellen.

Nach den Gleichungen (b) und (c) ist:

$$\alpha^2 l^2 = \beta^2 l^2 + \frac{Sl^2}{Eq\lambda^2},$$

also αl immer grösser als $\sqrt{\frac{Sl^2}{Eq\lambda^2}}$. Da nun also S gross ist, so muss αl auch sehr gross, also $e^{-\alpha l}$ sehr klein sein, es enthält mithin die Gleichung (d) eine erste gewünschte Näherung. Diese Gleichung (d.) kann geschrieben werden:

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{2\varkappa_n'}{S}\sqrt{\frac{GEq^2\lambda^2}{g}}\left\{1+\frac{\varkappa_n-\varkappa_n'}{\varkappa_n'}\right\},$$

wo $\varkappa_n'$ die Zahl $\varkappa_n$ für die absolut biegsame Saite bezeichnet.

Nun ist nach S. 180:

$$\varkappa_n' = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{gS}{Gq}},$$

also

$$\operatorname{tg}\beta l = 2n\pi\sqrt{\frac{Eq\lambda^2}{l^2 S}}\left\{1+\frac{\varkappa_n-\varkappa_n'}{\varkappa_n'}\right\}. \qquad \text{(e)}$$

Da bei geringer Steifheit $\varkappa_n$ wenig von $\varkappa'_n$ verschieden ist, so ist eine erste Annäherung:

$$\operatorname{tg} \beta l = 2 n \pi \sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}},$$

oder

$$\beta l = n \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tag} 2 n \pi \sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}}.$$

Da nun die Spannung unserer Annahme nach gross und n (der n^te^ Ton) nicht sehr gross ist, so wird diese tag nahezu gleich dem Bogen, also

$$\beta l = n \pi \left(1 + 2 \sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}}\right).$$

Setzt man dann diesen Werth in (c) ein und berechnet $\varkappa_n$, so erhält man bei fortgesetzter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}}$ die Formel

$$\varkappa_n = \varkappa'_n \left\{1 + 2 \sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}}\right\}. \qquad \text{(f)}$$

Nehmen wir eine Saite, deren Querschnitt ein Kreis mit dem Radius r ist, so ist $q = \pi r^2$, $\lambda^2 = \frac{1}{4} r^2$, also

$$\varkappa_n = \varkappa'_n \left\{1 + \frac{r^2}{l} \sqrt{\frac{E \pi}{S}}\right\}.$$

Seebeck giebt noch eine weitere Näherungsformel, welche er durch folgende Bemerkung einleitet: „Da aber diese Formel von n unabhängig ist, so sieht man, dass bei diesem Grade der Annäherung die Folge der Töne noch durch die natürliche Zahlenreihe dargestellt wird. Will man den Einfluss erkennen, welchen die Steifheit auf die Reinheit der von den Aliquottönen der Saite gebildeten Intervalle hat, so muss man die Annäherung noch einen Schritt weiter fortsetzen. Dies kann auf folgende Weise geschehen, indem man die zweite nicht aber die dritte und höhere Potenzen von $\sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}}$ berücksichtigt."

Aus (f) folgt

$$\frac{\varkappa_n - \varkappa'_n}{\varkappa'_n} = 2 \sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}}.$$

Dies in (e) eingesetzt giebt:

$$\operatorname{tg} \beta l = 2 n \pi \sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}} \left\{1 + 2 \sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}}\right\},$$

woraus sich dann bei der eben angegebenen Vernachlässigung ergiebt:

$$\beta = \frac{n \pi}{l} \left\{1 + 2 \sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}} + 4 \frac{E q \lambda^2}{l^2 S}\right\}.$$

Benutzt man diesen Werth nach der oben angegebenen Methode zur weiteren Rechnung, so findet man noch genauer

$$\varkappa_n^2 = \varkappa_n'^2 \left\{1 + 4 \sqrt{\frac{E q \lambda^2}{l^2 S}} + (12 + n^2 \pi^2) \frac{E q \lambda^2}{l^2 S}\right\}.$$

4. Gewöhnliche Theorie.

Bei Lösung des Problems der schwingenden Saiten wird gewöhnlich die Saite als ein absolut biegsamer Körper betrachtet. Man vernachlässigt also die von dem Elasticitätsmodul und den Trägheitsradien abhängigen Grössen. Dieses Problem ist auf mannigfache Art behandelt worden; wir schliessen uns an die Riemann'sche*) Darstellung der Lösung an, wie sie zuerst von Daniel Bernoulli gegeben ist, und erhalten dann zugleich die Differentialgleichung zu § 249.

Nach den im Obigen eingeführten Coordinaten hat ein Punkt $M = (0, 0, z)$ nach der Verschiebung die Lage $m = (u, v, z + w)$ und ein Punkt $M' = (0, 0, z + dz)$ kommt nach $m' = (u + du, v + dv, z + dz + w + dw)$. Mithin ist $mm'^2 = du^2 + dv^2 + (dz + dw)^2$ und $\cos mm' \widehat{\ } X = \frac{du}{mm'}$, $\cos mm' \widehat{\ } Y = \frac{dv}{mm'}$, $\cos mm' \widehat{\ } Z = \frac{dz + dw}{mm'}$. Da wir nun unserem Problem entsprechend voraussetzen, dass die Abweichungen der Saite von der ursprünglichen geraden Linie nur gering sind, so ist $mm' = dz + dw$, mithin:

$$\cos mm' \widehat{\ } X = \frac{\frac{du}{dz}}{1 + \frac{dw}{dz}}, \quad \cos mm' \widehat{\ } Y = \frac{\frac{dv}{dz}}{1 + \frac{dw}{dz}}, \quad \cos mm' \widehat{\ } Z = 1.$$

Durch diese Formänderung wird nun aus der Länge $MM' = dz$ $mm' = dz\left(1 + \frac{dw}{dz}\right)$. Wenn nun S die ursprüngliche Spannung bedeutet, so ist die dieser Verlängerung entsprechende Spannungszunahme nach § 64:

$$S' - S = E\frac{dw}{dz}, \quad \text{also } S' = S + E\frac{dw}{dz}.$$

Die Componenten dieser Spannung nach den drei Coordinatenaxen sind nun:

$$X = \left(S + E\frac{dw}{dz}\right)\cos mm \widehat{\ } X = \left(S + E\frac{dw}{dz}\right)\frac{\frac{du}{dz}}{1 + \frac{dw}{dz}},$$

$$Y = \left(S + E\frac{dw}{dz}\right)\cos mm' \widehat{\ } Y = \left(S + E\frac{dw}{dz}\right)\frac{\frac{dv}{dz}}{1 + \frac{dw}{dz}},$$

$$Z = \left(S + E\frac{dw}{dz}\right)\cos mm' \widehat{\ } Z = \left(S + E\frac{dw}{dz}\right).$$

---

*) Riemann, Partielle Differentialgleichungen. §§ 74, 77.

Diese Ausdrücke müssen, da unserer Annahme nach höhere Potenzen der Differentialquotienten und deren Produkte wegfallen, sich auf folgende Werthe reduciren:

$$X = S\frac{du}{dz}, \quad Y = S\frac{dv}{dz}, \quad Z = S + E\frac{dw}{dz}.$$

Um nun die Spannungen in dem benachbarten Element zu finden, setzen wir statt z den Werth z — dz und erhalten:

$$X' = S\left(\frac{du}{dz} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz\right), \quad Y' = S\left(\frac{dv}{dz} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}dz\right), \quad Z' = S + E\left(\frac{dw}{dz} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}dz\right).$$

Diese Kräfte sind den obigen entgegengesetzt, es bleiben mithin als wirkende Componenten:

$$X - X' = S\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz, \quad Y - Y' = S\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}dz, \quad Z - Z' = E\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}dz.$$

Diese Componenten sind, um die Differentialgleichungen zu finden, gleich zu setzen denen der Trägheitskräfte, so dass man erhält:

$$S\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{G}{g}q\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$S\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{G}{g}q\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$E\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{G}{g}q\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Unser Problem reducirt sich also auf die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

wo zur Abkürzung a^2 für $\frac{Sg}{Gq}$ gesetzt ist.

Für die Integration dieser Gleichungen verweisen wir auf § 249, 2. Da dort $a^2 = \frac{Eg}{G}$, so ist in den gefundenen Resultaten $\frac{S}{q}$ zu schreiben statt E.

5. Von den äusseren Kräften kann bei den Untersuchungen über die Schwingungen abgesehen werden.*)

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers sind nach § 64, 1.:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} + X = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} + Y = m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + Z = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

*) Clebsch a. a. O. § 14.

Die Kräfte N und T, so wie die auf die Oberfläche wirkenden Kräfte $P \cos \pi$, $P \cos \varkappa$, $P \cos \varrho$ (§ 64, 1., S. 3) sind im Allgemeinen Functionen der Coordinaten des Angriffspunktes, also während der Bewegung von $x+u$, $y+v$, $z+w$. Da aber nach unserer Annahme u, v, w sehr kleine Grössen sind, so können wir dieselben gegen x, y, z vernachlässigen und sagen, die Kräfte sind Functionen der Coordinaten des Angriffspunktes in der Ruhelage und vorausgesetzt, dass diese Kräfte nicht auch mit der Zeit veränderlich sind, bleiben sie also nur Functionen von x, y, z. Seien nun u', v', w' die Verschiebungen des Angriffspunktes, die diese Kräfte hervorbringen bis vollständiges Gleichgewicht zwischen ihnen hergestellt ist, und seien die betreffenden Spannungen dann mit einem Accent bezeichnet, so gilt nach § 64:

$$0 = \frac{\partial N_1'}{\partial x} + \frac{\partial T'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T'_{zx}}{\partial z} + X,$$

$$0 = \frac{\partial T'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_2'}{\partial y} + \frac{\partial T'_{zy}}{\partial z} + Y,$$

$$0 = \frac{\partial T'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial N_3'}{\partial z} + Z.$$

und an der Oberfläche

$$N_1' \cos p + T'_{xy} \cos q + T'_{xz} \cos r = P \cos \pi,$$

$$T'_{xy} \cos p + N_2' \cos q + T'_{yz} \cos r = P \cos \varkappa,$$

$$T'_{zx} \cos p + T'_{zy} \cos q + N_3' \cos r = P \cos \varrho.$$

Setzt man nun für die Bewegungen des Körpers unter dem Einfluss derselben Kräfte $u = u' + u''$, $v = v' + v''$, $w = w' + w''$, wo u'', v'', w'' die Bewegungen von der Gleichgewichtslage aus bedeuten, so ist

$$N_1 = N_1' + N_1'', \quad N_2 = N_2' + N_2'', \quad N_3 = N_3' + N_3''.$$

$$T_{yx} = T'_{yx} + T''_{yx}, \quad T_{zx} = T'_{zx} + T''_{zx}, \quad T_{yz} = T'_{yz} + T''_{yz}.$$

Es bleibt dann mit Rücksicht auf die soeben aufgestellten Gleichungen nur übrig:

$$m \frac{\partial^2 u''}{\partial t^2} = \frac{\partial N_1''}{\partial x} + \frac{\partial T''_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T''_{zx}}{\partial z},$$

$$m \frac{\partial^2 v''}{\partial t^2} = \frac{\partial T''_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_2''}{\partial y} + \frac{\partial T''_{zy}}{\partial z},$$

$$m \frac{\partial^2 w''}{\partial t^2} = \frac{\partial T''_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T''_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial N_3''}{\partial z}$$

und an der Grenze

$$N_1'' \cos p + T''_{xy} \cos q + T''_{xz} \cos r = 0,$$

$$T''_{xy} \cos p + N_2'' \cos q + T''_{yz} \cos r = 0,$$

$$T''_{zx} \cos p + T''_{zy} \cos q + N_3'' \cos r = 0.$$

Dies sind aber dieselben Gleichungen, welche man für die Schwingungen um die ursprüngliche Lage x, y, z erhalten würde, wenn weder auf das Innere, noch auf das Aeussere überhaupt Kräfte wirkten. Es gilt demnach der Satz:

Die Schwingungen eines äusseren Kräften unterworfenen Körpers um die diesen Kräften entsprechende Gleichgewichtslage sind genau identisch mit den Schwingungen, welche der Körper um seine natürliche Lage ausführt, wenn gar keine Kräfte von aussen her auf ihn wirken.

Transversale Schwingungen der Stäbe. (§ 247.)

1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen.*)

Wir müssen zurück zu den Gleichungen von § 245, da aber die Schwingungen stattfinden nur in Folge der Elasticität und Trägheit, so müssen wir in den dort aufgestellten Gleichungen $S = 0$ setzen. Demnach ist statt der benutzten Gleichungen zu setzen, da aus demselben Grunde wie dort die Transversalschwingungen nur nach einer Richtung zu betrachten sind:

$$E q \lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = -\frac{G}{g} q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{G}{g} q \lambda^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial z^2}.$$

Deren allgemeines Integral ist

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} (u_n \cos \varkappa_n t + u_n' \sin \varkappa_n t),$$

wo die Bedeutung der darin enthaltenen Grössen dieselbe ist wie § 245. Wir beschäftigen uns zunächst mit Einzelschwingungen, für die ist

$$u = u_n \cos \varkappa_n t.$$

Wird dieses in die Differentialgleichung eingeführt, so ergiebt sich

$$E q \lambda^2 \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4} = \frac{G}{g} q \varkappa_n^2 u_n - \frac{G}{g} q \lambda^2 \varkappa_n^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2},$$

mithin

$$u_n = e^{\alpha_n z}$$

mit der Bedingung

$$E q \lambda^2 \alpha_n^4 = \frac{G}{g} q \varkappa_n^2 - \frac{G}{g} q \lambda^2 \varkappa_n^2 \alpha_n^2 \text{ oder}$$

$$\alpha_n^2 = -\frac{G \varkappa_n^2}{2 g E} \pm \sqrt{\frac{G \varkappa_n^2}{E g \lambda^2} + \left(\frac{G \varkappa_n^2}{2 g E}\right)^2}.$$

Diese Gleichung giebt für α_n^2 nur unter gewissen Bedingungen absolut gleiche Werthe (4.), es ist demnach wie § 245:

$$u_n = A_n \cos \beta z + B_n \sin \beta z + C_n e^{\alpha z} + D_n e^{-\alpha z}.$$

Zur Bestimmung der darin enthaltenen Constanten sind nun weitere Bedingungen vorhanden, die sich auf die Endpunkte der schwingenden Stäbe beziehen. Wir können in Bezug darauf 6 verschiedene Fälle unterscheiden:

---

*) A. Seebeck a. a. O.

1) ein Ende eingeklemmt, das andere frei,
2) beide Enden frei,
3) beide Enden eingeklemmt,
4) ein Ende angestemmt, das andere frei,
5) ein Ende angestemmt, das andere frei,
6) beide Enden angestemmt.

1) Ist ein Ende fest eingeklemmt, so ist daselbst $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

2) Für ein freies Ende ist, da dann an diesem weder eine Kraft, noch ein Kraftmoment wirkt, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0$.

3) Für ein gegen ein festes Widerlager angestemmtes Ende ist $u = 0$ und da der Stab sich um dieses Ende hebelartig drehen kann, so muss daselbst das Drehungsmoment verschwinden, also $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ sein.

Die hier angegebenen Bedingungen geben endlich die folgenden Gleichungen:

$$z = 0, \quad u = 0 = A + C + D; \tag{1.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 = \beta B + \alpha C - \alpha D, \tag{2.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 = -\beta^2 A + \alpha^2 C + \alpha^2 D, \tag{3.}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0 = -\beta^3 B + \alpha^3 C - \alpha^3 D, \tag{4.}$$

$$z = l, \quad u = 0 = A \cos \beta l + B \sin \beta l + C e^{\alpha l} + D e^{-\alpha l}, \tag{5.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 = -\beta A \sin \beta l + \beta B \cos \beta l + \alpha C e^{\alpha l} - \alpha D e^{-\alpha l}, \tag{6.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 = -\beta^2 A \cos \beta l - \beta^2 B \sin \beta l + \alpha^2 C e^{\alpha l} + \alpha^2 D e^{-\alpha l}, \tag{7.}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0 = \beta^3 A \sin \beta l - \beta^3 B \cos \beta l + \alpha^3 C e^{\alpha l} - \alpha^3 D e^{-\alpha l}, \tag{8.}$$

Aus (1.) und (2.) ergiebt sich dann, indem die erste mit α multiplicirt wird und mit der (2.) durch Addition und Subtraction verbunden wird:

$$\alpha A + \beta B = -2 \alpha C, \tag{1*}$$

$$\alpha A - \beta B = -2 \alpha D. \tag{2*}$$

Aus (3.) und (4.) ergiebt sich durch Elimination von D und C:

$$\alpha \beta^2 A + \beta^3 B = 2 \alpha^3 C, \tag{3*}$$

$$\alpha \beta^2 A - \beta^3 B = 2 \alpha^3 D. \tag{4*}$$

2. Ein Ende ist fest eingeklemmt, das andere frei.

Die zu erfüllenden Gleichungen sind (1.), (2.), (7.), (8.). Wird (7.) mit α multiplicirt, dann mit (8.) durch Addition und Subtraction verbunden, so folgt mit Berücksichtigung von (1*) und (2*):

$$A\left(-\alpha\beta^2\cos\beta l+\beta^3\sin\beta l-\alpha^3 e^{\alpha l}\right)=B\left(\alpha\beta^2\sin\beta l+\beta^3\cos\beta l+\alpha^2\beta e^{\alpha l}\right),$$
$$B\left(\alpha\beta^2\sin\beta l-\beta^3\cos\beta l-\alpha^2\beta e^{-\alpha l}\right)=A\left(-\alpha\beta^2\cos\beta l-\beta^3\sin\beta l-\alpha^3 e^{-\alpha l}\right).$$

Diese Gleichungen geben dann mit einander multiplicirt und durch $AB\beta$ dividirt:

$$\left[\beta^2(\beta\sin\beta l-\alpha\cos\beta l)-\alpha^3 e^{\alpha l}\right]\left[\beta(\alpha\sin\beta l-\beta\cos\beta l)-\alpha^2 e^{-\alpha l}\right]=$$
$$\left[-\beta^2(\alpha\cos\beta l+\beta\sin\beta l)-\alpha^3 e^{-\alpha l}\right]\left[\beta(\alpha\sin\beta l+\beta\cos\beta l)+\alpha^2 e^{\alpha l}\right].$$

Sei nun E gross und λ^2 klein, so dass man $\left(\frac{G\varkappa_n^2}{2Eg}\right)^2$ gegen $\frac{G\varkappa_n^2}{Eg\lambda^2}$ vernachlässigen kann, oder anders ausgedrückt sei das Moment der Trägheitskräfte gering, so ist $\alpha=\beta$ und die obige Gleichung reducirt sich auf

$$\cos\beta l=-\frac{2}{e^{\beta l}+e^{-\beta l}} \qquad (a.)$$

$$=-2\left(e^{-\beta l}-e^{-3\beta l}+e^{-5\beta l}\ldots\right) \qquad (b.)$$

und es ist

$$\beta^2=\sqrt{\frac{G}{Eg\lambda^2}}\,\varkappa_n \text{ oder } \varkappa_n=\sqrt{\frac{Eg\lambda^2}{G}}\,\beta^2. \qquad (c.)$$

Dies bezieht sich auf den in § 245, 2. ausgeschlossenen Fall.

Die Wurzeln dieser Gleichung, d. h. die Werthe βl, welche derselben Genüge leisten, können, da der cos negativ ist, nur im 2., 3., 6., 7., ... Quadranten liegen. Man kann nun βl wie folgt näherungsweise berechnen.

Die Gleichung (a.) lässt sich umformen in:

$$-1=\frac{e^{\beta l}+e^{-\beta l}}{2}\cdot\frac{e^{\beta l\sqrt{-1}}+e^{-\beta l\sqrt{-1}}}{2},$$
$$=1-\frac{4\beta^4 l^4}{1.2.3.4}+\frac{16\beta^8 l^8}{1.2\ldots 8}-\frac{64\beta^{12}l^{12}}{1.2\ldots 12}+\ldots.$$

Diese Reihe convergirt, wenn βl im zweiten oder auch im dritten Quadranten liegt, so schnell, dass man die Glieder, welche die 12te und höhere Potenzen von βl enthalten, zunächst vernachlässigen kann. Diese Vernachlässigung giebt als ersten Werth $\beta l=1{,}8752$. Dieses Resultat kann man in (b.) einsetzen und ein genaueres βl berechnen. Durch Benutzung dieses genaueren Resultates kann man wieder eine grössere Annäherung berechnen u. s. f. Man erhält dann $\beta l=1{,}87510=0{,}59686\,\pi$. Für die höheren Töne, den zweiten mit eingeschlossen, wird $e^{-\beta l}$ und daher $\cos\beta l$ so klein, dass βl wenig von $\frac{2i-1}{2}\pi$ verschieden wird, dieser erste Werth giebt dann mit (b.) genauere Werthe. Es möge $\varepsilon_i\pi$ die ite Wurzel der Gleichung (a.) bezeichnen, dann ist:

$$\varepsilon_1=0{,}59686,\ \varepsilon_2=1{,}49418,\ \varepsilon_3=2{,}50025,\ \varepsilon_4=3{,}49999,\ldots\varepsilon_i=\frac{2i-1}{2}.$$

Nach Einsetzung dieses Werthes in (c.) erhält man endlich:

$$\varkappa_n=\frac{\varepsilon_i^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{Eg\lambda^2}{G}}.$$

Für ein Rechteck ist $\lambda^2 = \frac{h^2}{12}$ und für einen Kreis $\lambda^2 = \frac{r^2}{4}$ mithin dafür

$$\varkappa_n = \frac{\varepsilon_1^2 \pi^2 h}{l^2} \sqrt{\frac{E g}{G\, 12}}, \quad \varkappa_n = \frac{\varepsilon_1^2 \pi^2 r}{2\, l^2} \sqrt{\frac{E g}{G}}.$$

Für den Grundton ist also die Schwingungszahl

$$n = \frac{\varepsilon_1^2 \pi h}{l^2} \sqrt{\frac{E g}{G . 12}}, \quad n = \frac{\varepsilon_1^2 \pi r}{4\, l^2} \sqrt{\frac{E g}{G}} = 0{,}277 \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{E g}{G}}.$$

Vom zweiten Ton an können wir demnach die Schwingungszahlen annähernd setzen proportional $\left(\frac{2\,i - 1}{2}\right)^2$, also wie $9 : 25 : 49 : 81$.

Die Untersuchung der Gestalt des schwingenden Stabes giebt die Lage der Knoten und Bäuche. Es handelt sich also um die Bestimmung des von z abhängigen Factors des Integrals, der nach unserer speciellen Annahme ist

$$u_n = A \cos \beta z + B \sin \beta z + C e^{\beta z} + D e^{-\beta z},$$

mit den Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= A + C + D \\ 0 &= B + C - D \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} A + B &= -2\, C. \\ A - B &= -2\, D, \end{aligned}$$

$$0 = -A \cos \beta l - B \sin \beta l + C e^{\beta l} + D e^{-\beta l},$$

$$0 = A \sin \beta l - B \cos \beta l + C e^{\beta l} - D e^{-\beta l}.$$

Nun ist

$$\cos \beta l = -\frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}},$$

demnach

$$\sin \beta l = \pm \frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}},$$

wo das obere Zeichen für die geraden, das untere für die ungeraden Werthe von i gilt.

Durch Addition und Subtraction der letzten beiden Gleichungen erhalten wir:

$$0 = -(A + B) \cos \beta l + (A - B) \sin \beta l + 2\, C e^{\beta l},$$

$$0 = -(A - B) \cos \beta l - (A + B) \sin \beta l + 2 D e^{-\beta l}.$$

Daraus mit Hülfe der obigen Werthe

$$0 = 2\, C \cos \beta l - 2\, D \sin \beta l + 2\, C e^{\beta l},$$

$$0 = 2\, D \cos \beta l + 2\, C \sin \beta l + 2\, D e^{-\beta l}.$$

Aus einer der letzten beiden Gleichungen folgt mit Benutzung der oben gefundenen Werthe von $\cos \beta l$ und $\sin \beta l$:

$$C = \pm D e^{-\beta l}.$$

Aus den obigen Gleichungen für $A + B$ und $A - B$ findet man dann

$$A = -(C + D) = -D \left(1 \pm e^{-\beta l}\right),$$

$$B = -(C - D) = D \left(1 \mp e^{-\beta l}\right).$$

So ergiebt sich endlich:

$$u_n = D\left[-\cos\beta z\left(1 \pm e^{-\beta l}\right) + \sin\beta z\left(1 \mp e^{-\beta l}\right) \pm e^{-\beta l} e^{\beta z} + e^{-\beta z}\right].$$

Die Lage der Knotenpunkte ist dann bestimmt durch $u_n = 0$. Diese Gleichung wird, wenn man setzt

$$\delta = \mp e^{-\beta(l-z)} - e^{-\beta z} \pm e^{-\beta l}(\sin\beta z + \cos\beta z), \qquad \text{(d.)}$$

$$\sin\beta z - \cos\beta z = \delta,$$

oder

$$\sin\left(\beta z - \frac{\pi}{4}\right) = \delta \tfrac{1}{2}\sqrt{2}. \qquad \text{(e.)}$$

Nun ist für alle Töne mit Ausnahme des Grundtones, welcher keinen Knoten giebt, $e^{-\beta l}$ sehr klein, auch ist für höhere Töne und solche Knoten, welche den Enden nicht sehr nahe liegen, $e^{-\beta(l-z)}$ und $e^{-\beta z}$ noch so klein, dass δ einen kleinen Werth erhält, mithin ist nach (e.) für den 2ten, 3ten, ...$\varkappa$ten Knoten $\beta z - \frac{\pi}{4}$ wenig von π, 2π, ... $(\varkappa - 1)\pi$ verschieden, also $\beta z = \frac{4\varkappa - 3}{2}\pi$. Setzt man diese erste Näherung in die Gleichung (d.) ein, so erhält man einen Werth von δ, mit dem βz aus (e.) genauer berechnet werden kann u. s. f.

Um den Knoten zu finden, welcher dem freien Ende zunächst liegt, für den $l - z$ sehr klein ist, setze man zunächst $\delta = e^{-\beta z}$, dann erhält man

$$0 = e^{-\beta z} - \sin\beta z + \cos\beta z,$$

woraus man, wenn $e^{-\beta z}$, $\sin\beta z$ und $\cos\beta z$ in Reihen entwickelt werden, erkennt, dass βz nahezu $= 1$, ungefähr 1,04 ist. Mit diesem Werthe ist dann wie oben eine grössere Näherung vorzunehmen.

Auf diese Weise hat Seebeck folgende Entfernungen der Knoten vom freien Ende berechnet, die Länge des Stabes als Einheit genommen:

	1ter Knoten	2ter Knoten		$\varkappa$ter Knoten	vorletzter Knoten	letzter Knoten.
1ter Ton.	0,					
2ter Ton.	0,2261,					
3ter Ton.	0,1321,	0,4999,				
4ter Ton.	0,0944,	0,3558,	0,6439,			
iter Ton.	$\frac{1,3222}{4i-2}$,	$\frac{4,9820}{4i-2}$,	$\frac{9,0007}{4i-2}$,	$\frac{4\varkappa-3}{4i-2}$,	$\frac{4i-10,9993}{4i-2}$,	$\frac{4i-7,0175}{4i-2}$.

Die Bäuche erhält man, wenn man $\frac{\partial u_n}{\partial z} = 0$ setzt. Dies giebt eine der obigen analoge Gleichung, wo dann das δ stets so klein ist, dass eine Näherungsrechnung unnöthig wird. Für den $\varkappa$ten Bauch erhält man angenähert

$$\beta z = \frac{4\varkappa - 1}{4}\pi \text{ und daher für den iten Ton } \frac{z}{l} = \frac{4\varkappa - 2}{4i - 2}.$$

3. Beide Enden sind frei.

Die zu erfüllenden Gleichungen sind dann in 2., (3.), (4.), (7.) und (8.). Die Elimination von A, B, C, D giebt hier:

$$\left[\alpha\beta^2 \cos\beta l - \beta^3 \sin\beta l - \alpha\beta^2 e^{\alpha l}\right]\left[-\beta^3 \cos\beta l + \alpha\beta^2 \sin\beta l + \beta^3 e^{-\alpha l}\right] =$$
$$\left[-\beta^3 \cos\beta l - \alpha\beta^2 \sin\beta l + \beta^3 e^{\alpha l}\right]\left[-\alpha\beta^2 \cos\beta l - \beta^3 \sin\beta l + \alpha\beta^2 e^{-\alpha l}\right].$$

Setzt man hier dieselbe Vereinfachung, $\alpha = \beta$, wie oben, so ist

$$\cos\beta l = \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}, \qquad \sin\beta l = \mp \frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}.$$

Da nun $\cos\beta l$ positiv ist, so müssen die Werthe von βl im 1ten, 4ten, 5ten, 9ten... Quadranten liegen. Dem ersten Quadranten gehört der Werth $\beta l = 0$, der keine Schwingung giebt. Die erste geltende Wurzel liegt im vierten Quadranten, so dass $e^{\beta l}$ ziemlich gross ist und βl angenähert $\frac{2i+1}{2}\pi$ für den iten Ton wird. Mit diesem ersten Näherungswerth rechnet man wie oben weiter und erhält dann mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung:

$$\varepsilon_1 = 1{,}50562, \quad \varepsilon_2 = 2{,}49975, \quad \varepsilon_3 = 3{,}50001 \ldots \varepsilon_i = \frac{2i+1}{2}.$$

Mithin

$$\varkappa_n = \frac{\varepsilon^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{Eg\lambda^2}{G}}.$$

Für den Grundton ist mithin die Schwingungszahl bei einem kreisförmigen Querschnitt:

$$n = 1{,}77963 \frac{r}{l^2}\sqrt{\frac{Eg}{G}}.$$

Die Rechnung zum Auffinden der Schwingungsknoten kommt auf dasselbe hinaus wie oben, aber weil hier βl einen anderen Werth hat, so muss die Lage der Knoten eine andere werden. Die Lage der Knoten für die eine Hälfte des Stabes ist nach der oben angegebenen Art von Seebeck berechnet worden.

	1ter Knoten	2ter Knoten	3ter Knoten	$\varkappa$ter Knoten
1ter Ton.	0,2242,			
2ter Ton.	0,1321,	0,5000,		
3ter Ton.	0,0944,	0,3558,		
iter Ton.	$\frac{1{,}3222}{4i+2}$,	$\frac{4{,}9820}{4i+2}$,	$\frac{9{,}0007}{4i+2}$,	$\frac{4\varkappa-3}{4i+2}$.

Die Lage der Bäuche erhalten wir aus $\frac{\partial u_n}{\partial z} = 0$ und also angenähert für den $\varkappa$ten Bauch des iten Tones $\frac{z}{l} = \frac{4\varkappa - 1}{4i + 2}$.

4. Beide Enden eingeklemmt.

Die zu erfüllenden Gleichungen sind in 2. (1.), (2.), (5.) und (6.). Bei derselben Annäherung wie oben haben wir auch dieselben Gleichungen, also auch dieselbe Tonreihe. Die Knoten entsprechen den Bäuchen der vorigen Untersuchung und umgekehrt.

Die hier gefundenen Werthe können aber nur eine schwache Näherung enthalten, denn bei dieser Art der Befestigung muss stets eine Spannung eintreten. Es ist klar, dass dieser Fall hier ganz derselbe ist, als der auf den man oben § 245, 2. kommt, wenn andere Endbedingungen gegeben sind.

Ein Ende frei, das andere angestemmt.

Die zu erfüllenden Gleichungen sind, wenn das angestemmte Ende der Anfang ist, 2. (1.), (3.), (7.), (8.).

Die Gleichungen (1.), (3.) geben bei der S. 191 vorausgesetzten Näherung, $\alpha = \beta$, $A = 0$ und $C = -D$.

Werden dann (7.) und (8.) erst subtrahirt, dann addirt und dann wieder diese erhaltenen Gleichungen addirt und subtrahirt, so erhält man:

$$-2B \sin \beta l = 2C\left(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}\right),$$
$$-2B \cos \beta l = 2C\left(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}\right)$$

und daraus

$$\operatorname{tg} \beta l = \frac{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}},$$

mithin

$$\sin 2\beta l = \frac{e^{2\beta l} - e^{-2\beta l}}{e^{2\beta l} + e^{-2\beta l}}.$$

Dies ist derselbe Werth, wie unter 2., nur steht hier 2 l statt des dortigen l und ein Vorzeichen ist weggefallen. Es werden die hier entstehenden Töne dieselbe Höhe haben, wie die geraden Töne eines doppelt so langen Stabes, der an beiden Enden frei ist, und die Gestalt des Stabes ist die nämliche, wie die jeder Hälfte dieses längeren Stabes.

Ein Ende eingeklemmt, das andere angestemmt.

Dies giebt dieselben Gleichungen, wie vorhin. Denkt man sich einen doppelt so langen Stab an beiden Enden eingeklemmt und an ihm die Schwingungen mit einer ungeraden Anzahl von Knoten erzeugt, so giebt dieses die nämlichen Töne und es hat jede Hälfte desselben die nämliche Gestalt, wie der ganze Stab im vorliegenden Falle.

5. Beide Enden angestemmt.

Hier gelten dieselben Gleichungen wie § 245, wenn dort gesetzt ist $S = 0$ unter Voraussetzung der hier überall vorgenommenen Vernachlässigungen, oder wenn die in § 245, 2. angegebene Bedingung für S erfüllt ist. Dieser Fall führt also zu folgenden Gleichungen, da aus 2. die Bedingungen (1.), (3.), (5.), (7.) gelten:

$$0 = A + C + D, \qquad (\alpha.)$$
$$0 = -A + C + D, \qquad (\beta.)$$

$$0 = A \cos \beta l + B \sin \beta l + C e^{\beta l} + D e^{-\beta l}, \qquad (\gamma.)$$

$$0 = -A \cos \beta l - B \sin \beta l + C e^{\beta l} + D e^{-\beta l}. \qquad (\delta.)$$

Aus (α.) und (β.) folgt $A = 0$, $C = -D$ und damit aus (γ.) und (δ.) $C\left(e^{\beta l} - e^{-\beta l}\right) = 0$.

Da nun hier der zweite Factor nur dann verschwindet, wenn $\beta l = 0$ ist, und dieser Werth hier nicht in Betracht kommt, so muss $C = 0$ sein und man behält nur $0 = B \sin \beta l$, nun kann aber B nicht $= 0$ sein, weil sonst u_n stets $= 0$ wäre, es ist also

$$\sin \beta l = 0, \quad \text{also } \beta l = \pi,\ 2\pi, \ldots i\pi, \quad \varkappa_n = \sqrt{\frac{E g \lambda^2}{G} \frac{i^2 \pi^2}{l^2}}$$

und die Gestalt des schwingenden Stabes

$$u_n = B \sin \frac{i\pi}{l} z.$$

Transversale Schwingungen der Platten und Membrane. (§ 248.)

1. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.*)

Wir gehen zurück zur Gleichgewichtsgleichung einer Platte von geringer Dicke, also zum Anhang II. zu § 74 B. und fügen zu den Kräften, welche auf das Innere wirken, nach dem D'Alembert'schen Princip die Trägheitskräfte hinzu. Wenn wir demnach die dort angegebenen Bezeichnungen beibehalten, also x', y', z' die Raumcoordinaten des Elementes $da\,db\,dz$ sind und G das Gewicht der Volumeneinheit bezeichnet, so sind die Trägheitskräfte in jedem Elemente:

$$-\frac{G}{g}\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} da\,db\,dz, \qquad -\frac{G}{g}\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} da\,db\,dz, \qquad -\frac{G}{g}\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} da\,db\,dz.$$

An die Stelle von A', B', C', A'', B'', C'' S. 123 treten demnach jetzt

$$A' - \frac{G}{g}\int \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} dz, \qquad B' - \frac{G}{g}\int \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} dz, \qquad C' - \frac{G}{g}\int \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} dz,$$

$$A'' - \frac{G}{g}\int \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} z\,dz, \qquad B'' - \frac{G}{g}\int \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} z\,dz, \qquad C'' - \frac{G}{g}\int \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} z\,dz,$$

wo die Integrale über die ganze Dicke der Platte, also von $-\frac{h}{2}$ bis $+\frac{h}{2}$ auszudehnen sind.

Nach S. 97 (b.) erhalten nun die Coordinaten des betrachteten Elementes x', y', z', wenn ξ, η, ζ die Coordinaten des ihm entsprechenden Punktes der Mittelfläche nach der Verschiebung bedeuten, also $x = y = 0$ gesetzt ist, und mit Vernachlässigung der Grössen höherer Ordnung folgende Werthe:
$$x' = \xi + \alpha z, \qquad y' = \eta + \beta z, \qquad z' = \zeta + \gamma z.$$

---

*) Clebsch a. a. O. § 77 ff.

Dadurch werden die obigen Ausdrücke der Kräfte nach Ausführung der Integration:

$$A' - \frac{Gh}{g}.\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad B' - \frac{Gh}{g}.\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \qquad C' - \frac{Gh}{g}.\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

$$A'' - \frac{Gh^3}{12g}.\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}, \qquad B'' - \frac{Gh^3}{12g}.\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}, \qquad C'' - \frac{Gh^3}{12g}.\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}.$$

Diese Grössen nun in (τ) und (τ') S. 124 und 125 eingesetzt würden die allgemeinen Bewegungsgleichungen einer Platte geben.

Wir haben es hier aber nur mit kleinen Transversalschwingungen zu thun, benutzen also die Gleichung (B^*) mit den Grenzbedingungen aus (B.) S. 131 und 132. Ausserdem setzen wir eben deshalb S. 129 und 130:

$$\alpha = -q_2 = -\frac{\partial \zeta}{\partial a}, \qquad \beta = q_1 = -\frac{\partial \zeta}{\partial b}.$$

Die hier zu betrachtenden Kräfte nehmen dann folgende Form an:

$$C' - \frac{Gh}{g}.\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \qquad A'' + \frac{Gh^3}{12g}.\frac{\partial^3 \zeta}{\partial a \partial t^2}, \qquad B'' + \frac{Gh^3}{12g}.\frac{\partial^3 \zeta}{\partial b \partial t^2}.$$

Es ist demnach zu $C' + \frac{\partial A''}{\partial a} + \frac{\partial B''}{\partial b}$ in (B^*)

$$-\frac{Gh}{g}.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\zeta - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial b^2}\right)\right\}$$

und zu $A'' \cos p + B'' \sin p$ der Grenzbedingung

$$\frac{Gh^3}{12g}.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial a}\cos p + \frac{\partial \zeta}{\partial b}\sin p\right]$$

hinzuzufügen.

2. Klangfiguren einer kreisförmigen freien Platte.

Die in allen Punkten der Scheibe zu erfüllende Gleichung ist also nach 1., weil hier von äusseren Kräften, die auf das Innere oder auf den Rand wirken, abzusehen ist, (B^*) S. 132:

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial a^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial a^2 \partial b^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial b^4} = -\frac{12(1-\mu^2)G}{Eh^2 g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\zeta - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial b^2}\right)\right].$$

Die Grenzbedingungen sind (B.) S. 131

$$(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial b^2}\sin^2 p + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2}\cos^2 p + 2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial a \partial b}\sin p \cos p\right] + \mu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial b^2}\right) = 0,$$

$$(1-\mu)\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial b^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial a^2}\right)\sin p \cos p + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial a \partial b}(\cos^2 p - \sin^2 p)\right\}$$
$$+\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial a^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial a \partial b^2}\right)\cos p + \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial b^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial b \partial a^2}\right)\sin p$$
$$= \frac{(1-\mu^2)G}{Eg}.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial a}\cos p + \frac{\partial \zeta}{\partial b}\sin p\right).$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich wesentlich durch Einführung von Polarcoordinaten. Der Mittelpunkt der Scheibe sei der Anfangspunkt, r und ϑ die laufenden Coordinaten, R der Radius der Scheibe.

Es ist also $a = r\cos\vartheta$, $b = r\sin\vartheta$ und für die Grenze ist $p = \vartheta$. Nach den bekannten Formeln:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial r}\cos\vartheta - \frac{\partial f}{r\,\partial\vartheta}\sin\vartheta, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\vartheta + \frac{\partial f}{r\,\partial\vartheta}\cos\vartheta$$

erhält man

$$\frac{\partial\zeta}{\partial a} = \frac{\partial\zeta}{\partial r}\cos\vartheta - \frac{\partial\zeta}{r\,\partial\vartheta}\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}\cos^2\vartheta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\sin^2\vartheta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2}\sin^2\vartheta$$
$$+ \frac{1}{r^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial b} = \frac{\partial\zeta}{\partial r}\sin\vartheta + \frac{\partial\zeta}{r\,\partial\vartheta}\cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}\sin^2\vartheta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cos^2\vartheta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2}\cos^2\vartheta$$
$$- \frac{1}{r^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial}{r\,\partial r}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial a\,\partial b} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}\cos\vartheta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta}\sin\vartheta - \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2}\sin\vartheta\cos\vartheta$$
$$- \frac{1}{r^2}\cos^2\vartheta\frac{\partial\zeta}{\partial\vartheta},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2}\right)}{\partial a} = \frac{\partial^3\zeta}{\partial r^3}\cos\vartheta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cos\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}\cos\vartheta - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2}\cos\vartheta$$
$$- \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\zeta}{\partial\vartheta^3}\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2}\right)}{\partial b} = \frac{\partial^3\zeta}{\partial r^3}\sin\vartheta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\sin\vartheta + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}\sin\vartheta - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2}\sin\vartheta$$
$$+ \frac{1}{r^3}\frac{\partial^3\zeta}{\partial\vartheta^3}\cos\vartheta.$$

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial a^4} + 2\frac{\partial^4\zeta}{\partial a^2\,\partial b^2} + \frac{\partial^4\zeta}{\partial b^4} = \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial b^2}\right),$$
$$= \frac{\partial^4\zeta}{\partial r^4} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3\zeta}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\zeta}{\partial r},$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{4\zeta}{r^4}\right) + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4\zeta}{\partial\vartheta^4},$$

Werden nun diese Werthe oben eingesetzt und in der Grenzbedingung ϑ statt p geschrieben, so reduciren sich die zu erfüllenden Gleichungen auf

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3\zeta}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{4\zeta}{r^4}\right)$$
$$+ \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4\zeta}{\partial\vartheta^4} = -\frac{1}{e^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\zeta - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2}\right)\right\} \qquad \text{(a.)}$$

für alle Punkte der Platte und am Rand

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\left(\frac{2-\mu}{r^2}\frac{\partial\zeta}{\partial r}-\frac{3-\mu}{r^3}\zeta\right)=\frac{h^2}{12\,e^4}\frac{\partial^3\zeta}{\partial t^2\partial r}, \tag{b.}$$

wobei der Kürze wegen $e^4=\dfrac{E\,g\,h^2}{12\,G.(1-\mu^2)}$ gesetzt worden ist.

Da es sich hier wiederum um Schwingungen handelt, so muss sich ζ darstellen lassen durch eine Reihe geordnet nach den Grössen $\cos\varkappa t$ und $\sin\varkappa t$, die multiplicirt werden mit Functionen der Coordinaten r und ϑ. Die Form der Gleichungen (a.) aber zeigt, dass diese Functionen sich wiederum darstellen lassen in Reihen geordnet nach den cos und sin von $m\vartheta$, wo m alle Zahlen von 0 bis ∞ bedeuten kann, multiplicirt mit Coefficienten, die nun nur noch r enthalten. Wir können also setzen

$$\zeta=\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}[A_{mn}\cos m\vartheta\cos\varkappa_{mn}t+B_{mn}\sin m\vartheta\cos\varkappa_{mn}t$$
$$+C_{mn}\cos m\vartheta\sin\varkappa_{mn}t+D_{mn}\sin m\vartheta\sin\varkappa_{mn}t],$$

wo die A, B, C, D Functionen von r sind. Da nun, wenn dieser Werth in (a.) eingesetzt wird, alle diese Functionen bei gleichem Indexpaar dieselbe Form annehmen, so müssen die A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn} dieselbe Function von r sein, nur multiplicirt mit verschiedenen willkürlichen Constanten, die mit α, β, γ, δ bezeichnet werden mögen, während R_{mn} die unbekannte Function sei, so dass also ist

$$\zeta=\Sigma\Sigma R_{mn}[\alpha_{mn}\cos m\vartheta\cos\varkappa_{mn}t+\beta_{mn}\sin m\vartheta\cos\varkappa_{mn}t$$
$$+\gamma_{mn}\cos m\vartheta\sin\varkappa_{mn}t+\delta_{mn}\sin m\vartheta\sin\varkappa_{mn}t].$$

Setzen wir nun den Werth in (a.) ein, um das R zu bestimmen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^4R_{mn}}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3R_{mn}}{\partial r^3}-\frac{1+2m^2}{r^2}\frac{\partial^2R_{mn}}{\partial r^2}+\frac{1+2m^2}{r^3}\frac{\partial R_{mn}}{\partial r}+\frac{m^4-4m^2}{r^4}R_{mn}$$
$$=\frac{\varkappa_{mn}^2}{e^4}\left[R_{mn}-\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2R_{mn}}{\partial r^2}+\frac{\partial R_{mn}}{r\partial r}-\frac{m^2R_{mn}}{r^2}\right)\right] \tag{c.}$$

und an der Grenze für $r=R$

$$\frac{\partial^2R_{mn}}{\partial r^2}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial R_{mn}}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}R_{mn}\right)=0. \tag{d.}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2R_{mn}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial R_{mn}}{\partial r}\right)-m^2\left(\frac{2-\mu}{r^2}\frac{\partial R_{mn}}{\partial r}-\frac{3-\mu}{r^3}R_{mn}\right)=-\frac{h^2\varkappa_{mn}^2}{12\,e^4}\frac{\partial R_{mn}}{\partial r}.$$

Um aus diesen Differentialgleichungen R_{mn} zu bestimmen, denken wir diese unbekannte Function als eine Reihe, die geordnet ist nach Potenzen von r, also

$$R_{mn}=c\,r^l+c_1r^{l+2}+c_2r^{l+4}+\ldots$$

Dass man diese Reihe nach nur geraden Potenzen fortschreiten lässt, rechtfertigt der Erfolg. Führt man diese Reihe in die erste Gleichung ein, so ergiebt sich durch Gleichsetzung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von r nach passender Transformation:

$$(i^2 - m^2)[(i-2)^2 - m^2]\, c = 0,$$

$$[(i+2)^2 - m^2](i^2 - m^2)\, c_1 = -\frac{\varkappa_{mn}^2 h^2}{12\, e^4}(i^2 - m^2)\, c,$$

$$[(i+4)^2 - m^2][(i+2)^2 - m^2]\, c_2 = -\frac{\varkappa_{mn}^2 h^2}{12\, e^4}[(i+2)^2 - m^2]\, c_1 + \frac{\varkappa_{mn}^2}{e^4}\, c,$$

$$[(i+6)^2 - m^2][(i+4)^2 - m^2]\, c_3 = -\frac{\varkappa_{mn}^2 h^2}{12\, e^4}[(i+4)^2 - m^2]\, c_2 + \frac{\varkappa_{mn}^2}{e^4}\, c_1,$$

$$[(i+8)^2 - m^2][(i+6)^2 - m^2]\, c_4 = -\frac{\varkappa_{mn}^2 h^2}{12\, e^4}[(i+6)^2 - m^2]\, c_3 + \frac{\varkappa_{mn}^2}{e^4}\, c_2.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergiebt sich, dass der Exponent i nur sein kann m, $-m$, $m+2$, $-m+2$, von denen die Reihen für $i = m+2$, $-m+2$ nach der Art derselben durch Combinationen aus denen für $i = m$ und $= -m$ ableitbar sind. Ausserdem aber enthält die Combination der so entstandenen Reihen 4 Constante; denn für $i = m$ und $i = -m$ wird die zweite Gleichung identisch, also bleibt für jede c und c_1 willkürlich.

Es ergiebt sich weiter, dass der Werth $i = -m$ unstatthaft ist; denn in der Reihe kann r, da $r = 0$ ein Punkt der Scheibe ist, nicht im Nenner vorkommen. Setzt man nun $i = m$, so erscheinen alle obigen Gleichungen unter der Form

$$0 = 16(\alpha - 1)\alpha(m + \alpha - 1)(m + \alpha)\, c_\alpha + \frac{\varkappa_{mn}^2 h^2 (m + \alpha - 1)(\alpha - 1)}{3\, e^4}\, c_{\alpha-1} - \frac{\varkappa_{mn}^2}{e^4}\, c_{\alpha-2}.$$

Setzt man

$$c_\alpha = \frac{\mathfrak{b}^\alpha c}{1.2.3\ldots\alpha(m+1\,(m+2)\ldots(m+\alpha)},$$

so verwandeln sich die allgemeinen Formen aller obigen Gleichungen in die eine, die zur Bestimmung von $\mathfrak{b}$ dient:

$$16\,\mathfrak{b}^2 + \frac{\varkappa_{mn}^2 h^2}{3\, e^4}\,\mathfrak{b} - \frac{\varkappa_{mn}^2}{e^4} = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt:

$$\mathfrak{b} = -\frac{\varkappa_{mn}^2 h^2}{96\, e^4} \pm \sqrt{\frac{\varkappa_{mn}^2}{16 e^4} + \left(\frac{\varkappa_{mn}^2 h^2}{96\, e^4}\right)^2}.$$

Man setze

$$\mathfrak{b}'_{mn} = -\frac{\varkappa_{mn}^2 h^2}{96\, e^4} + \sqrt{\frac{\varkappa_{mn}^2}{16 e^4} + \left(\frac{\varkappa_{mn} h^2}{86\, e^4}\right)^2},$$

welches stets positiv ist, und

$$\mathfrak{b}''_{mn} = -\frac{\varkappa_{mn}^2 h^2}{96\, e^4} - \sqrt{\frac{\varkappa_{mn}^2}{16 e^4} + \left(\frac{\varkappa_{mn} h^2}{96\, e^4}\right)^2},$$

welches stets negativ ist.

Der allgemeinste Werth von c_α setzt sich mithin aus zwei Theilen zusammen mit zwei willkürlichen Constanten A und B, so dass wir also schreiben können:

$$c_\alpha = (-1)^\alpha \frac{A_{mn}\,\mathfrak{b}'^{\alpha}_{mn} + B_{mn}\,\mathfrak{b}''^{\alpha}_{mn}}{1.2.3\ldots\alpha(m+1)(m+2)\ldots(m+\alpha)}.$$

Es ist mithin der allgemeinste hier anwendbare Werth von R_{mn}:

$$R_{mn} = A_{mn}\,\varphi_m\left(r\sqrt{b'_{mn}}\right) + B_{mn}\,\varphi_m\left(r\sqrt{b''_{mn}}\right),$$

wo φ eine Reihe der folgenden Form bedeutet:

$$\varphi_m(x) = x^m\left(1 - \frac{x^2}{1.(m+1)} + \frac{x^4}{1.2.(m+1)(m+2} - \ldots\right). \qquad \text{(e.)}$$

Dieser Werth wird dann in die Grenzbedingungen (b.) eingesetzt. Die erste liefert eine Gleichung von der Form

$$0 = A_{mn}\,\Phi + B_{mn}\,\Xi,$$

so dass man setzen kann

$$-\Phi = B_{mn}, \qquad \Xi = +A_{mn}.$$

Benutzt man diese Werthe, so erhält man endlich aus der zweiten Gleichung (b.) eine, die nur die einzige Unbekannte $\varkappa_{mn}$ enthält. Hat man daraus die $\varkappa_{mn}$ berechnet, so ist nun R_{mn} völlig bekannt und demnach auch ζ bis auf die willkürlichen Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welche durch den Anfangszustand bestimmt werden müssen, also durch Gleichungen von folgender Form: für $t = 0$ ist $\zeta = f(r, \vartheta)$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial t} = F(r, \vartheta)$.

Für die Einzelschwingungen ist m eine bestimmte Grösse. Wenn man nun diese gefundene Gleichung auflöst, indem man $\frac{\varkappa^2_{mn}}{e^4}$ als die Unbekannte betrachtet, so sei $\tau^2_{m1}, \tau^2_{m2}, \ldots$ die Reihe dieser Werthe, die nur noch von h und R, also von den Dimensionen der Platte und von der Elasticität wegen μ abhängen, sich aber wesentlich vereinfachen, wenn man die Glieder mit dem Factor h^2 vernachlässigt. Die Schwingungszahlen der Töne, welche die Scheibe angeben kann, sind dann:

$$\frac{\varkappa_{mn}}{2\pi} \text{ oder } \frac{e^2\tau_{m1}}{2\pi}, \ \frac{e^2\tau_{m2}}{2\pi}, \ \frac{e^2\tau_{m3}}{2\pi}, \ldots$$

Diese Werthe hängen nach dem Obigen von h, R, m, μ ab. Für den Grundton ist demnach, wenn der Werth von e^2 S. 199 wieder eingeführt wird:

$$\frac{e^2\tau_{m1}}{2\pi} = \frac{\tau_{m1}}{2\pi}\,\frac{h\sqrt{E.g}}{\sqrt{12(1-\mu^2)G}}.$$

Diese Formel enthält das Gesetz von § 248 des Lehrbuchs.

Um die Knotenlinien zu finden, müssen wir jede Einzelschwingung, welche eintreten kann, besonders betrachten. Eine solche ist dargestellt durch

$$\zeta = C.R_{mn}\cos m\vartheta\cos\varkappa_n t \text{ oder } D.R_{mn}\sin m\vartheta\sin\varkappa_n t.$$

Wir müssen also, um die Ruhepunkte zu finden, setzen:

$$R_{mn}\cos m\vartheta = 0 \text{ oder } R_{mn}\sin m\vartheta = 0.$$

Daraus folgt:

$$R_{mn} = 0, \quad \cos m\vartheta = 0 \text{ oder } R_{mn} = 0, \quad \sin m\vartheta = 0,$$

also jedenfalls:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2m}, \ \frac{3\pi}{2m}, \ldots \frac{2m-1}{2m}\pi \text{ oder } \vartheta = 0, \ \frac{\pi}{m}, \ \frac{2\pi}{m}, \ldots \frac{m\pi}{m};$$

d. h. m verschiedene Radien, welche gleiche Winkel gegen einander bilden, sind Knotenlinien, mithin theilt sich die Scheibe fächerartig in m Theile, deren jeder für sich schwingt. Diese Knotenlinien sind allen Wurzeln τ_{mn} gemeinsam.

Eine zweite Art von Knotenlinien sind concentrische Kreise, deren Halbmesser die Gleichung $R_{mn} = 0$ bestimmen.

3. Schwingungen einer kreisförmigen Membran.

Zur Aufstellung der Gleichungen müssen wir wieder zurück zu S. 132 und dürfen nun das Glied mit der Spannung nicht weglassen. Bezeichnen wir wie dort die Spannung mit T und setzen $g^2 = \frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)T}$, so wird mit Hülfe der Transformationsformeln aus 2. die im Innern zu erfüllende Gleichung:

$$\left(\frac{\partial^4\zeta}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial^3\zeta}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\left[\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{4\zeta}{r^4}\right]$$
$$+ \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4\zeta}{\partial\vartheta^4} - \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2}\right) \qquad \text{(f.)}$$
$$= -\frac{1}{e^4}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2}\right)\right].$$

Die Grenzbedingungen werden auch anders, indem wir annehmen, dass auf den Rand eine Spannung an der Mittelfläche stattfindet, so dass also dort sämmtliche Momente verschwinden. Es sind demnach die Grenzbedingungen nach den Transformationsformeln 2.:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2}\right) = 0 \text{ und } \zeta = 0 \text{ für } r = R. \qquad \text{(g.)}$$

Der Schwingungszustand ist wie vorhin gegeben durch:

$$\zeta = \Sigma\Sigma R_{mn}(\alpha_{mn}\cos m\vartheta\cos\varkappa_{mn}t + \beta_{mn}\sin m\vartheta\cos\varkappa_{mn}t$$
$$+ \gamma_{mn}\cos m\vartheta\sin\varkappa_{mn}t + \delta_{mn}\sin m\vartheta\sin\varkappa_{mn}t).$$

Die Einführung dieses Werthes in (f.) giebt eine Bedingung für R_{mn}:

$$\frac{\partial^4 R_{mn}}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 R_{mn}}{\partial r^3} - \frac{1+2m^2}{r^2}\frac{\partial^2 R_{mn}}{\partial r^2} + \frac{1+2m^2}{r^3}\frac{\partial R_{mn}}{\partial r}$$
$$+ \frac{m^4-4m^2}{r^4}R_{mn} - \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial^2 R_{mn}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R_{mn}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}R_{mn}\right)$$
$$= \frac{\varkappa_{mn}^2}{e^4}\left[R_{mn} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 R_{mn}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R_{mn}}{\partial r} - \frac{m^2 R_{mn}}{r^2}\right)\right]$$

und für $r = R$:

$$\frac{\partial^2 R_{mn}}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial R_{mn}}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}R_{mn}\right) = 0, \quad R_{mn} = 0,$$

Setzen wir ferner analog 2.:

$$R_{mn} = c\,r^i + c_1 r^{i+2} + c_2 r^{i+2},$$

so erhalten wir zur Bestimmung der c durch Gleichsetzung der Coefficienten folgendes System von Gleichungen:

$$0=(i^2-m^2)[(i-2)^2-m^2]\,c,$$

$$0=[(i+2)^2-m^2](i^2-m^2)\,c_1-(i^2-m^2)\left(\frac{h^2\varkappa_{mn}^2}{12\,e^4}-\frac{1}{g^2}\right)c,$$

$$0=[(i+4)^2-m^2][(i+2)^2-m^2]\,c_2-[(i+2)^2-m^2]\left(\frac{h^2\varkappa_{mn}^2}{12\,e^4}-\frac{1}{g^2}\right)c_1-\frac{\varkappa_{mn}^2}{e^4}\,c,$$

$$0=[(i+6)^2-m^2][(i+4)^2-m^2]\,c_3-[(i+4)^2-m^2]\left(\frac{h^2\varkappa_{mn}^2}{12\,e^4}-\frac{1}{g^2}\right)c_2-\frac{\varkappa_{mn}^2}{e^4}\,c_1.$$

. . . .

Diese Gleichungen haben dieselbe Form wie die der vorigen Nummer, wir setzen demnach

$$R_{mn}=A_{mn}\,\varphi\left(r\sqrt{\mathfrak{b}'_{mn}}\right)+B_{mn}\,\varphi_m\left(r\sqrt{\mathfrak{b}''_{mn}}\right),$$

wo hier ist

$$\mathfrak{b}'_{mn}=\frac{h^2\varkappa_{mn}^2}{96\,e^4}-\frac{1}{8\,g^2}-\sqrt{\frac{\varkappa_{mn}^2}{16\,e^4}+\left(\frac{h^2\varkappa_{mn}^2}{96\,e^4}-\frac{1}{8\,g^2}\right)^2},$$

$$\mathfrak{b}'_{mn}=\frac{h^2\varkappa_{mn}^2}{96\,e^4}-\frac{1}{8\,g^2}+\sqrt{\frac{\varkappa_{mn}^2}{16\,e^4}+\left(\frac{h^2\varkappa_{mu}^2}{96\,e^4}-\frac{1}{8\,g^2}\right)^2}.$$

Diese so erhaltene Form von R_{mn} in die 2te Grenzbedingung (g.) eingesetzt giebt

$$0=A_{mn}\,\varphi_m\left(R\sqrt{\mathfrak{b}'_{mn}}\right)+B_{mn}\,\varphi_m\left(R\sqrt{\mathfrak{b}''_{mn}}\right).$$

Dies ist erfüllt, wenn man setzt

$$A_{mn}=\varphi_m\left(R\sqrt{\mathfrak{b}'_{mn}}\right),\quad B_{mn}=-\varphi_m\left(R\sqrt{\mathfrak{b}''_{mn}}\right).$$

Wenn diese Werthe in die erste Gleichung von (g.) eingesetzt werden, so erhält man die Gleichung, aus der $\varkappa_{mn}$ bestimmt werden kann. Diese Einführung giebt:

$$\varphi_m\left(R\sqrt{\mathfrak{b}'_{mn}}\right)\left\{\frac{\partial^2\varphi_m\left(R\sqrt{\mathfrak{b}'_{mn}}\right)}{\partial R^2}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial\varphi_m\left(R\sqrt{\mathfrak{b}''_{mn}}\right)}{\partial R}\right\}$$
$$-\varphi_m\left(R\sqrt{\mathfrak{b}''_{mn}}\right)\left\{\frac{\partial^2\varphi_m\left(R\sqrt{\mathfrak{b}''_{mn}}\right)}{\partial R^2}+\frac{\mu}{R}\frac{\partial\varphi_m\left(R\sqrt{\mathfrak{b}'_{mn}}\right)}{\partial R}\right\}=0.$$

Da die Lösung der aufgestellten Gleichungen beinahe zu denselben Resultaten führt wie oben, so gestaltet sich die Untersuchung der Einzelschwingungen und der Knotenlinien auch so wie vorhin, und die noch willkürlichen Constanten α, β, γ, δ sind durch den Anfangszustand zu bestimmen.

4. Gewöhnliche Theorie.

Setzen wir die Platte so dünn, dass die Produkte in h^2 vernachlässigt werden können, so erhält man die Differentialgleichung der Bewegung, die aus (B*) S. 132 entsteht mit Berücksichtigung von § 248, 1., wenn nun statt a, b die übliche Bezeichnung x und y gesetzt ist:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right),\ \text{wo}\ c^2=\frac{\varepsilon E.g}{(1-\mu)G}\ \text{ist,}\qquad(1.)$$

und die abzuleitenden Grenzbedingungen aus (B.) S. 131 werden identisch 0.

Als Nebenbedingungen sind aber wie vorhin gegeben $\zeta = 0$ an der Umgrenzung der Membran und für $t = 0$

$$\zeta = f(x, y), \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = F(x, y).$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen mögen nun die Schwingungen einer rechteckförmigen Membran untersucht werden.*) Die Seiten des Rechtecks seien l und b, dann ist also ein Punkt im Innern der Membran gebunden an die Ungleichungen $l > y > 0$, $b > x > 0$ und die Randbedingung ist $\zeta = 0$ für $x = 0$ und $x = b$, $y = 0$ und $y = l$.

Eine particuläre Lösung von (1.) ist:

$$\zeta = e^{\alpha x + \beta y + \gamma t}.$$

Setzen wir diesen Werth in (1.) ein, so finden wir eine Gleichung zwischen α, β, γ, nämlich

$$\gamma^2 = c^2 (\alpha^2 + \beta^2). \tag{2.}$$

Da hier die willkürlichen Constanten nur im Quadrat vorkommen, so hängt die Lösung nicht von deren Vorzeichen ab und es kann gesetzt werden:

$$\zeta = \left(p e^{\alpha x} + q e^{-\alpha x}\right) \left(p_1 e^{\beta y} + q_1 e^{-\beta y}\right) \left(e^{\gamma t} \pm e^{-\gamma t}\right).$$

Wegen $\zeta = 0$, wenn $x = 0$ muss sein $p = -q$,

- " $x = b$ " " $e^{+2\alpha b} = 1$, d. h. $\alpha = \frac{m\pi\sqrt{-1}}{b}$, $m = 1.2..$,
- " $y = 0$ " " $p_1 = -q_1$,
- " $y = l$ " " $e^{+2\beta l} = 1$, d. h. $\beta = \frac{n\pi\sqrt{-1}}{l}$, $n = 1.2...$

Dann muss nach (2.) sein:

$$\gamma = \sqrt{-1}\, c\pi \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}},$$

und es sind:

$$\zeta = \sin \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{l} y \cos c\pi t \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}},$$

$$\zeta = \sin \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{l} y \sin c\pi t \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}}$$

particuläre Lösungen, welche den Bedingungen an der Grenze genügen.

Als allgemeine Lösung ergiebt sich daraus:

$$\zeta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{2\pi}{l} y \left\{ A_{mn} \cos c\pi t \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}} \right.$$
$$\left. + B_{mn} \sin c\pi t \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}} \right\}.$$

Mithin gelten für $t = 0$ folgende Gleichungen:

$$f(x, y) = \sum \sum A_{mn} \sin \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{l} y,$$

$$F(x, y) = \sum \sum c\pi \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}}\, B_{mn} \sin \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{l} y,$$

---

*) Riemann a. a. O. §§ 94, 95. — Lamé a. a. O. X. Leçon.

und es ist nach dem Fourier'schen Theorem:

$$A_{mn} = \frac{4}{b.l}\int_0^b\int_0^l f(\lambda, \mu) \sin\frac{m\pi}{b}\lambda \sin\frac{n\pi}{l}\mu . d\lambda d\mu.$$

$$B_{mn} = \frac{4}{blc\pi\sqrt{\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{l^2}}}\int_0^b\int_0^l F(\lambda, \mu) \sin\frac{m\pi}{b}\lambda \sin\frac{n\pi}{l}\mu . d\lambda d\mu.$$

Für ein durch den Anfangszustand bestimmtes m und n ist dann die Schwingungsdauer:

$$T = \frac{2}{c\sqrt{\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{l^2}}},$$

Die Knotenlinien sind bestimmt durch $\zeta = 0$ für jedes t, also

$$x = \frac{b}{m}, \quad \frac{2b}{m}, \ldots \frac{(m-1)b}{m},$$

$$y = \frac{l}{n}, \quad \frac{2l}{n}, \ldots \frac{(n-1)l}{n}.$$

Diese Linien sind demnach den Seiten des Rechtecks parallel und zerlegen dasselbe in congruente Theile.

Ist das Verhältniss $b^2 : l^2$ irrational, so sind die eben betrachteten Knotenlinien die einzigen, welche einem bestimmten Ton zukommen, denn in der Summe für ζ giebt es dann nur ein Doppelglied für diese Schwingungsdauer. Ist aber z. B. $b^2 = \beta l^2$, so ist:

$$T = \frac{2b}{c\sqrt{m^2+\beta^2 n^2}} = \frac{2b}{c\sqrt{r}}.$$

Wir erhalten dieselbe Schwingungsdauer, wenn

$$r = m^2 + \beta^2 n^2 = m_1^2 + \beta^2 n_1^2 = m_2^2 + \beta^2 n_2^2 = \ldots$$

ist, also einem bestimmten Ton entsprechen dann mehrere Doppelglieder.

Ist z. B. die Membran quadratisch, dann ist $b = l$, also $\beta = 1$, und ist $m = 1$, $n = 2$, so giebt dieselbe Schwingungsdauer $m_1 = 2$, $n_1 = 1$, also, wenn $\varkappa = \frac{2\pi}{T} = \frac{c\pi}{b}\sqrt{5}$ gesetzt wird, erhalten wir zwei Doppelglieder für ζ und es ist:

$$\zeta = (A_{12}\cos\varkappa t + B_{12}\sin\varkappa t)\sin\frac{\pi x}{b}\sin\frac{2\pi y}{b}$$
$$+ (A_{21}\cos\varkappa t + B_{21}\sin\varkappa t)\sin\frac{2\pi x}{b}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Soll nun $\zeta = 0$ sein können unabhängig von t, so muss ζ folgende Form annehmen:

$$\zeta = \varphi(t)\left\{\mathfrak{a}\sin\frac{\pi x}{b}\sin\frac{2\pi y}{b} + \mathfrak{b}\sin\frac{2\pi x}{b}\sin\frac{\pi y}{b}\right\}$$
$$= \varphi(t)\, 2\sin\frac{\pi x}{b}\sin\frac{\pi y}{b}\left\{\mathfrak{a}\cos\frac{\pi y}{b} + \mathfrak{b}\cos\frac{\pi x}{b}\right\},$$

wo die Coefficienten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ vom Anfangszustand abhängen.

Wird der Factor vor der Parenthese gleich Null, so bezeichnet dies die Ruhe der Grenzen des Quadrates. $\mathfrak{a} \cos \frac{\pi y}{b} + \mathfrak{b} \cos \frac{\pi x}{b} = 0$ giebt die inneren Knotenlinien. Ist dann 1) $\mathfrak{b} = 0$, 2) $\mathfrak{a} = 0$, 3) $\mathfrak{a} = -\mathfrak{b}$, 4) $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, so ergiebt dies als Knotenlinien:

$$1)\ y = \frac{b}{2}, \quad 2)\ x = \frac{b}{2}, \quad 3)\ y = x, \quad 4)\ y = b - x,$$

Weitere Beispiele sind:

1) $r = m^2 + n^2 = 1 + 1$, also $m = 1$, $n = 1$, dann ist

$$\zeta = \varphi(t) \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b},$$

also die Gleichung der Knotenlinien

$$\sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b} = 0, \text{ d. h. } x = 0,\ y = 0.$$

Die Knotenlinien sind die Grenzlinien.

2) $r = 8$, also $m = 2$, $n = 2$. Die Gleichung der Knotenlinie ist dann:

$$\sin \frac{2\pi x}{b} \sin \frac{2\pi y}{b} = 0$$

oder andere Form:

$$\sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi x}{b} \cos \frac{\pi y}{b} = 0.$$

Es sind also ausser $x = 0$, $y = 0$ noch $x = \frac{b}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ Knotenlinien.

3) $r = 10$. $m = \frac{3}{1}$, $n = \frac{1}{3}$.

Die Form für ζ ist demnach:

$$\zeta = \varphi(t) \left\{ \mathfrak{a} \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{3\pi y}{b} + \mathfrak{b} \sin \frac{3\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \right\}.$$

Die Gleichung der Knotenlinien wird dann:

$$\mathfrak{a} \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{3\pi y}{b} + \mathfrak{b} \sin \frac{3\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b} = 0$$

oder in anderer Form:

$$\sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{b} \left\{ \mathfrak{a} \left[4 \cos^2 \frac{\pi y}{b} - 1 \right] + \mathfrak{b} \left[4 \cos^2 \frac{\pi x}{b} - 1 \right] \right\} = 0,$$

wo die ganze Parenthese die inneren Knotenlinien enthält:

Ist nun speciell:

a) $\mathfrak{b} = 0$, so ist $y = \frac{b}{3}$, $y = \frac{2b}{3}$,

b) $\mathfrak{a} = 0$, so ist $x = \frac{b}{3}$, $y = \frac{2a}{3}$,

c) $\mathfrak{a} = -\mathfrak{b}$, so ist $\cos \frac{\pi y}{b} = \pm \cos \frac{\pi y}{b}$, also $y = x$, $y = b - x$,

d) $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, so ist $\cos^2 \frac{\pi y}{a} + \cos^2 \frac{\pi x}{b} = \frac{1}{2}$, d. i. ein Kreis.

Ist die Membran ein Rechteck und $b^2 : l^2$ rational, also

$$b = \frac{a}{\sqrt{\alpha}}, \qquad l = \frac{a}{\sqrt{\beta}},$$

dann ist für ein Doppelglied:

$$T = \frac{2a}{c\sqrt{\alpha n^2 + \beta m^2}} = \frac{2a}{c\sqrt{r}}.$$

Die Untersuchung, ob mehrere Doppelglieder auf dieselbe Schwingungsdauer führen, hängt also jetzt ab von der Lösung der Gleichung

$$\alpha n^2 + \beta m^2 = r,$$

wo α und β gegeben sind.

5. Gleichungen für rechteckförmige Luftplatten.*)

Wenn wir die Punkte der Luftplatten auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen, wie es bei den Membranen geschehen ist, so erhalten wir nach S. 161, wenn die Theilchen nur Bewegungen in der Ebene der Scheibe und nicht senkrecht zu derselben ausführen können, die zu integrirende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right).$$

Es sind demnach die Componenten der Geschwindigkeit

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

und die Verdichtung

$$\sigma = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Die Grenzbedingungen sind folgende:

1) Bei geschlossenen Luftplatten.

An den Rändern ist die Geschwindigkeit senkrecht zu denselben $= 0$ für jedes t, mithin ist für $x = 0$ und $x = b$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

und für $y = 0$ und $y = l$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

2) Bei offenen Platten.

Wir machen die angenähert richtige Annahme, dass es am Rand wohl eine Geschwindigkeit, aber keine Dichtigkeitsänderung giebt, also $\sigma = 0$ ist.

Das allgemeine Integral der obigen Gleichung ist für geschlossene Platten:

*) Kundt, Schwingungen der rechteckigen, insbesondere der quadratischen Luftplatten. Pogg. 150.

$$\varphi = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos \frac{m\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{l} y . \left\{ A_{mn} \cos c\pi t \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}} \right.$$
$$\left. + B_{mn} \sin c\pi t \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}} \right\}$$

und für überall offene Platten:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{m\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{l} y \left\{ A_{mn} \cos c\pi t \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}} \right.$$
$$\left. + B_{mn} \sin c\pi t \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}} \right\}.$$

Die Constanten A und B werden durch den gegebenen Anfangszustand bestimmt.

Sind die Luftplatten nicht überall am Rande offen oder geschlossen, so sind die Schwingungen durch ganz ähnliche Ausdrücke gegeben, die sich von den obigen nur durch die Einführung der gegebenen Randbedingungen unterscheiden.

Jedes Glied der obigen Doppelreihe entspricht einem Ton, dessen Schwingungsdauer gegeben ist (s. S. 205) durch

$$T = \frac{2}{c\sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{l^2}}}.$$

Die Bemerkung, welche früher gemacht worden ist in Bezug auf das Verhältniss $b^2 : l^2$, gilt auch hier.

6. Discussion der erhaltenen Gleichungen.

Die Knoten findet man, indem man die Punkte x, y sucht, welche für jedes beliebige t folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \qquad \text{(a.)}$$

Da also zur Bestimmung der Lage der Knoten zwei Gleichungen gegeben sind, so werden diese im Allgemeinen nicht wie bei den Membranen in Linien liegen, sondern an einzelnen Punkten sich befinden.

Die Gesammtheit der durch (a.) dargestellten Knoten kann in drei Unterabtheilungen getheilt werden und zwar nach den Nebenbedingungen, denen die Coordinaten der Knotenpunkte ausser (a.) genügen.

a) $\sigma = 0$.

An den hierdurch bestimmten Punkten ist also keine Bewegung der Luft und ausserdem keine Dichtigkeitsänderung vorhanden. Solche Stellen heissen doppelte Knoten.

b) $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0, \ \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}$.

Diese Bedingungen sagen, dass an den so bestimmten Punkten die Verdichtung ein wirkliches Max. oder Min. hat. Die Bewegung der Lufttheilchen um diese Punkte ist also entweder nach diesen hin oder von ihnen weg gerichtet. Solche Stellen heissen umschlossene einfache Knoten.

c) $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}.$

Hier ist eine Dichtigkeitsänderung vorhanden, aber die Verdichtung ist weder ein Max. noch ein Min. Die hierdurch gefundenen Punkte mögen nicht umschlossene einfache Knoten genannt werden.

Die Lage der Bäuche, d. h. die Lage der Punkte, wo das Maximum der Bewegung ohne Dichtigkeitsänderung stattfindet, ist gefunden durch die Gleichung $\sigma = 0$ für jedes t. Die Bäuche werden also, da sie durch eine Gleichung gegeben sind, auf Linien liegen, man wird demnach hier von Bauchlinien sprechen müssen. Die Bedingung $\sigma = 0$ ist aber auch unter a) als eine der Bedingungen für einen doppelten Knoten gegeben. Eine einfache Betrachtung lehrt, dass diese Knoten die Schnittpunkte zweier Bauchlinien sind.

Man sieht ferner, dass die Bauchlinien übereinstimmen mit den Knotenlinien bei schwingenden Platten und Membranen.

7. Untersuchungen zweigliedriger Schwingungen.

Wenn l und b incommensurabel sind, so entspricht jedem Ton ein Doppelglied.

Es soll nun im Folgenden zugleich als Erweiterung von 4. das elegante Verfahren, dessen sich Kundt zur Construction der Bauchlinien bedient, angegeben werden, für solche Schwingungen einer quadratischen offenen Luftplatte, denen zwei Doppelglieder entsprechen. Es ist also abgekürzt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2\sigma = \sin\frac{m\pi}{b}x \sin\frac{n\pi}{b}y\,(A_{mn}\cos Kt + B_{mn}\sin Kt)$$
$$+ \sin\frac{n\pi}{b}x \sin\frac{m\pi}{b}y\,(A_{nm}\cos Kt + B_{nm}\sin Kt).$$

Dieser Gleichung geben wir nach Analogie von S. 205 die Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2\sigma = f(t)\left\{\mathfrak{a}\sin\frac{m\pi}{b}x \sin\frac{n\pi}{b}y + \mathfrak{b}\sin\frac{n\pi}{b}x \sin\frac{m\pi}{b}y\right\}.$$

Die Gleichung der Bauchlinien ist demnach:

$$\mathfrak{a}\sin\frac{m\pi}{b}x \sin\frac{n\pi}{b}y + \mathfrak{b}\sin\frac{n\pi}{b}x \sin\frac{m\pi}{b}y = 0$$

oder

$$\mathfrak{a}\,\frac{\sin\frac{m\pi}{b}x}{\sin\frac{n\pi}{b}x} = -\mathfrak{b}\,\frac{\sin\frac{m\pi}{b}y}{\sin\frac{n\pi}{b}y}.$$

Dieser Bedingung ist genügt, wenn die Zähler, aber nicht die Nenner verschwinden, also wenn

$$x = \frac{pb}{m} \text{ und } y = \frac{qb}{m}$$

ist, wo p und q beliebige ganze Zahlen bedeuten. Hiernach sind jedenfalls die Schnittpunkte der durch diese Grössen bestimmten, den Kanten parallele Linien, Bauchpunkte, wenn nicht etwa die Punkte auf einer Linie liegen, für welche die Nenner verschwinden.

Ferner ist der Gleichung genügt, wenn die Nenner gleichzeitig verschwinden, ohne dass es die Zähler thun.

Dies ist erreicht, wenn

$$x = \frac{rb}{n} \text{ und } y = \frac{sb}{n}$$

ist, wo r und s wieder beliebige ganze Zahlen sind. Die Schnittpunkte der hierdurch gebildeten Parallelen sind demnach wieder Bauchpunkte, wenn dieselben nicht auf einer der im Vorhergehenden bestimmten Linien liegen.

„Durch die beiden quadratischen Gitter zusammen, beschreibt Kundt weiter, wird die Ebene in eine Anzahl von verschieden geformten Rechtecken getheilt. Jedes dieser Rechtecke hat unter allen Umständen mindestens zwei Gitterpunkte als Ecken. Die Curve kann also in jedes Rechteck durch einen Gitterpunkt eintreten und durch einen anderen aus dem Rechteck wieder austreten. Wird aber ein beliebiges der ungleichen Rechtecke von der Curve wirklich durchlaufen, so können alle die Rechtecke, die mit einer Seite an das durchlaufene anstossen, nicht von der Curve getroffen werden, denn beim Ueberschreiten irgend einer Gitterlinie ändert eine Seite der Gleichung ihre Zeichen, während die andere dasselbe behält. Ist daher die Gleichung in einem Rechtecke erfüllt, so kann sie nicht in einem benachbarten, seitlich anstossenden erfüllt sein. Eine Ausnahme wäre nur dann, wenn die Grenzlinie beiden Gittern zugleich angehört."

Fig. 17.

$\mathfrak{a} = -\mathfrak{b}$

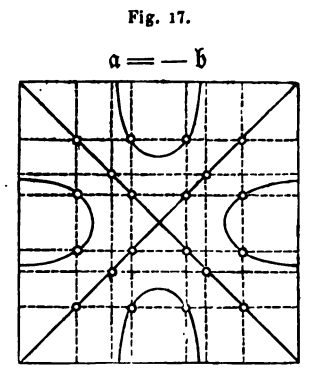
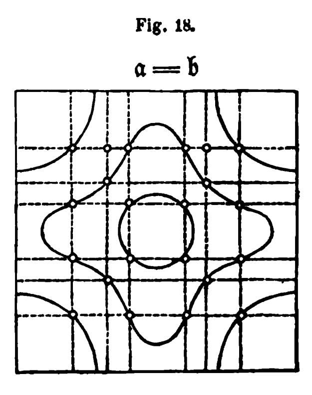


Fig. 18.

$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$



Dies möge durch die beiden Figuren (17 und 18) für $m = 3$, $n = 5$, die aus den 40 von Kundt entworfenen entnommen sind, erläutert werden.

Die beiden Gitter sind durch gestrichelte Linien und die Gitterpunkte durch kleine Kreise bezeichnet. Die ausgezogenen Linien sind die Bauchlinien.

Longitudinale Schwingungen der Saiten und Stäbe. (§ 249.)

Aufstellung der Bewegungsgleichungen und deren Integration.

Aus den Gleichungen der Elasticität S. 109 und denen von § 245, 1. erhalten wir:

$$E q \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - P_{z'} + \frac{G}{g} q \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

mit der Grenzbedingung für $z = l$:

$$E q \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = C.$$

Wenn die äusseren Kräfte gleich Null gesetzt werden oder wenn auch nur das Ende des Stabes durch Kräfte und Kräftepaare angegriffen ist, so erhält die obige Gleichung, da dann jedenfalls $P_{z'} = 0$ ist (S. 102), die Form, wie sie auch nach der Theorie der absolut biegsamen Saiten (§ 245, 4.) gefolgert werden kann.

Da dann aus der Differentialgleichung durch Division der Querschnitt des schwingenden Körpers entfernt werden kann, so müssen, wenn dieser durch die Grenzbedingungen nicht wieder hereinkommt, die Longitudinalschwingungen unabhängig vom Querschnitt sein.

Setzt man $w = w_n \cos (\varkappa_n t)$, wo w_n eine Function von z ist, so erhält man nach Einführung dieses Werthes in die Differentialgleichung, wenn von den äusseren Kräften abgesehen wird,

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} = - \frac{G \varkappa_n^2}{E g} w_n.$$

Deren allgemeines Integral ist

$$w_n = A_n \cos\left(\varkappa_n z \sqrt{\frac{G}{Eg}}\right) + B_n \sin\left(\varkappa_n z \sqrt{\frac{G}{Eg}}\right).$$

Sei nun der Anfang des schwingenden Körpers in Ruhe, also $w_n = 0$ für $z = 0$, so ist $A_n = 0$ und es bleibt nur

$$w = B_n \sin\left(\varkappa_n z \sqrt{\frac{G}{Eg}}\right) \cos \varkappa_n t.$$

a) Ist ausserdem das andere Ende fest, also auch $w_n = 0$ für $z = l$ so muss

$$\sin\left(\varkappa_n l \sqrt{\frac{G}{Eg}}\right) = 0$$

sein oder

$$\varkappa_n = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}, \quad \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}, \quad \frac{3\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}, \ldots \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}.$$

Die Schwingungszahlen sind demnach

$$\frac{\varkappa_n}{2\pi} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}, \quad \frac{2}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}, \quad \frac{3}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}, \dots \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}.$$

Für den Grundton ist die Schwingungszahl $\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}$.

Zur Bestimmung der Schwingungsknoten dient die Gleichung

$$\sin\left(\varkappa_n z \sqrt{\frac{G}{Eg}}\right) = \sin\frac{n\pi}{l} z = 0.$$

Dieser ist genügt, wenn $\frac{n\pi}{l} z = m\pi$ ist, wo m irgend eine ganze Zahl bedeutet. Da hiernach $z = \frac{ml}{n}$ ist, so giebt es $n - 1$ Knotenpunkte für den n^{ten} Ton, welche den ganzen Stab in n einander gleiche Theile theilen.

Alle obigen Betrachtungen gelten auch, wenn wir statt $\cos \varkappa_n t$ setzen $\sin \varkappa_n t$, mithin erhält w die allgemeine Form:

$$w = \sum \sin\frac{n\pi z}{l}\left(B_n \cos\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}\, t + C_n \sin\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}\, t\right).$$

Die darin vorkommenden Constanten sind dann durch den Anfangszustand zu bestimmen. Es muss nämlich noch gegeben sein für $t = 0$ $w = f(z)$ und $\frac{\partial w}{\partial t} = F(z)$. Dies führt zu den Bedingungen

$$f(z) = \sum B_n \sin\frac{n\pi z}{l}, \qquad F(z) = \sum \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}\, C_n \sin\frac{n\pi z}{l}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\sin\frac{h\pi z}{l}$ und integrirt von 0 bis l, so fallen rechts alle Glieder bis auf B_h und C_h fort, es ist mithin

$$\int_0^l f(z)\sin\frac{h\pi z}{l}\, dz = \frac{l}{2} B_h, \quad \int_0^l F(z)\sin\frac{h\pi z}{l}\, dz = \frac{h\pi}{2}\sqrt{\frac{Eg}{G}}\, C_h.$$

Die Anfangsbedingungen bestimmen also die B und C, und man erkennt, dass die Intensität des Tones vom Anfangszustande abhängt, während die Tonhöhe davon unabhängig ist.

Da nun die Schwingungen durch die angestellten Untersuchungen vollständig bestimmt sind, ohne auf die Spannung Rücksicht zu nehmen, so ist dadurch bewiesen, dass diese ohne Einfluss ist auf die Tonhöhe.

b) Das Ende $z = l$ sei frei, dann geht die oben aufgestellte Grenzbedingung über in Eq $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=l} = 0$; denn das Ende ist ganz frei, also keinerlei Zugkraft unterworfen. Es ist mithin

$$\cos\left(\varkappa_n l \sqrt{\frac{G}{Eg}}\right) = 0,$$

also

$$\varkappa_n = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}, \quad \frac{3\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}, \quad \frac{5\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}, \dots \frac{(2n+1)\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{G}}.$$

Dies giebt dieselbe Reihe der Schwingungszahlen wie unter a), nur ist der Grundton um eine Octave tiefer.

Die Gleichung zur Bestimmung der Knotenpunkte ist

$$\sin \varkappa_n z \sqrt{\frac{G}{Eg}} = \sin \frac{(2n-1)}{2l} \pi z = 0.$$

Diese ist erfüllt durch $z = \frac{2ml}{2n-1}$. Um demnach die Knotenpunkte zu finden, muss man die Länge des Stabes in so viel einander gleiche Theile theilen, als diejenige Zahl beträgt, welche das Verhältniss der Schwingungszahl des Begleittones zu der des Grundtones angiebt. Alle geraden Theilpunkte vom festen Ende des Stabes an gerechnet sind dann Knotenpunkte.

Der allgemeinste Ausdruck der Schwingung ist hier

$$w = \sum \sin \frac{2n-1}{2l} \pi z \left(B_n \cos \frac{2n-1}{2l} \pi \sqrt{\frac{Eg}{G}}\, t \right.$$
$$\left. + C_n \sin \frac{2n-1}{2l} \pi \sqrt{\frac{Eg}{G}}\, t \right).$$

Um den Anfangszustand einzuführen, verfährt man wie vorhin, multiplicirt zur Bestimmung der Constanten mit $\sin \frac{2h-1}{2l} \pi z$ und integrirt von 0 bis l. Dies giebt

$$\int_0^l f(z) \sin \left(\frac{2h-1}{2l} \pi z \right) dz = \frac{1}{2} B_h,$$
$$\int_0^l F(z) \sin \left(\frac{2h-1}{2l} \pi z \right) dz = \frac{1}{2} \frac{(2h-1)}{2} \pi \sqrt{\frac{Eg}{G}}\, C_h.$$

Longitudinale Schwingungen von Luftsäulen. Gedeckte Pfeifen. (§ 250.)

1. Geschwindigkeitspotential für einen einfachen Ton.*)

Ein einfacher Ton ist charakterisirt durch eine bestimmte Schwingungszahl n. Wir können demnach setzen:

$$\varphi = \psi' \cos 2\pi n t + \psi'' \sin 2\pi n t,$$

wo ψ' und ψ'' Functionen von x, y, z von der Beschaffenheit sind, dass jede derselben nach § 229, 7. (4.) der Gleichung $\Delta\psi + \varkappa^2\psi = 0$, wenn $\varkappa = \frac{2n\pi}{a}$ gesetzt wird, genügen muss.

Da es sich hier nur um Luftsäulen handelt, so ist φ und damit ψ' und ψ'' nicht von y, z abhängig, wenn die Längsrichtung der Luftsäule mit der x Axe zusammenfällt.

---

*) Kirchhoff a. a. O. S. 323.

Die für die ψ zu erfüllende Bedingungsgleichung reducirt sich demnach auf

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\varkappa^2\psi.$$

Deren allgemeines Integral ist

$$\psi = A \cos \varkappa x + B \sin \varkappa x,$$

wo A und B die willkürlichen Constanten sind, die für die ψ' und ψ'' besonders zu accentuiren sind.

Führen wir diese Werthe von ψ in φ ein, so erhalten wir, wenn wir den Coordinatenanfang und den Anfangspunkt der Zeit passend verlegen, aber die alte Bezeichnung x und t beibehalten, eine Gleichung von der Form:

$$\varphi = \mathcal{A} \cos \varkappa x \cos 2\pi n t + \mathcal{B} \sin \varkappa x \sin 2\pi n t.$$

Die Discussion der Werthe $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wird dann die verschiedenen Schwingungsknoten und Bäuche der Luftsäule geben.

Statt einer beliebigen Luftsäule können wir aber auch eine solche nehmen, welche in eine nach beiden Seiten unendliche Röhre eingeschlossen ist.

Bezeichnet n die Richtung der Normale auf die Röhre, so muss erfüllt sein, da senkrecht zur Röhrenwand keine Bewegung stattfinden kann, $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$. Diese Gleichung ist aber bei unserer Annahme, dass φ von z und y unabhängig ist, selbstverständlich immer erfüllt.

2. Discussion der erhaltenen Gleichung.

a) Ist $\mathcal{B} = 0$, dann erhalten wir

$$\varphi = \mathcal{A} \cos \varkappa x \cos 2 n\pi t,$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\varkappa\mathcal{A} \sin \varkappa x \cos 2 n\pi t,$$

$$\sigma = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\varkappa}{a}\mathcal{A} \cos \varkappa x \sin 2 n\pi t,$$

$$s = \int v dt = -\frac{\varkappa\mathcal{A}}{2 n\pi} \sin \varkappa x \sin 2 n\pi t.$$

Jeder Punkt bewegt sich nach den Gesetzen von § 224, 1., die Amplitude ist $-\frac{\mathcal{A}\varkappa}{2 n\pi} \sin \varkappa x$ und die Phase $2 n\pi$. Es ist also die Phase unabhängig von x, d. h. für einen Augenblick überall dieselbe, während die Amplitude sich mit x ändert. Dies bedeutet eine stehende Schwingung, deren $\lambda = \frac{2\pi}{\varkappa}$ (§ 236) ist. Setzt man nun

$$x = (2m+1)\frac{\lambda}{4}, \text{ so ist } \sin \varkappa x = 1,$$

also befindet sich an diesem x das Max. der Amplitude, d. h. ein Schwingungsbauch.

Für
$$x = 2\,m\,\frac{\lambda}{4} \text{ ist } \sin \varkappa x = 0.$$
Damit sind die x gegeben, an denen die Amplitude gleich Null ist, d. h. die Knotenpunkte.

Die Dichtigkeitsänderung richtet sich nach einem ähnlichen Gesetz. Das Max. σ befindet sich an den Knoten, während an den Bäuchen sich die Dichtigkeit nicht ändert.

Es ist leicht zu übersehen, dass $A = 0$ zu ähnlichen Resultaten führt.

b) Ist $A = \pm B$, so erhält man
$$\varphi = A \cos \varkappa (x \mp at),$$
$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\varkappa A \sin \varkappa (x \mp at),$$
$$\sigma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mp \frac{\varkappa}{a} A \sin \varkappa (x \mp at),$$
$$s = \mp \frac{\varkappa A}{2 n \pi} \cos \varkappa (x \mp at).$$

Nach § 225 bedeutet dies fortschreitende Schwingungen, die nach den verschiedenen Seiten der x Axe gehen. Die Amplitude ist immer dieselbe, aber die Phase ändert sich von Ort zu Ort.

c) Für den allgemeinen Fall ist:
$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\varkappa A \sin \varkappa x \cos 2\pi n t + \varkappa B \cos \varkappa x \sin 2\pi n t,$$
$$= \varkappa \sqrt{A^2 \sin^2 \varkappa x + B^2 \cos^2 \varkappa x}\, \sin (2\pi n t - \delta),$$
$$\sigma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2 n \pi}{a}(-A \cos \varkappa x \sin 2\pi n t + B \sin \varkappa x \cos 2\pi n t),$$
$$= \frac{\varkappa}{a}\sqrt{A^2 \cos^2 \varkappa x + B^2 \sin^2 \varkappa x}\, \sin (2\pi n t - \varepsilon),$$
$$s = -\frac{1}{a}\sqrt{A^2 \sin^2 \varkappa x + B^2 \cos^2 \varkappa x}\, \cos (2\pi n t - \varepsilon),$$
wo
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \varkappa x, \qquad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{B}{A} \operatorname{tag} \varkappa x \text{ ist.}$$

3. Anwendung auf gedeckte Pfeifen.

a) Ist, wie bei den gedeckten Pfeifen, die Luftsäule durch eine zur x Axe senkrechte Ebene geschlossen, so ist für diesen Punkt $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$. Das ist aber nach den Werthen in 2. a), b), c) von v nur bei a) möglich. Es müssen also dann die Schwingungen stehende sein und an dem festen Ende muss ein Knoten sich befinden.

b) Ist die Röhre bei $x = 0$ und $x = l$ geschlossen, so müssen in den stehenden Wellen an $x = 0$ und $x = l$ sich Knoten befinden, also ist nach 2. a):

$$l = 2m\frac{\lambda}{4} = m\frac{\pi}{\varkappa} = m\frac{aT}{2} = m\frac{a}{2n} \quad (\S\ 236).$$

c) Der Querschnitt $x = 0$ sei fest und der bei $x = l$ werde von aussen in einer solchen Bewegung erhalten, dass er zur Zeit t die Geschwindigkeit $G \cos 2\pi nt$ in der Richtung der x Axe habe, wo G und n beliebig gegebene Constanten bedeuten. (Kundt's Experiment.)

Es muss dann unser in der vorigen Nummer unter a) berechneter Werth für $x = l$ dem gegebenen v gleich sein, d. i.:

$$v = -\varkappa \mathsf{A} \sin \varkappa l \cos 2\pi nt = G \cos 2\pi nt,$$

also ist

$$\mathsf{A} = -\frac{G}{\varkappa \sin \varkappa l}.$$

Dies giebt

$$\varphi = -\frac{G}{\varkappa \sin \varkappa l} \cos \varkappa x \cos 2\pi nt.$$

Die Bewegung der Lufttheilchen hängt von $\varkappa l = 2\pi\frac{l}{\lambda}$ ab.

Ist nun $l = 2m\frac{\lambda}{4}$, so ist $\varkappa l = m\pi$, also $\sin \varkappa l = 0$ und damit die Amplitude unendlich gross. D. h., wenn der erregende Körper Schwingungen macht, die dem Eigenton der Luftsäule entsprechen, so kommt die Luft in intensive Schwingungen. Dass aber nie die Bewegung der Luft ins Unbegrenzte wächst, liegt daran, dass die Röhrenwände nicht absolut fest sind, dass der bewegliche Stempel nicht vollkommen dicht schliesst und hauptsächlich an der Reibung der Luft.

Bemerkung: Die Theorie des Versuches mittels Stimmgabel und Glascylinder, um das Gesetz von § 250 nachzuweisen, findet sich in § 255, 3.

4. Erweiterung für kugelförmige Wellen.

Nach § 229, 8. ist allgemein

$$\varphi = \frac{1}{r} F_1(r - at) + \frac{1}{r} F_2(r + at)$$

und nach § 229, 7. (4*) ist zu erfüllen

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right).$$

Diesen Gleichungen genügt für einen einfachen Ton

$$\varphi = \frac{1}{r}(A' \cos \varkappa r + B' \sin \varkappa r) \cos 2\pi nt + \frac{1}{r}(A'' \cos \varkappa r + B'' \sin \varkappa r) \sin 2\pi nt.$$

Für einen speciellen Fall nimmt diese Gleichung folgende Form an

$$\varphi = M\frac{\cos \varkappa(r - at)}{r} - M_1\frac{\sin \varkappa(r - at)}{r}.$$

Diese Gleichung stimmt überein mit § 236, 2., es bedeutet dies also Kugelwellen, die von einem Erregungspunkt ausgehen und nach Aussen fortschreiten.

Ein anderer specieller Fall ist

$$\varphi = \frac{1}{r}(A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r) \cos 2\pi n (t - t_0).$$

Hierdurch werden stehende Wellen dargestellt, denn es ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - a^2 \sigma = - \frac{1}{r}(A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r)\, 2\pi n \sin 2\pi n (t - t_0),$$

also ist $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ und damit die Verdichtung, wenn $A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r = 0$ ist, immer $= 0$. Hierdurch sind die Kugeln bestimmt, auf deren Oberflächen die Dichtigkeitsänderungen fortwährend verschwinden, also Bauchkugeln.

Ferner ist

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{r}(- \varkappa A \sin \varkappa r + \varkappa B \cos \varkappa r) - \frac{1}{r^2}(A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r) \right\} \cos 2\pi n (t - t_0)$$

für jeden Werth von t gleich Null, wenn

$$A(\cos \varkappa r + \varkappa r \sin \varkappa r) + B(\sin \varkappa r - \varkappa r \cos \varkappa r) = 0 \text{ ist.}$$

An den Kugeln, deren Halbmesser hierdurch bestimmt sind, ist also die Geschwindigkeit gleich Null, es sind Knotenkugeln.

Sind die Halbmesser der die Luftmasse begrenzenden festen Kugeln R, R′ gegeben, so bestimmen dieselben den Werth $\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, also den Eigenton der betrachteten Luftmasse. Es muss nämlich dann gelten

$$A(\cos \varkappa R + \varkappa R \sin \varkappa R) + B(\sin \varkappa R - \varkappa R \cos \varkappa R) = 0,$$
$$A(\cos \varkappa R' + \varkappa R' \sin \varkappa K') + B(\sin \varkappa R' - \varkappa R' \cos \varkappa R') = 0.$$

Die Elimination von $\frac{A}{B}$ aus diesen Gleichungen giebt

$$\operatorname{tg} \varkappa (R - R') = \frac{\varkappa (R - R')}{1 - \varkappa^2 R R'}.$$

Ist aber speciell $R' = 0$, so ist

$$\operatorname{tg} \varkappa R = \varkappa R.$$

In beiden Fällen erhalten wir demnach ein bestimmtes $\varkappa$, also bestimmte Eigentöne der durch die begrenzenden Kugelflächen gegebenen Luftmasse.

Die offene Lippenpfeife. (§ 251.)

1. Auffindung des Geschwindigkeitspotentials.*)

Im Folgenden soll die Bewegung der Luft an dem offenen Ende einer cylindrischen Röhre untersucht werden, wenn im Innern derselben durch irgend eine Ursache ebene Wellen, die einem einfachen Ton von n Schwingungen in der Secunde entsprechen, zu Stande gekommen sind, und sich die Bewegung durch das offene Ende der Röhre der äusseren Luft mittheilt, welche übrigens durch keine anderen Schall erregenden Kräfte afficirt werden möge.

Für unsere Untersuchung machen wir folgende Annahmen über die Röhre. Sie sei cylindrisch von beliebigem Querschnitt und ihre Längsaxe falle mit der x Axe des einzuführenden rechtwinkligen Coordinatensystems zusammen. Am offenen Ende kann die Pfeife eine geringe Aenderung der Cylinderform haben, auch kann die Oeffnung theilweise gedeckt sein. Die Dimensionen der Oeffnung und die des nicht cylindrischen Theiles der Röhre seien gegen die Wellenlänge sehr klein. Die yz Ebene des Coordinatensystems falle mit der Oeffnung zusammen und die Röhre liege nach der negativen x Axe zu. Der Anfang sei vorläufig irgendwo in der Oeffnung. Das an der Oeffnung der Röhre gelegene Stück derselben charakterisiren wir dadurch, dass β den Winkel bezeichnet, den die nach innen gerichtete Normale auf die Röhrenwand mit der positiven x Axe bildet. Ist demnach $\beta = 90^0$, so endigt die Röhre cylinderförmig. Den äusseren Raum denken wir uns nach einer Seite begrenzt durch eine unendliche Ebene, die yz Ebene. Es muss also nach unserer Annahme, wenn sich y und z beziehen auf die Coordinaten eines Punktes der Oeffnung $\varkappa y$ und $\varkappa z$ und wenn x sich bezieht auf den Theil der Pfeife, der nicht die cylindrische Form hat, $\varkappa x$ verschwindend klein gegen 1 sein, da $\varkappa$, welches nach § 236 gleich $\frac{2\pi}{\lambda}$ ist, wegen der Grösse der Wellenlänge, und x, y, z für diesen Fall sehr klein sind.

Wir unterscheiden nun drei verschiedene Arten des Geschwindigkeitspotentials.

a) Innerhalb der Röhre befinde sich ein Abschnitt, zwischen welchem und der Oeffnung keine äusseren Kräfte auf die Luftmasse einwirken. In diesem ist dann das Geschwindigkeitspotential nach § 250, wenn t passend angefangen wird:

$$\varphi = (A' \cos \varkappa x + B' \sin \varkappa x) \cos 2\pi nt + B'' \cos \varkappa x \sin 2\pi nt. \quad \text{(A.)}$$

b) Zwischen dem Raum zweier Halbkugeln auf der positiven Seite der x mit sehr grossen Halbmessern, deren Mittelpunkte im Coordinatenanfang

---

*) Helmholtz, Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Crelle's Journal 57. 1860.

liegen, soll φ die Form für kugelige Wellen haben, die in den unendlichen Raum hinauslaufen. Also ist daselbst nach § 236, 2. oder § 250, 4.:

$$\varphi = M\,\frac{\cos(\varkappa r - 2\pi n t)}{r} - M_1\,\frac{\sin(\varkappa r - 2\pi n t)}{r}. \qquad (B.)$$

M und M_1 sind unabhängig von r, aber möglicher Weise abhängig von den Winkeln, welche r mit den Coordinatenaxen bildet.

Jenseits der äusseren jener beiden Kugeln ist ein Raum, wo die Schallbewegung erst beginnt.

c) Zwischen der Region der ebenen Wellen in der Röhre (A.) und der Region der Kugelwellen (B.) soll die Stärke und Phase der Luftschwingungen stationär geworden sein, also ist hier φ von der Form

$$\varphi = \psi' \cos 2\pi n t + \psi'' \sin 2\pi n t, \qquad (C.)$$

wo ψ' und ψ'' nach § 250 der Gleichung

$$\Delta\psi + \varkappa^2\psi = 0$$

genügen müssen.

Längs der ganzen Wand der Pfeife und an dem Theile der yzEbene, der nicht von der Röhrenöffnung eingenommen ist, muss sein $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, wo n die Richtung der Normalen bedeutet.

Für die weitere Untersuchung, die uns den Zusammenhang der Coefficienten A′, B′, B″, M, M_1 geben soll, theilen wir uns den Raum in vier Abtheilungen:

1) Innerer Raum der Röhre von der Ebene der Oeffnung bis zu einem Querschnitt, der innerhalb der ebenen Wellen liegt, also von $x = 0$ bis zu einem $-x$.

2) Freier Raum auf Seite der positiven x, der einerseits begrenzt ist durch die yzEbene und andererseits durch eine um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt construirte Kugelfläche, welche in die Region der kugeligen Wellen fällt.

3) Raum theils in der Röhre und dort begrenzt von einem Querschnitt in der Region der ebenen Wellen, theils ausserhalb und dort begrenzt von einer Halbkugel der obigen Art in der Region der Kugelwellen.

2. Untersuchung des Geschwindigkeitspotentials für Punkte in der Röhre.

In diesem Raume gehören die Geschwindigkeitspotentiale einestheils zu (A.) und anderentheils zu (C.).

Wir gebrauchen zu dieser Untersuchung einen Satz, der zuerst von Green*) aufgestellt worden ist und folgendermassen lautet: Sind U und V zwei beliebige endliche und stetige Functionen von x, y, z innerhalb eines

*) Crelle's Journal 39, 44, 47.

bestimmten Volumens S, so ist, wenn $d\omega$ ein Flächenelement der Grenze dieses Volumens und n die Richtung der Normale auf die Grenzfläche ist,

$$\iiint U \Delta V \, dx\, dy\, dz = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega - \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Nach derselben Formel ist

$$\iiint V \Delta U \, dx\, dy\, dz = \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega - \iiint \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Aus den beiden obigen Formeln ergiebt sich:

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \iiint U \Delta V \, dx\, dy\, dz = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega + \iiint V \Delta U \, dx\, dy\, dz.$$

Wenn wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung addiren

$$\iiint \varkappa^2 U V \, dx\, dy\, dz,$$

so geht sie über in

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \iiint U (\Delta V + \varkappa^2 V)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega + \iiint V (\Delta U + \varkappa^2 U)\, dx\, dy\, dz.$$

Diese Gleichung muss also auch gelten, wenn U und V Geschwindigkeitspotentiale sind.

Da in unserem Raum der Annahme nach keine Erregungspunkte liegen, so muss also gelten nach § 229, 8., weil die dort mit q bezeichneten Grössen verschwinden,

$$\Delta V + \varkappa^2 V = 0, \qquad \Delta U + \varkappa^2 U = 0.$$

Der Satz von Green lautet also auf die Geschwindigkeitspotentiale in unserem Raume angewendet

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega. \qquad \text{(I.)}$$

a) Setzen wir $V = \cos \varkappa x$, also für V eine Function, die der Bedingungsgleichung $\Delta V + \varkappa^2 V = 0$ genügt, und für U die Werthe aus 1. unter (A.) und (C.). $\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ist nun nur an der Oeffnung der Röhre und im inneren Querschnitt derselben von 0 verschieden.

An der Oeffnung haben wir nach (C.):

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} = -\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial x} \cos 2\pi n t + \frac{\partial \overline{\psi''}}{\partial x} \sin 2\pi n t \right).$$

Das negative Zeichen steht, da die Normale (x) nach der inneren Seite geht.

Der horizontale Strich über dem Functionszeichen soll bedeuten, dass der Werth gemeint ist, welchen die Function an der Oeffnung hat.

An dem inneren Querschnitt ist nach (A.):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (-\varkappa A' \sin \varkappa x + \varkappa B' \cos \varkappa x) \cos 2\pi n t - \varkappa B'' \sin \varkappa x \sin 2\pi n t,$$

V ist an der Oeffnung, da dort $x = 0$ ist, gleich 1.

Daraus ergiebt sich also, wenn die möglichen Integrationen ausgeführt

werden und der Querschnitt der Röhre mit Q bezeichnet wird, als die rechte Seite der Green'schen Gleichung (I.):

$$\int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega = \int \cos \varkappa x \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega,$$

$$= -\cos 2\pi nt \int \frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial x} d\omega - \sin 2\pi nt \int \frac{\partial \overline{\psi''}}{\partial x} d\omega.$$

$$+ Q(-\varkappa A' \sin \varkappa x + \varkappa B' \cos \varkappa x) \cos \varkappa x \cos 2\pi nt$$

$$- Q\varkappa B'' \sin \varkappa x \cos \varkappa x \sin (2\pi nt).$$

Zur Bestimmung der linken Seite haben wir $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial \cos \varkappa x}{\partial n}$ am cylindrischen Theile gleich Null, denn die Richtung von n fällt da mit der von y und z zusammen und V ist von y und z unabhängig.

Am inneren Querschnitt der Röhre, wo die Richtung von n mit der von x zusammenfällt, ist $\frac{\partial V}{\partial n} = -\varkappa \sin \varkappa x$.

An dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand, der nach 1. durch β charakterisirt ist, hat man, da $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ ist,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \cos \beta \frac{\partial V}{\partial x} = -\varkappa \sin \varkappa x \cos \beta.$$

Es ist also

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = -Q(\varkappa A' \cos \varkappa x + \varkappa B' \sin \varkappa x) \sin \varkappa x \cos (2\pi nt)$$

$$- Q\varkappa B'' \cos \varkappa x \sin \varkappa x \sin 2\pi nt - \varkappa \cos 2\pi nt \int \psi' \sin \varkappa x \cos \beta \, d\omega$$

$$- \varkappa \sin 2\pi nt \int \psi'' \sin \varkappa x \cos \beta \, d\omega.$$

Wenn wir nun diese beiden Werthe in (I.) einführen und, da dann diese Gleichung für alle t gelten muss, die Coefficienten von $\cos 2\pi nt$ und $\sin 2\pi nt$ einzeln einander gleichsetzen, so erhalten wir

$$Q\varkappa B' = \int \frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial x} d\omega - \varkappa \int \psi' \sin \varkappa x \cos \beta \, d\omega, \qquad (1.)$$

$$0 = \int \frac{\partial \overline{\psi''}}{\partial x} d\omega - \varkappa \int \psi'' \sin \varkappa x \cos \beta \, d\omega. \qquad (2.)$$

b) Setzen wir für denselben Raum $V = \sin \varkappa x$ und betrachten in den verschiedenen Werthen von φ nur den Coefficienten von $\cos 2\pi nt$, der auch der Gleichung $\Delta\psi + \varkappa^2\psi = 0$ genügt, so erhalten wir Folgendes:

An der Röhrenwand ist $\frac{\partial \psi'}{\partial n} = 0;$

an der Oeffnung ist $V = 0;$

am Querschnitt der Röhre ist

$$\psi' = A' \cos \varkappa x + B' \sin \varkappa x,$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = -\varkappa A' \sin \varkappa x + \varkappa B' \cos \varkappa x,$$

$$V = \sin \varkappa x, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \varkappa \cos \varkappa x,$$

also ist daselbst

$$\psi' \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial \psi'}{\partial x} = \varkappa A'.$$

Demnach ist, da also nur der Querschnitt zu berücksichtigen ist,

$$\int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega = \int \sin \varkappa x \frac{\partial \psi'}{\partial x} d\omega = \int \psi' \frac{\partial V}{\partial x} d\omega - \varkappa A'Q.$$

Ferner ist an der Wand der Röhre

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \varkappa \cos \varkappa x \cos \beta$$

und an der Oeffnung

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\varkappa,$$

also ist, wenn noch der Werth von $\frac{\partial V}{\partial x}$ am Querschnitt dazugenommen wird,

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = \int \psi' \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = \varkappa \int \psi' \cos \varkappa x \cos \beta \, d\omega - \varkappa \int \overline{\psi'} d\omega$$
$$+ \int \psi' \frac{\partial V}{\partial x} d\omega.$$

Führt man nun diese Werthe in die Gleichung des Green'schen Satzes (I.) ein, so erhält man nach Division mit $\varkappa$ und bei Berücksichtigung, dass die beiden Integrale $\int \psi' \frac{\partial V}{\partial x} d\omega$, die über den inneren Querschnitt auszudehnen sind, wegfallen:

$$-A'Q = \int \psi' \cos \varkappa x \cos \beta \, d\omega - \int \overline{\psi'} d\omega. \qquad (3.)$$

Das erste Integral ist auszudehnen soweit als β von 90^0 verschieden ist, also über das nicht cylinderförmige Ende der Röhre, während das zweite sich über die Oeffnung erstreckt.

3. Untersuchung der Geschwindigkeitspotentiale für den Raum 2).

Wir gehen wieder aus von der allgemeinen Green'schen Gleichung aus 2.:

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega + \iiint U (\Delta V + \varkappa^2 V) \, dx\, dy\, dz =$$
$$\int V \frac{\partial U}{\partial x} d\omega + \iiint V (\Delta U + \varkappa^2 U) \, dx\, dy\, dz.$$

Nehmen wir nun an, um ganz allgemeine Gleichungen für spätere Untersuchungen § 255 zu erhalten, dass in diesem Raume Erregungspunkte sind, dass also nach § 229, 7. die X, Y, Z oder $\frac{\partial P}{\partial t}$ nicht verschwinden, oder dass nach § 229, 9. für diese Punkte $0 = 4\pi q + \varkappa^2 \psi + \Delta \psi$ ist, oder dass nach § 236, 2. es erregende Punkte mit den Coordinaten α, β, γ giebt.

Unsere obige Gleichung können wir dann setzen

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega - 4\pi \iiint U q \, dx\,dy\,dz = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega + \iiint V (\Delta U + \varkappa^2 U)\, dx\,dy\,dz. \qquad \text{(II.)}$$

Es hat nun Green bewiesen, dass diese Gleichung auch noch richtig ist, wenn in einem unendlich kleinen Raumelement $dx\,dy\,dz$ des Raumes S die Grösse q einen so grossen constanten Werth annimmt, dass $q\,dx\,dy\,dz$ einer endlichen Grösse A gleich wird, obgleich V an dieser Stelle nicht stetig bleibt, sondern unstetig wird wie $\frac{A}{r}$.

Nehmen wir nun an, V sei das Geschwindigkeitspotential in dem unendlich kleinen Raumelemente $dx\,dy\,dz$, dessen Coordinaten α, β, γ seien, wo q nicht gleich Null ist, während sonst q überall verschwindet, so dass also V in endlicher Entfernung vom Punkt α, β, γ den Werth habe $V = A \frac{\cos \varkappa r}{r}$.

Dass V diesen Werth annehmen kann, findet man durch Ausführung der Differentiationen und Einsetzung in die das Geschwindigkeitspotential charakterisirende Differentialgleichung § 229, 7., 8. Es reducirt sich darnach das dreifache Integral auf der linken Seite unserer Ausgangsgleichung, wenn wir den Werth, welchen U im Punkte α, β, γ hat, mit U_α bezeichnen, auf:

$$U_\alpha \int q \, dx\,dy\,dz = A U_\alpha.$$

Damit ist unsere Gleichung des Green'schen Satzes, wenn wir noch setzen $\Delta U + \varkappa^2 U = 0$, also U ein Geschwindigkeitspotential für den Raum ohne Erregungspunkte sein lassen:

$$4\pi U_\alpha = \int U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos \varkappa r}{r}\right) d\omega - \int \frac{\partial U}{\partial n} \frac{\cos \varkappa r}{r} d\omega.$$

Diese Gleichung können wir nun für unseren Raum behalten.

Wenn wir aber einen Erregungspunkt mit den Coordinaten α, β, γ einführen, können wir statt der Grenzebene yz nach § 231 zu je einen Erregungspunkt noch einen in Bezug auf diese Ebene symmetrisch gelegenen hinzunehmen. Nennen wir r_1 die Entfernung eines Punktes x, y, z von α, β, γ und r_2 die von dem hinzugedachten Punkte $-\alpha, \beta, \gamma$, so können wir setzen

$$V = \frac{1}{2} \frac{\cos(\varkappa r_1 - 2\pi n t)}{r_1} + \frac{1}{2} \frac{\cos(\varkappa r_2 - 2\pi n t)}{r_2}.$$

Es ist demnach die oben mit A bezeichnete Grösse der Factor von $\frac{\cos \varkappa r_1}{r_1} + \frac{\cos \varkappa r_2}{r_2}$, also $\frac{1}{2} \cos 2\pi n t$.

$\frac{\partial V}{\partial n}$ ist überall an der yz Ebene $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$.

$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ist überall an der yz Ebene gleich Null, ausser an der Oeffnung, wo es nach der eingeführten Bezeichnung $\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n}$ wird.

V ist an der yz Ebene $\overline{V} = \frac{\cos(\varkappa r_1 - 2\pi nt)}{r_1}$, da dann $r_1 = r_2$ ist.

Es ist mithin, wenn statt U_α nun φ_α gesetzt ist, wo also φ_α den Werth von φ im Punkte α, β, γ bezeichnet,

$$2\pi \cos(2\pi nt)\,\varphi_\alpha = -\int \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} \cdot \frac{\cos(\varkappa r_1 - 2\pi nt)}{r_1} d\omega$$
$$+\left\{\int \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{2}\frac{\cos(\varkappa r_1 - 2\pi nt)}{r_1} + \frac{1}{2}\frac{\cos(\varkappa r_2 - 2\pi nt)}{r_2}\right] d\omega\right.$$
$$\left.-\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\left[\frac{1}{2}\frac{\cos(\varkappa r_1 - 2\pi nt)}{r_1} + \frac{1}{2}\frac{\cos(\varkappa r_2 - 2\pi nt)}{r_2} d\omega\right]\right\},$$

wo die erste Integration über die Mündung und die in {} über die Halbkugeloberfläche auszudehnen ist.

Dafür setzen wir abgekürzt

$$2\pi \cos(2\pi nt)\,\varphi_\alpha = -\int \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} \frac{\cos(\varkappa r_1 - 2\pi nt)}{r_1} d\omega + \mathfrak{C}. \quad \odot$$

Die Grösse $\mathfrak{C}$ ist von der Zeit unabhängig; denn für die weit entfernten Punkte der Kugelfläche lässt sich unser φ nach § 236, 2 schreiben

$$\varphi = \frac{\cos(\varkappa \varrho - 2\pi nt + \delta)}{\varrho}.$$

Berechnet man dann, wenn nur Grössen der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$ (wo nun ϱ den Halbmesser der Kugel bedeutet) beibehalten werden,

$$\varphi \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \varrho}{\partial n},$$

so findet man einen von der Zeit unabhängigen Werth, also ist auch das Integral $\mathfrak{C}$ davon unabhängig.

Bedenken wir endlich, dass an der Oeffnung nach (C)

$$\varphi = \psi' \cos 2\pi nt + \psi'' \sin 2\pi nt,$$

ist, so finden wir

$$\varphi_\alpha = \psi'_\alpha \cos 2\pi nt + \psi''_\alpha \sin 2\pi nt$$

und

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} = \cos 2\pi nt \frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial x} + \sin 2\pi nt \frac{\partial \overline{\psi''}}{\partial x}.$$

Nachdem wir diese Werthe in $\odot$ eingeführt und dann die erhaltene Gleichung nach cos. $4\pi nt$ und $\sin 4\pi nt$ geordnet haben, setzen wir, da sie für alle Werthe von t gelten muss, einander gleich 1) die von der Zeit unabhängigen Grössen, 2) die Coefficienten von $\cos 4\pi nt$, 3) die Coefficienten von $\sin 4\pi nt$.

Diese Rechnung giebt:

$$\mathfrak{C} = \pi\psi'_\alpha + \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial x}\frac{\cos \varkappa r_1}{r_1} + \frac{\partial \overline{\psi''}}{\partial x}\frac{\sin \varkappa r_1}{r_1}\right) d\omega,$$
$$0 = \pi\psi'_\alpha + \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \overline{\psi'}}{\partial x}\frac{\cos \pi r_1}{r_1} - \frac{\partial \overline{\psi''}}{\partial x}\frac{\sin \varkappa r_1}{r_1}\right) d\omega,$$
$$0 = \pi\psi''_\alpha + \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\sin \varkappa r_1}{r_1} + \frac{\partial \overline{\psi''}}{\partial x}\frac{\cos \varkappa r_1}{r_1}\right) d\omega.$$

Die beiden letzten dieser Gleichungen geben dann

$$\varphi_\alpha = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial \overline{\psi}'}{\partial x} \frac{\cos(\varkappa r_1 - 2\pi nt)}{r_1} d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial \overline{\psi}''}{\partial x} \frac{\sin(\varkappa r_1 - 2\pi nt)}{r_1} d\omega,$$

also den Werth unseres Geschwindigkeitspotentials für alle Punkte des Raumes auf der positiven Seite von x.

Wenn wir damit eine Umformung vornehmen, wie § 236, 2., indem wir setzen

$$\alpha = \varrho \cos\omega,\ \beta = \varrho \sin\omega\cos\vartheta,\ \gamma = \varrho\sin\omega\sin\vartheta,$$

so erhalten wir die Form (B.) von φ für einen weit vom Coordinatenanfang entfernten Punkt, wenn wir setzen:

$$M = -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{\partial\overline{\psi}'}{\partial x}\cos\varkappa\varepsilon + \frac{\partial\overline{\psi}''}{\partial x}\sin\varkappa\varepsilon\right)dy\,dz, \qquad (4.)$$

$$M_1 = -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{\partial\overline{\psi}''}{\partial x}\cos\varkappa\varepsilon - \frac{\partial\overline{\psi}'}{\partial x}\sin\varkappa\varepsilon\right)dy\,dz, \qquad (5.)$$

wo die Integration über die Oeffnung der Röhre auszudehnen ist und gesetzt ist

$$\varepsilon = y\sin\omega\cos\vartheta + z\sin\omega\sin\vartheta.$$

4. Untersuchung des Geschwindigkeitspotentials für den Raum 3).

Für diesen Raum gilt (C.) d. i.

$$\varphi = \psi'\cos 2\pi nt + \psi''\sin 2\pi nt.$$

Hier können wir sofort den Green'schen Satz in der Form (I) anwenden, nämlich

$$\int U\frac{\partial V}{\partial n}d\omega = \int V\frac{\partial U}{\partial n}d\omega,$$

wenn wir setzen $U = \psi'$ und $V = \psi''$.

Wir haben also zu untersuchen die Gleichung

$$\int \psi'\frac{\partial\psi''}{\partial n}d\omega - \int\psi''\frac{\partial\psi'}{\partial n}d\omega = 0.$$

Längs der ganzen festen Wand der Röhre ist

$$\frac{\partial\psi'}{\partial n} = \frac{\partial\psi''}{\partial n} = 0,$$

es ist also die Integration nur über den Querschnitt in der Röhre und über die Halbkugel auszudehnen.

Im Querschnitt ist

$$\psi' = A'\cos\varkappa x + B'\sin\varkappa x \quad , \quad \psi'' = B''\cos\varkappa x,$$

also

$$\psi'\frac{\partial\psi''}{\partial x} - \psi''\frac{\partial\psi'}{\partial x} = -\varkappa B' B''.$$

An der Kugelfläche ist, wenn ϱ den Kugelhalbmesser bezeichnet,

$$\psi' = M \frac{\cos \varkappa\varrho}{\varrho} + M_1 \frac{\sin \varkappa\varrho}{\varrho},$$

$$\psi'' = M \frac{\sin \varkappa\varrho}{\varrho} - M_1 \frac{\cos \varkappa\varrho}{\varrho},$$

also

$$-\psi' \frac{\partial \psi''}{\partial \varrho} + \psi'' \frac{\partial \psi'}{\partial \varrho} = -\frac{\varkappa (M^2 + M_1^2)}{\varrho^2}.$$

Durch Ausführung der Integration erhält man

$$0 = \varkappa B' B'' Q + \varkappa \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \, (M^2 + M_1^2) \sin \omega. \qquad (6.)$$

5. Zusammenstellung und Vereinfachung der erhaltenen Resultate.

Die Ausgangsgleichungen für diese Nummer sind

$$\varkappa B' Q = \int \frac{\partial \overline{\psi}'}{\partial x} d\omega - \varkappa \int \psi' \sin \varkappa x \cos \beta \, d\omega, \qquad (1.)$$

$$0 = \int \frac{\partial \overline{\psi}''}{\partial x} d\omega - \varkappa \int \psi'' \sin \varkappa x \cos \beta \, d\omega, \qquad (2.)$$

$$A' Q + \int \psi' \cos \varkappa x \cos \beta \, d\omega - \int \overline{\psi}' \, d\omega = 0, \qquad (3.)$$

$$M = -\frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial \overline{\psi}'}{\partial x} \cos \varkappa\varepsilon + \frac{\partial \overline{\psi}''}{\partial x} \sin \varkappa\varepsilon \right) d\omega = 0, \qquad (4.)$$

$$M_1 = -\frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial \overline{\psi}''}{\partial x} \cos \varkappa\varepsilon - \frac{\partial \overline{\psi}'}{\partial x} \sin \varkappa\varepsilon \right) d\omega = 0, \qquad (5.)$$

$$0 = \varkappa B' B'' Q + \varkappa \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \, (M^2 + M_1^2) \sin \omega. \qquad (6.)$$

Durch diese Gleichungen sind die Werthe der Coefficienten A', B', B'', M, M_1 und der Funktionen ψ' und ψ'' im freien Raum zurückgeführt auf Integrale, in denen nur die Werthe vorkommen, welche ψ', ψ'' und deren Differentialquotienten theils in der Mündung der Röhre selbst, theils an dem nicht cylindrischen Theile ihrer Wand haben.

Diese Gleichungen lassen sich nun weiter vereinfachen, denn unserer Annahme nach sind die Dimensionen der Mündung und die Länge des nicht cylindrischen Theils der Röhre gegen die Wellenlänge sehr klein, wir können demnach (cf. 1.), da $\varkappa\varepsilon$ gegen 1 sehr klein ist, Grössen von der Ordnung $\varkappa\varepsilon$ gegen 1 vernachlässigen und erhalten somit, wenn wir setzen $\varkappa B' = B$

aus (1.): $BQ = \int \frac{\partial \overline{\psi}'}{\partial x} d\omega.$ (1.*)

„ (2.): $0 = \int \frac{\partial \psi''}{\partial x} d\omega - \varkappa^2 \int \psi'' x \cos\beta \, d\omega.$ (2.*)

„ (4.): $M = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \psi'}{\partial x} d\omega = -\frac{1}{2\pi} BQ.$ (4.*)

Aus (5) wird zunächst

$$M_1 = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \psi''}{\partial x} d\omega + \frac{\varkappa}{2\pi} \int \frac{\partial \psi'}{\partial x} \varepsilon \, d\omega.$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks ist nach (2*) eine verschwindend kleine Grösse. Den zweiten können wir verschwinden machen durch passende Wahl der Lage des noch ganz unbestimmt gelassenen Coordinatenanfangs in der Oeffnung. Wir erhalten demnach M_1 gegen M als verschwindend klein.

Dadurch folgt, da nach (4*) M unabhängig von den Winkeln ω und ϑ ist,

$$BB''Q = -2\pi\varkappa M^2. \qquad (6^*)$$

Nach (4*) wird dann aus (6*)

$$B'' = \varkappa M = -\frac{\varkappa}{2\pi} BQ.$$

Aus (3) wird

$$A'Q = \int \overline{\psi}' d\omega - \int \psi' \cos\beta \, d\omega. \qquad (3^*)$$

Da nun aus der Gleichung in 3. für φ_α mit Vernachlässigung kleiner Grössen sich ergiebt

$$\overline{\psi}' = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \overline{\psi}'}{\partial x} \frac{d\omega}{r},$$

so sind nach (4*) M, BQ, $\varepsilon\overline{\psi}'$ Grössen von derselben Ordnung.

Statt (3*) können wir schreiben

$$A'Q = \pm \iint \psi' \, dy \, dz,$$

wo die Integration über alle y und z auszudehnen ist, welche der Oeffnung und der Wand der Röhre angehören. (+ steht, wenn $\cos\beta > 0$ ist und an der Oeffnung, — steht, wenn $\cos\beta < 0$ ist).

Daraus folgt, dass A' von der Grössenordnung ψ' oder $\frac{BQ}{\varepsilon}$ ist.

Es ist also endlich

1) Innerhalb der tieferen Theile der Röhre, wenn $\frac{\varkappa A}{B} = -\operatorname{tg} \varkappa\alpha$ gesetzt wird,

$$\varphi = \frac{B'}{\cos\varkappa\alpha} \sin\varkappa(x-\alpha)\cos 2\pi nt - \frac{B'\varkappa^2 Q}{2\pi}\cos\varkappa x \sin 2\pi nt. \qquad (III.)$$

2) An entfernteren Stellen des Raumes

$$\varphi = -\frac{B'Q\varkappa}{2\pi} \frac{\cos(\varkappa\varrho - 2\pi nt)}{\varrho}. \qquad (IV.)$$

6. Discussion der erhaltenen Werthe.

Nach der Formel (III) ist die Geschwindigkeit eines Theiles in der Röhre

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{B'\varkappa}{\cos\varkappa\alpha}\cos\varkappa(x-\alpha)\cos 2\pi nt + \frac{B'\varkappa^3 Q}{2\pi}\sin\varkappa x\sin 2\pi nt.$$

Setzen wir dies in Uebereinstimmung mit unseren im Früheren eingeführten Bezeichnungen

$$v = I\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\delta\right),$$

so ist

$$I^2 = B'^2\varkappa^2\left(\frac{\cos^2\varkappa(x-\alpha)}{\cos^2\varkappa\alpha} + \frac{\varkappa^4 Q^2}{4\pi^2}\sin^2\varkappa x\right),$$

$$\operatorname{tg} 2\pi\delta = \frac{\varkappa^2 Q\sin\varkappa x\cos\varkappa\alpha}{2\pi\cos\varkappa(x-\alpha)}.$$

Da nun

$$\frac{dI^2}{dx} = B'^2\varkappa^3\left(\frac{\varkappa^4 Q^2}{4\pi^2}\sin 2\varkappa x - \frac{\sin 2\varkappa(x-\alpha)}{\cos^2\varkappa\alpha}\right)$$

ist, so finden sich Maxima und Minima von I^2 an allen den Stellen, für die ist

$$\frac{\varkappa^4 Q^2}{4\pi^2}\sin 2\varkappa x - \frac{\sin 2\varkappa(x-\alpha)}{\cos^2\varkappa\alpha} = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} 2\varkappa x = \frac{\sin 2\varkappa\alpha}{\cos 2\varkappa\alpha - \frac{\varkappa^4 Q^2}{4\pi^2}\cos^2\varkappa\alpha}.$$

Bezeichnet x_0 einen Werth von x, der dieser Gleichung genügt, so genügen auch die Werthe

$$x_0 + m\frac{\pi}{2\varkappa} = x_0 + m\frac{\lambda}{4},$$

d. h. die Maxima und Minima der Schwingungen liegen in der Röhre um Viertelwellenlängen von einander entfernt.

Wichtig ist, dass an $x = 0$, d. h. an der Oeffnung der Röhre, weder ein Maximum noch ein Minimum der Schwingung liegt, dass also die Bäuche und Knoten nicht um ein genaues Vielfaches einer Viertelwellenlänge von der Oeffnung der Röhre entfernt sind und dass an der Oeffnung sich nicht ein Bauch befindet.

Nehmen wir

$$\varkappa^2 Q = \frac{4\pi Q}{\lambda^2}$$

als eine verschwindend kleine Grösse, so vereinfacht sich die Gleichung, welche die Maxima und Minima giebt, in

$$\operatorname{tg} 2\varkappa x = \operatorname{tg} 2\varkappa\alpha \quad \text{oder} \quad x = \alpha + \frac{m}{2\varkappa}\pi = \alpha + m\frac{\lambda}{4}.$$

Da nun bei dieser Annahme ist

$$I^2 = B'^2 \varkappa^2 \left(\frac{\cos \varkappa (x - \alpha)}{\cos \varkappa \alpha}\right)^2,$$

so erhalten wir die Maxima von I^2, wenn wir setzen

$$x = \alpha + 2\, m' \frac{\pi}{2\varkappa}, \quad \text{also ist Max. } I^2 = \frac{B'^2 \varkappa^2}{\cos^2 \varkappa \alpha}.$$

Die Minima finden wir, wenn wir setzen

$$x = \alpha + (2\, m' + 1) \frac{\pi}{2\varkappa},$$

dann ist Min. $I^2 = 0$ oder genauer $\frac{B'^2 \varkappa^6 Q^2}{4\pi^2} \cos^2 \varkappa \alpha$.

Wir dürfen also nur annehmen, dass an den Knotenpunkten vollständige Ruhe ist, wenn die oben angegebene Grösse vernachlässigt werden kann.

Die obigen Formeln geben ferner den genauen Ort des nach der gewöhnlichen Annahme an das Ende versetzten Schwingungsbauches, wenn wir annehmen, dass die ebenen Wellen der Röhre sich auch über die Oeffnung hinaus fortsetzen. Der Bauch liegt nämlich dann um α von der Oeffnung der Röhre entfernt.

Diesen Werth finden wir aus der Definitionsgleichung des Werthes α, welche ist nach 5.:

$$\frac{\varkappa A}{B} = -\operatorname{tg} \varkappa \alpha.$$

Für kleine Werthe $\varkappa$ ist also

$$\alpha = -\frac{A}{B}.$$

Von dieser Grösse findet nun Helmholtz (a. a. O. S. 39), indem er die gewonnenen Resultate mit denen der Electricitätslehre vergleicht, dass sie um so grösser werden muss, je enger die Mündung der Röhre gemacht wird, und dass sie, wenn die Oeffnung sehr klein und kreisförmig ist, gesetzt werden kann $\frac{Q}{2R}$, wo R den Radius der Oeffnung bedeutet.

Denken wir uns nun dieses Stück α zur Pfeife hinzu und nennen dann diese so gefundene Grösse mit Helmholtz die reducirte Länge, so folgt aus dem Obigen, dass alle in § 251 des Lehrbuchs aufgestellten Sätze gelten, wenn wir statt der Länge der Pfeife setzen die reducirte Länge derselben.

Die Dichtigkeitsänderungen in der Pfeife erhalten wir mit Hülfe der Formel § 229, 7. (2.).

Wir finden

$$\sigma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{B'\varkappa}{a \cos \varkappa \alpha} \sin \varkappa (x - \alpha) \sin 2\pi n t + \frac{B'\varkappa^3 Q}{2\pi a} \cos \varkappa x \cos 2\pi n t,$$

$$= L \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \delta'\right),$$

wenn

$$\operatorname{tg} 2\pi\delta' = -\frac{\varkappa^2 Q \cos \varkappa x \cos \varkappa\alpha}{2\pi \sin \varkappa (x-\alpha)},$$

$$L^2 = \frac{B'^2\varkappa^2}{a^2}\left(\frac{\sin^2\varkappa (x-\alpha)}{\cos^2\varkappa\alpha} + \frac{\varkappa^4 Q^2}{4\pi^2}\cos^2\varkappa x\right).$$

Die Untersuchung über die Maxima und Minima von L^2 giebt dieselben Gleichungen wie oben, nur erhalten wir da, wo oben Max. I^2 ist, ein Min. L^2 und umgekehrt.

Setzen wir $x = 0$, so finden wir

$$\sigma = -\frac{B'\varkappa}{a \cos \varkappa\alpha} \sin \varkappa\alpha \sin 2\pi nt + \frac{B'\varkappa^3 Q}{2\pi a} \cos 2\pi nt,$$

also ist diese Grösse von der Zeit abhängig und nicht immer gleich Null, wie die gewöhnliche Annahme ist.

Die Untersuchung der Geschwindigkeitsmaxima ist abhängig von der Gleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$ oder, da sein muss

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \varkappa^2\varphi = 0, \text{ von } \varphi = 0.$$

Die Zungenpfeife. (§ 252.)

1. Gleichungen für eine offene Röhre, deren eines Ende in Schwingungen versetzt wird.*)

Wir behalten die Bezeichnungen aus § 251 bei, denken uns aber die Röhre nur bis $x = -l$ reichend und dieses Ende im Bereiche der ebenen Wellen. Diesem Ende werde eine Bewegung mitgetheilt, so dass die Geschwindigkeit der dort sich befindenden Lufttheilchen gegeben ist durch $G \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta'\right)$, wo über die willkürlich hinzugefügte Constante δ' beliebig so verfügt werden kann, dass der Anfang der Zeit passend gewählt wird.

Wir setzen ferner die Geschwindigkeit der Lufttheilchen in der Röhre nach § 251, 6.:

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = I \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta\right).$$

An dem Ende $x = -l$ müssen nun diese Werthe einander gleich sein, also ist dort

$$G \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta'\right) = I \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \delta\right).$$

---

*) Helmholtz a. a. O. S. 45.

Diese Gleichung ist für jedes t erfüllt, wenn ist

$$G^2 = I^2 = B'^2 x^2 \left(\frac{\cos^2 x (l+\alpha)}{\cos^2 x\alpha} + \frac{x^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 xl\right),$$

$$\text{tang}\, 2\pi\delta = \text{tang}\, 2\pi\delta' = \frac{x^2 Q \sin xl \cos x\alpha}{2\pi \cos x (l+\alpha)}.$$

Das Geschwindigkeitspotential in dem Raume ausser der Röhre ist nach § 251, 1. und 5.:

$$\varphi = M \frac{\cos (x\varrho - 2\pi nt)}{\varrho}, \qquad M = -\frac{1}{2\pi} BQ = -\frac{1}{2\pi} xB'Q.$$

Aus diesen Gleichungen können nun B′ und M durch die gegebenen Grössen G, einer bestimmten Grösse der erregenden Schwingungen, und l ausgedrückt werden, wodurch, da diese die Factoren der Geschwindigkeitspotentiale sind, die Intensität der Schwingungen in der Röhre und der äusseren Kugelwelle gegeben ist.

Die Ausführung dieser Rechnung giebt

$$B' = \frac{2\pi G \cos x\alpha}{x\sqrt{4\pi^2 \cos^2 x (l+\alpha) + x^4 Q^2 \cos^2 x\alpha \sin^2 xl}},$$

$$M = -\frac{GQ \cos x\alpha}{\sqrt{4\pi^2 \cos^2 x (l+\alpha) + x^4 Q^2 \cos^2 x\alpha \sin^2 xl}}.$$

Die Schwingungen werden also die grösste Intensität haben, wenn der Nenner in beiden Ausdrücken ein Minimum ist, also wenn l so gross ist, dass gilt

$$\cos^2 x (l+\alpha) = 0 \quad \text{oder} \quad x(l+\alpha) = (2m+1)\frac{\pi}{2}.$$

Es ist mithin

$$\text{Max. } B' = \frac{2\pi G}{x^2 Q \cos x\alpha} = \frac{\lambda^2 G}{4\pi^2 Q \cos x\alpha},$$

$$\text{Max. } M = -\frac{G}{x^2 \cos x\alpha} = -\frac{\lambda^2 G}{4\pi^2 \cos x\alpha}.$$

Der absolute Werth von l, bei dem diese Maxima erreicht sind, ist also

$$l = \alpha + (2m+1)\frac{\pi}{2x}.$$

Vergleichen wir nun diesen Werth mit § 251, 6., so finden wir, dass in der Röhre die stärkste Schwingung ist und im freien Raum der stärkste Schall stattfindet, wenn die Bewegung der Luft an einer Knotenfläche mitgetheilt wird. Der Schall kann sehr stark werden, aber doch nicht unendlich gross, da $\cos x\alpha$ nicht Null werden kann. Ist $\cos x\alpha = 1$, so ist die Intensität des Schalles ganz unabhängig von der Röhre.

Ist $\cos x(l+\alpha) = 1$ oder $x(l+\alpha) = 2m\frac{\pi}{2}$, so ist mit Weglassung kleiner Grössen

$$\text{Min. } B' = \frac{1}{x} G \cos x\alpha, \qquad \text{Min. } M = -\frac{G.Q \cos x\alpha}{2\pi}.$$

Dies ist erfüllt, wenn die Röhre in der Gegend eines Schwingungsbauches in Bewegung gesetzt wird.

2. Anwendung auf Zungenpfeifen.*)

Das Tonerregende ist hier das Luftvolumen Vdt, welches in der Zeit dt in die Zungenpfeife einströmt. Dieses Volumen kann, da es periodisch ist, dargestellt werden durch folgende Reihe:

$$Vdt = C_0 + C_1 \cos(2\pi nt + t_1) + C_2 \cos(4\pi nt + t_2) + \ldots,$$

wo die verschiedenen C verschiedenen Tönen zugehören.

Wir wollen ferner annehmen, dass unsere Röhre cylinderförmig ist und einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius R hat, so dass also nach § 251, 6.:

$$\alpha = \frac{Q}{2R} = \frac{\pi R}{2} \text{ ist.}$$

Nach der vorigen Nummer haben wir, wenn wir nur einen Ton C_m berücksichtigen, das Geschwindigkeitspotential im freien Raum

$$\varphi = M_m \frac{\cos(m\varkappa\varrho + 2\pi mnt)}{\varrho}.$$

Setzen wir dann $\cos m\varkappa\alpha = 1$, was immer erlaubt ist, wenn

$$m\varkappa\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_m}\alpha = \frac{\pi^2 R}{\lambda_m}$$

klein ist, so ist

$$M_m = \frac{C_m}{\sqrt{4\pi^2 \cos^2 m\varkappa(l+\alpha) + m^4\varkappa^4 Q^2 \sin^2 \varkappa l}}.$$

Nach unserer früheren Annahme ist aber $\varkappa^2 Q$ als sehr klein vorausgesetzt, mithin dürfen wir setzen

$$M_m = \frac{C_m}{2\pi \cos m\varkappa(l+\alpha)} = \frac{C_m}{2\pi \cos m\frac{2\pi}{\lambda_m}(l+\alpha)}.$$

Das Max. M ist demnach erreicht, wenn die reducirte Länge $l+\alpha$ gleich ist einem ungeraden Vielfachen einer Viertelwellenlänge des betreffenden Tones.

Es werden demnach mit dem Grundton gleichzeitig in cylindrischen Röhren (Clarinette § 263) die ungeraden Obertöne verstärkt.

Mittönen. (§ 255.)

1. Aufstellung der Gleichungen.

Untersuchung der Schwingungen, wenn ausser den Kräften, welche die Schwingungen verursachen und beeinflussen, also ausser der Elasticität und dem Widerstande des Mediums noch eine wirkt, welche von der Be-

*) Helmholtz, Tonempfindungen, Beilage VI.

wegung unabhängig und eine Function der Zeit ist.*) Mit f(t) werde diese auf die Masseneinheit bezogene Kraft bezeichnet.

Die zu integrirende Differentialgleichung ist dann nach § 224, wenn G das Gewicht, also $\frac{G}{g}$ die Masse der Volumeneinheit des Körpers bedeutet, mit Beibehaltung der anderen eingeführten Bezeichnungen:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\varkappa s - 2\varepsilon v + \frac{g}{G} f(t).$$

Die Integration dieser Gleichung giebt, wenn zur Abkürzung gesetzt ist $a^2 = \varkappa - \varepsilon^2$:

$$s = \frac{g}{2\,Gai}\left\{e^{-(\varepsilon - ai)t}\int e^{(\varepsilon - ai)t} f(t)\,dt - e^{-(\varepsilon + ai)t}\int e^{(\varepsilon + ai)t} f(t)\,dt\right\}.$$

Wenn nun die von der Zeit abhängige Kraft von einer schwingenden Bewegung herrührt, also eine periodische Function ist, so kann sie als Reihe von folgender Form dargestellt werden:

$$f(t) = A_1 \cos(m_1 t + \tau_1) + A_2 \cos(m_2 t + \tau_2) + \dots$$
$$= \Sigma A \cos(mt + \tau).$$

Dadurch wird die angedeutete Integration ausführbar. Wir geben dem s eine Form, welche den Ausdrücken von § 224 entspricht, also

$$s = \Sigma \alpha \sin(mt + \vartheta) + e^{-\varepsilon t} \Sigma \alpha' \sin(at + \vartheta'). \qquad (1.)$$

Die darin enthaltenen Constanten mögen dadurch bestimmt werden, dass wir die Zeit t von dem Moment rechnen, wo die Kraft f(t) zuerst den Körper trifft, und dass vorher der Körper ruhend war, d. h. für $t = 0$ ist s und $\frac{ds}{dt} = 0$.

Dies giebt die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \Sigma \alpha \sin \vartheta + \Sigma \alpha' \sin \vartheta', \\ 0 &= \Sigma m\alpha \cos \vartheta - \varepsilon \Sigma \alpha' \sin \vartheta' + \Sigma \alpha' a \cos \vartheta'. \end{aligned}\right\} \qquad (2.)$$

Ausserdem erhält man durch Einsetzung des Werthes (1.) in die ursprüngliche Differentialgleichung

$$-\Sigma \alpha m^2 \sin(mt + \vartheta) + \mathcal{A} = -\varkappa \Sigma \alpha \sin(mt + \vartheta) - 2\varepsilon \Sigma \alpha m \cos(mt + \vartheta)$$
$$+ \frac{g}{G} \Sigma A \cos(mt + \tau) + B,$$

wo wir unter $\mathcal{A}$ und B alle die Grössen zusammenfassen, welche die α' und ϑ' enthalten und aus der Bedingungsgleichung als identisch verschwinden.

Der Rest der Bedingungsgleichung giebt dann, da diese Gleichung gelten muss für jeden beliebigen Werth von t, durch Nullsetzung der Coefficienten von sin mt und cos mt:

$$\alpha \cos \vartheta (m^2 - \varkappa) + 2\,\alpha \varepsilon m \sin \vartheta = \frac{Ag}{G} \sin \tau,$$

$$\alpha \cos \vartheta (2\,\alpha \varepsilon m) + \alpha \sin \vartheta (\varkappa - m^2) = \frac{Ag}{G} \cos \tau.$$

*) A. Seebeck, Repertorium der Physik von Dove, VIII. 1849.

Aus diesen Gleichungen findet man zunächst $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$, dann durch Quadriren und Addiren

$$\alpha^2 = \frac{A^2 g^2}{G^2} \cdot \frac{1}{4\,\varepsilon^2 m^2 + (m^2 - \varkappa)^2},$$

und durch Division

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{2\,\varepsilon m \sin\tau + (\varkappa - m^2)\cos\tau}{2\,\varepsilon m \cos\tau + (\varkappa - m^2)\sin\tau} \text{ oder } \operatorname{tg}(\vartheta - \tau) = \frac{\varkappa - m^2}{2\,\varepsilon m}.$$

Diese Werthe geben endlich α' und ϑ' mit Hülfe von (2.):

$$\alpha' \cos\vartheta' = -\frac{\varepsilon\alpha \sin\vartheta + \varepsilon m \cos\vartheta}{a}, \quad \alpha' \sin\vartheta' = -\alpha \sin\vartheta.$$

2. Discussion der erhaltenen Werthe.

Die beiden Theile, aus denen die rechte Seite von (1.) zusammengesetzt ist, zeigen, dass die Schwingungen bestehen erstens aus solchen, die dieselbe Periode haben wie die wirkende Kraft, und zweitens aus solchen, die dem Körper eigen sind, also veranlasst sind von der Elasticität. Letztere Schwingungen sind behaftet mit dem Factor $e^{-\varepsilon t}$, welcher angiebt, dass sie mit der Zeit verschwinden.

Die weitere Discussion des erhaltenen Werthes s hängt nun ab von einer genaueren Bestimmung der von der Zeit abhängigen Kraft. Diese Kraft denken wir uns hervorgebracht durch einen longitudinalen Wellenzug, sie wird daher jedenfalls der Verdichtung vor dem Körper proportional sein, welche wiederum der Geschwindigkeit des sich bewegendenMoleküles proportional ist. Man wird also, wenn diese Geschwindigkeit mit u bezeichnet wird, setzen können $f(t) = b u$.

Wenn nun zunächst die ankommende Schwingung eine einfache ist, so kann sie dargestellt werden durch $u = rm \cos(mt + \tau)$, wo bekanntlich (§ 224) $m = \frac{2\pi}{T}$ ist und r die Amplitude bedeutet. Dann ist

$$\alpha^2 = \frac{b^2 r^2 m^2 g^2}{G^2} \frac{1}{4\,\varepsilon^2 m^2 + (m^2 - \varkappa)^2} = \frac{b^2 r^2 g^2}{G^2} \frac{1}{4\,\varepsilon^2 + m^2 \left(1 - \frac{\varkappa}{m^2}\right)^2}.$$

Dieser Werth α, welcher die Amplitude der durch die hinzukommende Schwingung hervorgebrachte Bewegung bestimmt, ist um so grösser, je näher $\frac{\varkappa}{m^2}$ der 1 ist und erreicht ein Max., wenn $\frac{\varkappa}{m^2} = 1$ ist, d. h. die Schwingungen des mittönenden Körpers werden um so intensiver, je genauer die eigenen Schwingungen mit den anregenden übereinstimmen und ist $\varkappa = m^2$, so nimmt der mittönende Körper zuletzt ganz die Bewegung der Lufttheilchen an.

Besteht der erregende Wellenzug aus mehreren Gliedern, so kann die eben gemachte Schlussweise auf alle einzelnen Glieder ausgedehnt werden, es macht also dann der Körper nur die Bewegungen merklich mit, welche von seiner eigenen Periode nicht zu sehr verschieden sind.

3. Resonatoren.

Im Folgenden sollen die Schwingungen untersucht werden, welche in einer an dem einen Ende geschlossenen Röhre dadurch erregt werden, dass in einer grösseren Entfernung von der Oeffnung derselben ein Schall erregt wird. Die Röhre selbst sei cylinderförmig, nur an ihrem offenen Ende kann sie ein wenig von der Cylinderform abweichen durch eine geringe Erweiterung oder Verengerung.*) Bei diesen anzustellenden Untersuchungen können wir, da unsere Annahmen mit denen von § 251 übereinstimmen, von den dort gefundenen Formeln ausgehen.

Die Röhre ist geschlossen an der Stelle $x = -l$.

Wir haben also zunächst ein Geschwindigkeitspotential, indem wir von dem erregenden Punkt ausgehen, dieses setzen wir nach § 236, 2. und § 251, 3., indem wir die Constante unter der trigonometrischen Function weglassen

$$V = H\left[\frac{\cos(\varkappa r_1 - 2\pi n t)}{r_1} + \frac{\cos(\varkappa r_2 - 2\pi n t)}{r_2}\right].$$

An der yz Ebene gilt

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Unserer Annahme nach ist der Erregungspunkt weit von der Oeffnung entfernt, welche wir klein gegen die Wellenlänge setzen, so dass die Verschiedenheiten des Werthes $\overline{V}$ (der Strich bedeutet, dass das $\overline{V}$ auf die Oeffnung bezogen ist) an den verschiedenen Punkten der Oeffnung vernachlässigt werden können. Wir setzen

$$\overline{V} = G \cos 2\pi (nt + \tau''),$$

wo durch Gleichsetzung der Coefficienten der verschiedenen t enthaltenden Functionen sich ergiebt

$$G = \frac{2H}{r_1}, \qquad \operatorname{tg} 2\pi\tau'' = -\operatorname{tg} \varkappa r_1.$$

Innerhalb der Röhre ist

$$V = G \cos \varkappa x \cos 2\pi (nt + \tau'').$$

Dann ist V an der Oeffnung continuirlich und $\frac{\partial V}{\partial x}$ innen und aussen an derselben gleich Null.

---

*) Helmholtz, Crelle's Journal 57, S. 47. 1860.

Innerhalb der Röhre ist an der Wand $\frac{\partial V}{\partial n}$, wenn wir die kleine Veränderung der Cylinderform in der Nähe der Oeffnung vernachlässigen, gleich $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$.

Am geschlossenen Ende ist $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}$ aber im Allgemeinen nicht gleich Null, wir werden aber dafür eine Bedingung finden, wenn wir die Schwingungen im Innern der Röhre betrachten.

Das Geschwindigkeitspotential der ebenen Wellen im Innern, welche in den freien Raum übergehen, ist φ. Es ist dann das Geschwindigkeitspotential im ganzen Raum

$$V + \varphi.$$

Da der Boden der Röhre, $x = -l$, fest ist, so muss dort die Geschwindigkeit Null sein, es muss also für

$$x = -l, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

sein. Da nun ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\varkappa G \sin \varkappa x \cos 2\pi (nt + \tau'')$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = I \cos 2\pi (nt - \delta)$$

nach § 251, 6., wo ist

$$I^2 = B'^2 \varkappa^2 \left(\frac{\cos^2 \varkappa (x - \alpha)}{\cos^2 \varkappa \alpha} + \frac{\varkappa^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 \varkappa x \right),$$

so ist für $x = -l$

$$-\varkappa G \sin \varkappa l \cos 2\pi (nt + \tau'') = I \cos 2\pi (nt - \delta).$$

Diese Gleichung muss gelten für jedes beliebige t, folglich erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\cos 2\pi nt$ und $\sin 2\pi nt$:

$$\operatorname{tg} 2\pi\delta = -\operatorname{tg} 2\pi\tau'',$$

$$\varkappa^2 G^2 \sin^2 \varkappa l = I^2 = B'^2 \varkappa^2 \left(\frac{\cos^2 \varkappa (l + \alpha)}{\cos^2 \varkappa \alpha} + \frac{\varkappa^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 \varkappa l \right).$$

Das Minimum der Resonanz tritt demnach für ein bestimmtes G ein, wenn l so genommen wird, dass $\sin \varkappa l = 0$ oder $l = m \frac{\lambda}{2}$ ist, dann aber wird $B' = 0$ und damit $\varphi = 0$, also die Bewegung im freien Raum gerade so als ob die Röhre nicht da wäre.

Die obige Gleichung lässt sich umstellen in

$$B'^2 = \frac{4\pi^2 G^2}{4\pi^2 (\cot \varkappa l - \operatorname{tg} \varkappa\alpha)^2 + \varkappa^4 Q^2}.$$

Dies wird ein Maximum, wenn

$$\cot \varkappa l = \operatorname{tg} \varkappa\alpha \text{ oder}$$

$$\varkappa l + \varkappa\alpha = \frac{(2m + 1)}{2} \pi, \text{ d. i. } (l + \alpha) = (2m + 1) \frac{\lambda}{4} \text{ ist.}$$

Wenn demnach die reducirte Röhrenlänge ein ungerades Vielfaches des Viertels der Wellenlänge ist, so hat die Röhre den grössten Einfluss auf die Schwingungen, d. h. die Resonanz erreicht ihr Maximum.

Combinationstöne. (§ 259.)

Weil die Combinationstöne nur bemerkbar werden, wenn die primären Töne stark auftreten, also dann die Amplituden der Schwingungen nicht mehr sehr klein gesetzt werden dürfen, schliesst Helmholtz *), dass der allgemeine Satz § 228 von der Superposition der kleinen Bewegungen hier nicht mehr gelten kann, sondern dass wenigstens die Quadrate der Verschiebungen einen merklichen Einfluss auf die Grösse der Bewegungskräfte erhalten.

Betrachten wir unter dieser Voraussetzung die Bewegungen eines einzelnen beweglichen Massenpunktes mit der Masse m. Wir setzen also die Kraft, welche ihn in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, abhängig von der ersten und der zweiten Potenz der Elongation x, also nach § 224, 3. $ax + bx^2$. Ausserdem mögen noch zwei Schallwellenzüge den beweglichen Massenpunkt treffen und auf ihn einen periodisch veränderlichen Druck $f \sin pt$ und $g \sin (qt + c)$ ausüben. Es gilt dann die eine solche Schwingung repräsentirende Differentialgleichung

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = ax + bx^2 + f\sin(pt) + g\sin(qt + c).$$

Die Integration dieser Gleichung geschieht, indem man x in eine Reihe, die geordnet ist nach einer Grösse ε, entwickelt, indem man also setzt

$$x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots,$$
$$f = \varepsilon f_1,$$
$$g = \varepsilon g_1.$$

Da x, obgleich nicht unendlich klein, doch immer noch klein ist, so ist die Grösse ε so, dass, wenn die $x_1, x_2 \dots$ endlich sind, höhere als die dritte Potenz von ε jedenfalls zu vernachlässigen sind. Wird nun diese Reihe in die Differentialgleichung eingeführt, so erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von ε folgende Gleichungen:

$$ax_1 + m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -f_1\sin(pt) - g_1\sin(qt + c), \tag{a.}$$

$$ax_2 + m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -bx_1^2, \tag{b.}$$

$$ax_3 + m\frac{d^2x_3}{dt^2} = -2bx_1x_2. \tag{c.}$$

---

*) Helmholtz, Ueber Combinationstöne. Pogg. Ann. 99.

Das Integral von (a.) ist

$$x_1 = A \sin\left(t\sqrt{\frac{a}{m}} + h\right) + u \sin(pt) + v \sin(qt + c),$$

worin A und h die beiden Integrationsconstanten sind, u und v aber folgende Werthe haben:

$$u = \frac{f_1}{mp^2 - a}, \qquad v = \frac{g_1}{mq^2 - a}.$$

Wir haben demnach drei Töne, deren Schwingungszahlen sind:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{m}}, \qquad \frac{1}{2\pi}p, \qquad \frac{1}{2\pi}q.$$

Der erste dieser Töne ist der eigene Ton des schwingenden Punktes. Dieser Ton wird aber, wenn er auch im Anfang vorhanden ist, jedenfalls, wenn er nicht durch Mittönen verstärkt wird, bald verschwinden. Im Allgemeinen werden wir demnach $A = 0$ setzen können, so dass gilt

$$x_1 = u \sin(pt) + v \sin(qt + c).$$

Hier haben wir noch ungestörte Superposition der Schwingungen.

Die Integration mit Beibehaltung der Eigentöne ergiebt sich aus § 329.

Setzen wir diesen Werth von x_1 in die Gleichung (b.) ein, so erhalten wir:

$$a x_2 + m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -b\left\{u^2 \sin^2 pt + v^2 \sin^2(qt+c) + 2uv \sin pt \sin(qt+c)\right\}$$

$$= -b\left\{\tfrac{1}{2}(u^2+v^2) - \tfrac{1}{2}u^2 \cos 2pt - \tfrac{1}{2}v^2 \cos(2qt+2c) + uv\cos[(p-q)t-c] - uv\cos[(p+q)t+c]\right\}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist, wenn wie oben der eigene Ton des schwingenden Punktes wegbleibt,

$$x_2 = -\frac{b}{2a}(u^2+v^2) - \frac{bu^2}{2(4mp^2-a)}\cos 2pt - \frac{bv^2}{2(4mq^2-a)}\cos 2(qt+c)$$

$$+\frac{buv}{m(p-q)^2-a}\cos[(p-q)t-c] + \frac{buv}{m(p+q)^2-a}\cos[(p+q)t+c].$$

Hier erhalten wir also Töne, deren Schwingungszahlen sind $\frac{2p}{2\pi}$, $\frac{2q}{2\pi}$, d. h. die Nebentöne der primären Töne, ferner solche, deren Schwingungszahlen $\frac{p-q}{2\pi}$, $\frac{p+q}{2\pi}$ sind, d. h. die Differenz- und Summationstöne, also die Combinationstöne erster Ordnung.

Die Amplituden dieser letzteren Töne enthalten uv, sind also u und v sehr klein, so sind die Amplituden der Combinationstöne der ersten Ordnung klein und wachsen u und v gleichmässig, so wächst uv im quadratischen Verhältnisse. Dadurch ist bewiesen, dass bei sehr schwachen primären Tönen die Combinationstöne unhörbar sein müssen, bei starken primären Tönen die letzteren dagegen in einem stärkeren Verhältnisse wachsen müssen.

Unter der Annahme, dass der eigene Ton, wie es bei dem schlaff gespannten Trommelfell sein wird, ziemlich tief ist, haben wir

$$\sqrt{\frac{a}{m}} < p - q < p + q,$$
$$a < m(p-q)^2 < m(p+q)^2,$$

und

$$\frac{buv}{m(p-q)^2 - a} > \frac{buv}{m(p+q)^2 - a},$$

d. h. die Amplitude des Differenztones ist grösser als die des Summationstones.

Rechnen wir nun ebenso weiter unter Berücksichtigung des dritten Gliedes, also mit Gleichung (c.), so finden wir durch Integration Töne, deren Schwingungszahlen sind

$$\frac{3p}{2\pi}, \frac{3q}{2\pi}, \frac{2p+q}{2\pi}, \frac{2p-q}{2\pi}, \frac{p+2q}{2\pi}, \frac{p-2q}{2\pi}, \frac{p}{2\pi}, \frac{q}{2\pi}.$$

Unter diesen sind die Töne $\frac{p \pm 2q}{2\pi}$, $\frac{2p \pm q}{2\pi}$ Combinationstöne zweiter Ordnung, deren Amplituden aber Grössen der dritten Ordnung von u und v sind.

So können wir weiter schliessen, dass bei Berücksichtigung des n^{ten} Gliedes der Reihe die Combinationstöne der n^{ten} Ordnung kommen werden, deren Amplitude eine kleine Grösse $n+1^{ter}$ Dimension sein wird.

Die Klänge der Saiten. (§ 262.)

1. Die Saite werde gezupft.*)

Bei dieser Untersuchung gehen wir aus von den Gleichungen der vollkommen biegsamen Saiten § 245, 2.:

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} (B_n \cos \varkappa_n t + C_n \sin \varkappa_n t) \sin \frac{n\pi z}{l},$$

wo u den Ausschlag bedeutet und $\varkappa_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{gS}{Gq}}$ ist.

Es ist dann die Aufgabe dieses §, für die verschiedenen Arten der Anschlagsweise die B_n und C_n zu berechnen. Dazu ist es nöthig, nach den dort gegebenen Werthen von B_n und C_n die Functionen $u = f(z)$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = F(z)$ für die Zeit $t = 0$ zu bestimmen.

Die Saite werde gezupft in der Entfernung $z = a$ vom Anfang und zur Zeit $t = 0$ habe man den Stift fortgezogen, so dass in diesem Augenblick die Schwingungen beginnen.

*) Helmholtz, Tonempfindungen, Beilage II.

Es ist also für $t = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = F(z) = 0$, mithin $C_n = 0$, so dass also nur bleibt

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \cos \varkappa_n t \sin \frac{n\pi z}{l},$$

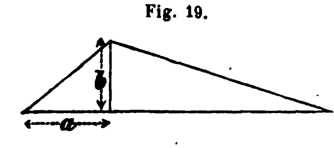


Fig. 19.

$f(z)$, welches die Form der Saite zur Zeit $t = 0$ bestimmt, wird für unseren Fall aus zwei Theilen bestehen, es ist nämlich, wenn die Saite (Fig. 19) im Punkt $z = a$ um b aus der Gleichgewichtslage gebracht ist

$$a > z > 0, \quad u = \frac{b}{a} z$$

und

$$l > z > a, \quad u = \frac{b}{l - a} l - z,$$

mithin nach S. 181

$$\frac{1}{2} B_h = \int_0^l f(z) \sin \frac{h\pi z}{l} dz,$$

$$= \int_0^a \frac{b}{a} z \sin \frac{h\pi z}{l} dz + \int_a^l \frac{b}{l-a} (l - z) \sin \frac{h\pi z}{l} dz,$$

$$= \frac{bl^3}{h^2\pi^2 a (l - a)} \sin \frac{h\pi a}{l}.$$

Dies giebt die Schwingungsgleichung

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2\,bl^2}{n^2\pi^2 a (l - a)} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi z}{l} \cos \varkappa_n t.$$

In dieser zusammengesetzten Schwingung fällt immer das Glied weg, wo $\sin \frac{n\pi a}{l} = 0$ ist, d. h. $a = \frac{l}{n}, \frac{2\,l}{n}, \frac{3\,l}{n}, \ldots$ Denkt man sich demnach die Saite in n gleiche Theile getheilt und in einem der Theilpunkte angeschlagen, so fällt ihr n^{ter} Ton weg, dessen Knotenpunkte auf die genannten Theilpunkte fallen. Dasselbe findet statt für den $2\,n^{ten}$, $3\,n^{ten}$, $4\,n^{ten}$ ... Ton, da auch ein Theil von deren Knotenpunkten mit den vorigen zusammenfällt.

2. Die Saite werde mit einem harten Stift angeschlagen.*)

Wir nehmen zum Anschlagen einen harten, schmalen Metallstift, der augenblicklich zurückspringt, so dass also der Stoss die Form der Saite nicht ändert aber eine gewisse Geschwindigkeit auf die getroffene Stelle überträgt,

*) Helmholtz a. a. O., Beilage IV.

während alle anderen Punkte der ganzen übrigen Saite noch keine Geschwindigkeit haben.

Da jetzt für $t = 0$, $s = f(z) = 0$ ist, so ist $B_n = 0$.

$\frac{\partial s}{\partial t} = F(z)$ ist zur Zeit $t = 0$ nach unserer Annahme $= 0$ für alle Punkte ausser für den Anschlagspunkt $z = a$. Es ist mithin nach der oft gebrauchten Methode

$$\varkappa_h \cdot \frac{1}{2} C_h = \int_0^l \frac{\partial s}{\partial t} \sin \frac{h\pi z}{l} dz = c \sin \frac{h\pi a}{l},$$

wo c das Produkt aus der Geschwindigkeit und der verschwindend kleinen Länge des geschlagenen Theiles der Saite bezeichnet. Man erhält also

$$s = \sum_{n=1}^{n=\infty} c \frac{2}{l\varkappa_n} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \varkappa_n t \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Da auch hier in s das Glied wegfällt, wo $\sin \frac{n\pi a}{l} = 0$ ist, so gilt dieselbe Bemerkung wie oben.

3. Ein elastischer Hammer schlage die Saite.

Der Hammer ist mit einem elastischen Polster überzogen, wie beim Clavier, so dass derselbe sehr nachgiebig ist und bedeutend zusammengepresst werden kann. Dann dürfen wir den Druck des Hammers, den er gegen die Saite während des Stosses ausübt, so gross setzen, als er sein würde, wenn der Hammer gegen einen ganz festen und vollkommen unnachgiebigen Körper schlüge. Wir nehmen demnach den Druck des Hammers $D = A \sin mt$ für $t = 0$ bis $\frac{\pi}{m}$, wo $\frac{\pi}{m}$ die Länge der Zeit ist, während welcher der Hammer an der Saite anliegt. Dabei ist m um so grösser, je grösser die elastische Kraft und je geringer das Gewicht des Hammers ist.

Um nun $f(z) = 0$, d. h. die die Form der schwingenden Saite bestimmende Gleichung, nachdem der Hammer die Saite verlassen hat und die selbe sich selbst überlassen ist, zu finden, verfahren wir folgendermassen.

Es soll zunächst die Bewegung der Saite bestimmt werden während des Zeitabschnittes, wo der Hammer anliegt, also von $t = 0$ bis $t = \frac{\pi}{m}$.

Die Saite von der Länge l werde in $z = z_0$ angeschlagen, wodurch sie in zwei Theile getheilt wird.

Die Ausschläge für $z > z_0$ seien mit s' und die für $z < z_0$ mit s_1 bezeichnet. Der Druck, den die Saite auf den schlagenden Hammer ausübt, muss abhängig sein von dem Winkel, den die gebogene Saite an der Anschlagstelle mit der z Axe bildet. Die Tangente dieses Winkels ist $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0$,

wo der Index 0 bedeutet, dass in $\frac{\partial s}{\partial t}$ $z = z_0$ gesetzt werden soll. Es ist dann, wenn S die Spannung der Saite bedeutet, die eine Componente $S\left(\frac{\partial s_1}{\partial z}\right)_0$, die andere $-S\left(\frac{\partial s'}{\partial z}\right)_0$, so dass wir erhalten

$$D = A \sin mt = S\left[\left(\frac{\partial s_1}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial s'}{\partial z}\right)_0\right].$$

Von der geschlagenen Stelle gehen nach beiden Seiten Wellen aus und es kann deshalb gesetzt werden, wenn mit a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellenbewegung bezeichnet wird (§ 229, 9.),

$$s_1 = \varphi(z - z_0 + at), \text{ wenn } 0 \lesseqgtr t \lesseqgtr \frac{\pi}{m} \text{ und } z_0 \gtreqless z \gtreqless z_0 - at \text{ ist,}$$

$$s' = \varphi(z_0 - z + at), \text{ wenn } 0 \lesseqgtr t \lesseqgtr \frac{\pi}{m} \text{ und } z_0 \lesseqgtr z \lesseqgtr z_0 + at \text{ ist.}$$

Diese willkürliche Function bestimmen wir folgendermassen.

Wir erhalten, wenn mit φ' der Differentialquotient von φ bezeichnet wird:

$$D = A \sin mt = 2\,S\,.\,\varphi'(at). \qquad \text{(a.)}$$

Dies nach t integrirt giebt:

$$C - \frac{A}{m}\cos mt = \frac{2\,S}{a}\,\varphi(at).$$

Setzen wir nun statt at entweder $z - z_0 + at$ oder $z_0 - z + at$, also statt t entweder $\frac{z - z_0}{a} + t$ oder $\frac{z_0 - z}{a} + t$, so geht diese Gleichung über in

$$C - \frac{A}{m}\cos\left(\frac{m}{a}(z - z_0) + mt\right) = \frac{2\,S}{a}\,s_1,$$

$$C - \frac{A}{m}\cos\left(\frac{m}{a}(z_0 - z) + mt\right) = \frac{2\,S}{a}\,s'.$$

Die hierin enthaltene Constante bestimmen wir dadurch, dass s_1 und $s' = 0$ unserer zunächst zu lösenden Aufgabe nach sind, wenn $z = z_0 \mp at$ gilt. Dann sind also s_1 und s' und damit die gesuchte Function φ durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{aA}{2\,mS}\left\{1 - \cos\left[\frac{m}{a}(z - z_0) + mt\right]\right\}, \\ s' &= \frac{aA}{2\,mS}\left\{1 - \cos\left[\frac{m}{a}(z_0 - z) + mt\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b.)}$$

Hiermit ist die Bewegung der Saite bestimmt in der Zeit von 0 bis $\frac{\pi}{m}$, vorausgesetzt, dass in dieser Zeit die Bewegung noch nicht an ein Ende gekommen und dort reflectirt worden ist.

Im Folgenden soll nun die Bewegung nach der Zeit $\frac{\pi}{m}$ untersucht werden.

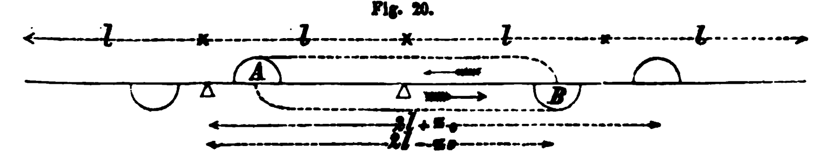
Ist $t = \frac{\pi}{m}$ geworden, so ist der Hammer abgesprungen und damit der Druck verschwunden, also für $t \gtreqless \frac{\pi}{m}$ ist $D = 0$ und somit nach (a.)

$$0 = \varphi'(at), \text{ also } \varphi(at) = \text{Const.}$$

Diese Const. finden wir, indem wir in beide Gleichungen (b.) setzen $t = \frac{\pi}{m}$ und $z = z_0$. Es ergiebt sich dann Const. $= \frac{aA}{mS}$. Diesen Werth behalten demnach s_1 und s' bis Theile der von den Enden reflectirten Wellen an die betreffenden Punkte gelangen.

Analog § 231 kann man, um die Wirkung der reflectirten Wellen zu berücksichtigen, statt der beiderseits begrenzten Saite eine, welche nach beiden Seiten ins Unendliche geht, einführen und in allen Punkten, welche um Vielfache von 2 l vom Anschlagpunkt z_0 abstehen, einen eben solchen Anschlag gleichzeitig mit den von z_0 stattfinden lassen, so dass von allen diesen Punkten eben solche Wellen auslaufen wie von z_0, ferner in den Punkten, für welche $z = -z_0 \pm 2\,\alpha l$ ist, gleichzeitig mit den vorigen Anschlägen noch andere von derselben Art, aber in entgegengesetzter Richtung anbringen, so dass von diesen letzteren Punkten den vorigen gleiche Wellen, aber nach negativer Höhe ausgehen. Aus den Lehren der Interferenzerscheinungen ergiebt sich dann, wie bei den Luftschwingungen § 231, dass dadurch derselbe Effect hervorgebracht wird, also namentlich alle Punkte $z = 0, l, 2l \ldots -l, -2l \ldots$ in Ruhe bleiben. Die hiermit angegebene Wellenbewegung ist erläutert in Fig. 20 durch die ausgezogenen Wellenberge und Wellenthäler.

Fig. 20.



Von dem Augenblick an, wo der Hammer die Saite verlässt, also für $t = \frac{\pi}{m}$ haben wir also auf der unendlichen Saite rückwärts und vorwärts, d. h. nach der Richtung der negativen und positiven z fortschreitende Wellensysteme.

Diese einzelnen abgerissenen Stücke wollen wir nun passend ergänzen, um ein zusammenhängendes vorwärtsschreitendes und ein eben solches rückwärtsschreitendes System zu erhalten, von welchen jedes zur Zeit $t = \frac{\pi}{m}$, wo der Hammer die Saite verlässt, sich anfängt zu bewegen, also f(z) und F(z) bestimmt. Bei der rückwärts gehenden Welle, dereh Ausschläge mit s_1 bezeichnet werden, ist erst $s_1 = 0$, steigt dann auf $\frac{aA}{mS}$, wie es an der Figur gezeichnet ist. Geht man über den Anschlagspunkt hinaus und über

die von dort aus vorwärts schreitende Welle, so findet man wieder Werthe von s_1, die gleich Null sind und welche bis auf $-\frac{aA}{mS}$ sinken, sobald man die erste negative Welle überschreitet. Um nun die positiven und negativen rückwärtsschreitenden Wellen mit einander zu verbinden, muss man sich zwischen jedem positiven und dem nächstfolgenden negativen Anschlagspunkte die Grösse $+\frac{aA}{mS}$ zu den Werthen von s_1 hinzudenken. Ebenso verbindet man die vorwärtsschreitenden Wellen und erhält so nur positive rückwärtsgehende und negative vorwärtsschreitende Wellen.

Die Rechnung nach diesen Wellensystemen ist nun folgende.

Nach der allgemeinen Formel für die Wellenzüge § 245, S. 181 ist für den positiven rückwärtsgehenden Wellenzug

$$s_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[B_n \cos \varkappa_n \left(t - \frac{\pi}{m}\right) + C_n \sin \varkappa_n \left(t - \frac{\pi}{m}\right)\right] \sin \frac{n\pi z}{l},$$

wo s, C_n für u, B_n und der Einfachheit wegen $t - \frac{\pi}{m}$ statt t gesetzt ist.

Zur Bestimmung der B_n und C_n ist dann für $t = \frac{\pi}{m}$:

$$s_1 = f(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin \frac{n\pi z}{l},$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \varkappa_n \sin \frac{n\pi z}{l}, \text{ mithin}$$

$$\int_0^{2l} f(z) \sin \frac{h\pi z}{l} dz = l B_h, \qquad \int_0^{2l} F(z) \sin \frac{h\pi z}{l} dz = \varkappa_n l C_h.$$

Dass die Integrationsgrenzen 0 und 2 l sind, ergiebt sich daraus, dass die gleichartigen Anschlagspunkte in Abständen 2 l sich wiederholen, also 2 l die Wellenlänge ist.

Es ist nun die nächste Aufgabe f(z) und F(z) für die einzelnen Stücke zu bestimmen.

Nach der Art, wie wir die einzelnen Wellenstücke zu einander verbinden, ist

von $z =$	bis $z =$	$s_1 = f(z) =$
1) 0	$z_0 - \frac{a\pi}{m}$	0
2) $z_0 - \frac{a\pi}{m}$	z_0	$\frac{aA}{2\,mS}\left\{1 + \cos\left[\frac{m}{a}(z - z_0)\right]\right\}$
3) z_0	$2l - z_0 - \frac{a\pi}{m}$	$\frac{aA}{mS}$
4) $2l - z_0 - \frac{a\pi}{m}$	$2l - z_0$	$\frac{aA}{2\,mS}\left\{1 - \cos\left[\frac{m}{a}(2l - z_0 - z)\right]\right\}$
5) $2l - z_0$	$2l$	$0.$

Setzen wir nun diese Werthe in das Integral ein und führen die Integration über die einzelnen Stücke aus, so folgt

$$l B_h = \frac{a A m^2 l^3}{S m h \pi (m^2 l^2 - h^2 a^2 \pi^2)} \sin\left(\frac{h\pi}{l}\frac{a\pi}{m}\right) \sin\frac{h\pi}{l} z_0.$$

$\frac{\partial s_1}{\partial t} = F(z)$ ist überall Null, nur von

$z =$	bis $z =$	ist $\frac{\partial s_1}{\partial t} = F(z) =$
$z_0 - \frac{a\pi}{m}$	z_0	$\frac{aA}{2S} \sin\frac{m}{a}(z - z_0).$
$2l - z_0 - \frac{a\pi}{m}$	$2l - z_0$	$-\frac{aA}{2S} \sin\frac{m}{a}(2l - z_0 - z).$

Die Einsetzung dieser Werthe liefert dann

$$\varkappa_h l C_h = -\frac{2 a^2 A}{S} \frac{m l^3}{(m^2 l^2 - h^2 a^2 \pi^2)} \cos^2\left(\frac{h\pi}{l}\frac{a\pi}{2m}\right) \sin\frac{h\pi}{l} z_0.$$

Für den fortschreitenden negativen Wellenzug ist, abgesehen vom Vorzeichen,

$$s' = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[B_n \cos\varkappa_n\left(t - \frac{\pi}{m}\right) + C_n \sin\varkappa_n\left(t - \frac{\pi}{m}\right)\right] \sin\frac{n\pi z}{l}.$$

Die Bestimmung von $f(z)$ und $F(z)$ für $t = \frac{\pi}{m}$ ist hier

von $z =$	bis $z =$	$s' = f(z) =$
1) 0	z_0	0
2) z_0	$z_0 + \frac{a\pi}{m}$	$\frac{aA}{2mS}\left\{1 - \cos\frac{m}{a}(z_0 - z)\right\}.$
3) $z_0 + \frac{a\pi}{m}$	$2l - z_0$	$\frac{aA}{mS},$
4) $2l - z_0$	$2l - z_0 + \frac{a\pi}{m}$	$\frac{aA}{2mS}\left\{1 + \cos\frac{m}{a}(2l - z_0 - z)\right\},$
5) $2l - z_0 + \frac{a\pi}{m}$	$2l$	$0,$

$\frac{\partial s'}{\partial t} = F(z)$ ist überall Null, nur

von $z =$	bis $z =$	ist $\frac{\partial s'}{\partial t} = F(z) =$
z_0	$z_0 + \frac{a\pi}{m}$	$-\frac{aA}{2S} \sin\frac{m}{a}(z - z_0),$
$2l - z_0$	$2l - z_0 + \frac{a\pi}{m}$	$\frac{aA}{2S} \sin\frac{m}{a}(z - 2l + z_0).$

Die Berücksichtigung dieser Werthe ergiebt dann

$$l B_n = -\frac{a A m^2 l^3}{S . m h \pi (m^2 l^2 - h^2 a^2 \pi^2)} \sin\left(\frac{h\pi}{l}\frac{a\pi}{m}\right) \sin\frac{h\pi}{l} z_0.$$

und

$$\varkappa_h \, l \, C_h = -\frac{2aA}{S} \cdot \frac{m a l^2}{m^2 l^2 - h^2 \pi^2 a^2} \cos^2\left(\frac{h\pi}{l} \frac{a\pi}{2m}\right) \sin \frac{h\pi}{m} z_0$$

Die Gleichung, welche die gesuchte resultirende Schwingung ergiebt, ist endlich $s = s_1 - s'$ oder nach Einsetzung der berechneten Werthe

$$s = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2aAml^2}{Sn\pi(m^2l^2 - n^2a^2\pi^2)} \sin\left(\frac{n\pi}{l} \frac{a\pi}{m}\right) \sin \frac{n\pi}{l} z_0 \cos \varkappa_n \left(t - \frac{\pi}{m}\right) \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

Daraus folgt auch hier analog dem Früheren, dass die Glieder in der Reihe für s wegfallen, in denen $\sin \frac{n\pi}{l} z_0 = 0$ ist.

4. Form der schwingenden Saiten.*)

Zur Bestimmung der in der allgemeinen Schwingungsgleichung § 245 enthaltenen Coefficienten müssen wir, wenn wir die $f(z)$ und $F(z)$ den Experimenten entsprechend nehmen wollen, die Beobachtungen mit dem Vibrations-Mikroskop benutzen. Aus diesen nämlich geht hervor, dass die Hauptbewegung aller Saitenpunkte abwechselnd auf- und absteigend ist in der Weise, dass das Aufsteigen und Absteigen mit constanter Geschwindigkeit geschieht, dass aber diese Geschwindigkeiten im Allgemeinen von einander verschieden sind und demnach auch die Zeiten des Auf- und Absteigens. Bezeichnen wir demnach diese verschiedenen Geschwindigkeiten mit f und g, so können wir schreiben, wenn τ die Steigzeit, T die Schwingungsdauer bedeutet, also $T - \tau$ die Fallzeit ist,

$$\begin{aligned} &\text{von } t = 0 \text{ bis } t = \tau, && s = ft + \alpha, \\ &\text{von } t = \tau \text{ bis } t = T, && s = g(T - t) + \alpha, \end{aligned} \qquad (a.)$$

folglich ist

$$f\tau = g(T - \tau). \qquad (b.)$$

Denken wir uns nun die Schwingung eines Punktes der Saite für irgend ein z ausgedrückt durch die Reihe

$$s = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[B_n \sin \frac{2\pi nt}{T} + C_n \cos \frac{2\pi nt}{T} \right],$$

so ergiebt sich durch Integration

$$B_h \int_0^T \sin^2 \frac{2h\pi t}{T} dt = \int_0^T s \sin \frac{2h\pi t}{T} dt$$

und

$$C_h \int_0^T \cos^2 \frac{2h\pi t}{T} dt = \int_0^T s \cos \frac{2h\pi t}{T} dt.$$

---

*) Helmholtz a. a. O. Beilage V.

Die Ausführung der Integration mit Berücksichtigung des obigen Werthes von s und der Gleichung (b.) giebt dann

$$B_n = \frac{(f+g)\,T}{2\,h^2\pi^2} \sin \frac{2\,h\pi\tau}{T},$$

$$C_h = -\frac{(f+g)\,T}{2\,h^2\pi^2}\left\{1 - \cos\frac{2\,h\pi\tau}{T}\right\}.$$

Die Schwingungsgleichung wird demnach

$$s = \frac{(f+g)\,T}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n\tau}{T}\sin\frac{2\,\pi n}{T}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right].$$

Dies ist also der Werth des Ausschlages für irgend einen Punkt der Saite, dessen Ort durch z bestimmt ist. Einen anderen Ausdruck derselben Grösse giebt die Formel aus § 245, d. i.

$$s = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[B_n \cos \varkappa_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right) + C_n \sin \varkappa_n \left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\sin\frac{n\pi z}{l}.$$

Diese beiden Gleichungen müssen nun in Uebereinstimmung gebracht werden.

Dies verlangt, da $\varkappa_n = \frac{2\,n\pi}{T}$ ist, dass gilt

$$B_n = 0 \text{ und } C_n \sin\frac{n\pi z}{l} = \frac{f+g}{\pi^2}\,\frac{T}{n^2}\sin\frac{n\pi\tau}{T}. \qquad \text{(c.)}$$

Zur weieren Bestimmung von C_n bedenke man, dass $f+g$ und τ von z, aber nicht von n abhängig sind. Setzen wir daher z. B. $n = 1$ und $n = 2$, so erhalten wir durch Division

$$\frac{C_2}{C_1}\cos\frac{\pi z}{l} = \frac{1}{4}\cos\frac{\pi\tau}{T}.$$

Nun ist für $z = 0$ auch $\tau = 0$, also $\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{4}$ und dann für $z = \frac{1}{2}$ übereinstimmend mit den Beobachtungen $\tau = \frac{T}{2}$.

Nach Einführung dieses Quotienten $\frac{C_2}{C_1}$ ergiebt sich

$$\frac{z}{l} = \frac{\tau}{T}. \qquad \text{(d.)}$$

Hieraus erhält man dann mit (c.):

$$C_n = \frac{f+g}{\pi^2}\cdot\frac{T}{n^2},$$

also ist $f+g$ auch unabhängig von z und wir erhalten für jeden Punkt der Saite

$$s = \frac{f+g}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{T}{n^2}\sin\varkappa_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\sin\frac{n\pi z}{l}.$$

Wir können endlich noch statt f und g die Amplitude einführen. Setzen wir p die Amplitude des Saitenpunktes z und P die des Mittelpunktes, $z = \frac{l}{2}$, so erhalten wir nach der Definition von f, g, τ, T

$$2\,p = f\tau = g(T - \tau),$$

also

$$f + g = \frac{2\,p}{\tau} + \frac{2\,p}{T - \tau} = \frac{2\,pT}{\tau(T - \tau)}.$$

Damit ergiebt sich mit Hülfe von (d.):

$$f + g = \frac{2\,pl^2}{Tz(l - z)}. \qquad \text{(e.)}$$

Ebenso können wir setzen

$$2\,P = f\tau = g\,(T - \tau)$$

und erhalten

$$f + g = \frac{2\,Pl^2}{T\frac{l}{2}\left(l - \frac{l}{2}\right)} = \frac{8\,P}{T}. \qquad \text{(f.)}$$

Dies in den Werth von C_n eingesetzt giebt endlich

$$C_n = \frac{8\,P}{\pi^2 n^2}$$

und damit die Gleichung der Schwingung

$$s = \frac{8\,P}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sin \varkappa_n \left(t - \frac{\tau}{2}\right) \sin \frac{n\pi z}{T}.$$

Hieraus lässt sich noch Folgendes über die Art der Schwingung folgern. s ist $= 0$, wenn $t = \frac{\tau}{2} + m\pi$ ist, d. h. alle Punkte gehen gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage, von da ab ist die Geschwindigkeit f des Punktes $f = \frac{2\,p}{\tau}$.

Da aber nach (e.) und (f.) $p = 4\,P\frac{z\,(l - z)}{l^2}$ ist und dann mit Berücksichtigung von (d.) folgt $p = 4\,P\frac{\tau\,(l - z)}{l\tau}$, so erhält man $f = \frac{8\,P\,(l - z)}{l\tau}$.

Diese Geschwindigkeit f bleibt aber nur bis zur Zeit τ, d. i. nach (d.) bis zur Zeit $\tau = P\frac{z}{l}$, also ist

$$\text{für } t \leqq T\frac{z}{l}, \quad s = ft = \frac{8\,P\,(l - z)}{l\tau}\,t,$$

oder

$$s \lesseqgtr \frac{8\,P}{l^2}\,z\,(l - z). \qquad \text{(g.)}$$

Von $t = T\frac{z}{l}$ an geht der Punkt mit der Geschwindigkeit g zurück, wo nach den obigen Werthen $g = \frac{2\,p}{T - \tau} = \frac{8\,Pz}{lT}$ ist.

Es ist demnach für

$$T \geqq t \geqq T\frac{z}{l} \text{ oder } t = \tau + t_1, \text{ wo } t_1 \leqq T - \tau \text{ ist,}$$

da die Bewegungen während der Zeit τ und t_1 entgegengesetzt sind und mit den Geschwindigkeiten f und g gemacht werden,

$$s = \frac{8P}{l^2} z(l - z) - \frac{8Pz}{lT} t.$$

Dies giebt nach (d.):

$$s = \frac{8Pz}{lT} \{T - (\tau + t_1)\}$$

oder

$$s = \frac{8Pz}{lT} (T - t). \qquad (g^*)$$

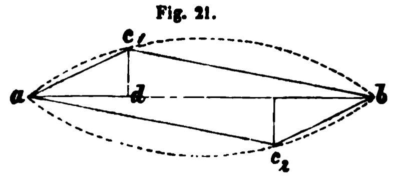
Die Schwingung der Saite theilt sich also in zwei Theile. Auf dem einen Theile derselben ist die Ablenkung gegeben durch (g.), auf dem anderen durch (g^*). Beide Gleichungen geben für die Gestalt der Saite eine gerade Linie, die entweder (g.) durch den Punkt $z = l$ oder (g^*) durch den Punkt $z = 0$, also durch die Endpunkte geht. Für den Schnittpunkt dieser Geraden ist

$$s = \frac{8P}{lT}(l - z)\,t = \frac{8P}{lT} z(T - t), \text{ also } lt = zT.$$

Die Abscisse z des Schnittpunktes wächst proportional der Zeit. Der Schnittpunkt der beiden Geraden, welche die schwingende Saite bildet, der zugleich der am meisten aus der Gleichgewichtslage entfernte Punkt der Saite ist, rückt also mit constanter Geschwindigkeit von einem Ende der Saite zum anderen und während dieser Zeit liegt er auf einem parabolischen Bogen, da für ihn

$$s = p = \frac{4P}{l^2} z(l - z) \text{ ist.}$$

Fig. 21.



„Die Bewegung der Saite lässt sich also (Helmholtz S. 579) kurz so beschreiben: dass in Fig. 21 der Fusspunkt d der Ordinate ihres Gipfels mit constanter Geschwindigkeit auf der Linie ab hin- und hereilt, während der Gipfelpunkt selbst die beiden parabolischen Bögen ac_1b und bc_2a nach einander durchläuft und die Saite selbst in den beiden geraden Linien ac_1 und bc_1 oder ac_2 und bc_2 ausgespannt ist.“

Stärke der Schallempfindung. (§ 272.)

Die Intensität ist proportional dem Quadrat der Amplitude und indirect proportional dem Quadrat der Schwingungsdauer.

Die Entstehungsstärke des Schalles ist proportional der lebendigen Kraft der schwingenden Theilchen, also dem Quadrat der Schwingungsgeschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit ändert sich mit der Zeit, erhält aber nach Verlauf einer Schwingungsdauer wieder denselben Werth, sie ist daher veränderlich von Moment zu Moment. Denkt man sich auf einer Geraden Senkrechte errichtet, welche von Zeittheilchen zu Zeittheilchen die lebendige Kraft darstellen, so sind nach der Formel von § 224 (28.) diese einzelnen Senkrechten:

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m u^2 \cos^2 \frac{2 \pi t}{T}.$$

Verbindet man die Endpunkte dieser Ordinaten durch eine Linie, so ist die Fläche zwischen dieser Linie und der Geraden, wenn man die Figur für die Dauer T ausführt, die Summe aller in der Zeit T auftretenden lebendigen Kräfte, jede mit einem kleinen Zeittheilchen multiplicirt. Dividirt man also diese ganze Summe mit T, so erhält man die mittlere lebendige Kraft.

Dies analytisch dargestellt giebt folgenden Ausdruck für die mittlere lebendige Kraft:

$$\left\{ \int_0^T \tfrac{1}{2} m u^2 \cos^2 \frac{2 \pi t}{T} dt \right\} : T = \tfrac{1}{4} m u^2,$$

also proportional u^2, das ist der Oscillationsintensität. Dieses u^2 ist aber (§ 224) $\frac{4 \pi^2}{T^2} r^2$, also ist die Intensität dem Quadrat der Amplitude direct und dem Quadrat der Schwingungsdauer indirect proportional.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Stärke der Schallempfindung übereinstimmt mit der objectiven Intensität der Schallerregung, wie unter 1. und 6. im Lehrbuche auseinandergesetzt ist. Anders beim Licht (vergl. § 284).

Beugung des Schalles. (§ 276.)

Die Schall- und Lichtstrahlen sind gerade Linien.

Wenn der Schall auf einen Schirm trifft, in dem eine Oeffnung ist, so vernimmt man ihn im Allgemeinen in allen Richtungen hinter der Oeffnung, während dies nicht bei dem Lichte der Fall ist. Man hat demnach behauptet, dass, wenn die Undulationstheorie des Lichtes richtig wäre, so

müsste das Licht hinter der Oeffnung eines Schirmes sich ebenso verhalten wie der Schall. Diese Behauptung ist durch die folgende Untersuchung*) widerlegt, wobei sogleich die Theorie der Beugung angedeutet ist, deren genauere Erörterung in §§ 370 und 371 enthalten ist.

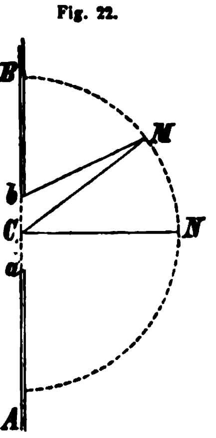


Fig. 22.

Bedeute AB (Fig. 22) einen die Wellenbewegung aufhaltenden Schirm und $ab = 2e$ eine Oeffnung in demselben. An diesen Schirm treffe eine Welle, deren Ausgangspunkt weit entfernt sei, so dass wir das Stück ab der sphärischen Welle als eben ansehen dürfen. Untersuchen wir nun die Erregung, die in Folge der Welle, welche durch ab geht, in einem Punkte M eines Halbkreises mit dem Halbmesser r, dessen Mittelpunkt in C, d. i. der Mitte von ab, ist, bewirkt wird. Wir theilen uns den Spalt ab in unmerklich kleine Theile von der Breite dx, so dass also, wenn der Winkel BCM mit ϑ bezeichnet wird, die Entfernung M von dem Ende des ersten Theiles ist

$$Mx = \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx\cos\vartheta},$$
$$= r - x\cos\vartheta + \frac{x^2}{2r}\sin^2\vartheta + \ldots.$$

Nach dem Huyghens'schen Princip nehmen wir nun an, dass von jedem Theile des Spaltes eine neue Welle fortgeht, deren Amplitude in M wir umgekehrt proportional der Entfernung setzen müssen. Wir können demnach die in M antreffende Schwingung ausdrücken durch

$$dy = \frac{a\,dx}{Mx}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - Mx),$$

oder näherungsweise

$$= \frac{a\,dx}{Mx}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r + x\cos\vartheta).$$

Die Erregung des Punktes M von allen diesen Elementenwellen ist dann:

$$y = \int_{+e}^{-e}\frac{a\,dx}{Mx}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r + x\cos\vartheta),$$

d. i. wenn $Mx = r$ gesetzt wird, was für kleine Oeffnungen $2e$ gestattet ist,

$$y = \frac{a\lambda}{2\pi r\cos\vartheta}\left[\cos\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r - e\cos\vartheta) - \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r + e\cos\vartheta)\right],$$
$$= \frac{a\lambda}{\pi r\cos\vartheta}\sin\frac{2e\pi\cos\vartheta}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha t - r).$$

Für die Untersuchung der Intensität kommt aber nach § 272 nur die Amplitude $\frac{a\lambda}{\pi r\cos\vartheta}\sin\frac{2e\pi\cos\vartheta}{\lambda}$ in Betracht.

*) Gehler's Lexikon, Undulation § 21.

1) $\lambda > e$. Dies wird meist bei Schallwellen der Fall sein, wo ausserdem die Wellenlänge immer gross im Vergleich zu denen des Lichtes ist. Wir können dann setzen

$$\sin \frac{2\,e\pi\cos\vartheta}{\lambda} = \frac{2\,e\pi\cos\vartheta}{\lambda},$$

mithin ist dann die Amplitude

$$\frac{a\lambda}{\pi r\cos\vartheta}\,\frac{2\,e\pi\cos\vartheta}{\lambda} = \frac{2\,ea}{r},$$

also eine Grösse, welche von ϑ ganz unabhängig ist, d. h. die Schallerregung ist in allen Punkten der Kugel von demselben Halbmesser ganz dieselbe.

Dass dieser letztere Schluss nur begrenzt richtig ist, geht aus den Beobachtungen hervor, die § 273 des Lehrbuchs angegeben sind.

2) $\lambda < e$. Dies wird beim Licht meist der Fall sein.

Hier ist für einen Punkt N, der der Oeffnung nahezu gerade gegenübersteht, weil ϑ wenig von 90^0 verschieden ist, $\cos\vartheta$ eine sehr kleine Grösse, also

$$\sin \frac{2\,e\pi\cos\vartheta}{\lambda} = \frac{2\,e\pi\cos\vartheta}{\lambda}.$$

Die Amplitude erhält für diese Punkte den obigen Werth $\frac{2\,ea}{r}$.

Die Amplitude ist aber gleich Null an allen Punkten, für welche

$$\frac{2\,e\pi\cos\vartheta}{\lambda} = \pm\, n\pi \text{ oder } \cos\vartheta = \pm\frac{n\lambda}{2e} \text{ ist.}$$

Solche Punkte giebt es nun um so mehr, je kleiner λ gegen e ist, da es dann um so mehr Werthe von n giebt, ehe $\frac{n\lambda}{2e} = 1$ ist.

Zwischen diesen ganz finsteren Punkten giebt es lichte Punkte, welche aber viel schwächer beleuchtet sind als die dem N benachbarten Stellen. Es finden sich nämlich, wenn nicht ϑ nahezu 90^0 ist, noch Max. von Helligkeiten, wenn $\sin \frac{2\,e\pi\cos\vartheta}{\lambda} = \pm 1$ ist. Die Amplitude für diese Punkte ist dann $\frac{a\lambda}{r\pi\cos\vartheta}$, mithin stehen die Intensitäten der Erleuchtung von N, d. i. I zu der der anderen erleuchteten Punkte I' in folgendem Verhältniss:

$$I : I' = \left(\frac{2\,ae}{r}\right)^2 : \frac{a^2\lambda^2}{(r\pi\cos\vartheta)^2},$$

$$= 1 : \frac{\lambda^2}{4\,e^2\pi^2\cos^2\vartheta},$$

also ist I' im Vergleich zu I eine um so kleinere Grösse, je mehr ϑ von 90^0 verschieden ist.

Das Doppler'sche Princip. (§ 277.)

Um die Gleichungen für das Doppler'sche Princip aufzufinden, legen Klinkerfues*) und Ketteler**) ihren Betrachtungen eine unendliche Reihe von elastischen nebeneinander liegenden Kugeln zu Grunde oder auch eine von Mach***) beschriebene Vorrichtung, die aus einer Reihe schwerer Metallcylinder besteht, deren Axen zu je zwei durch ringförmige elastische Stahlfedern verbunden sind.

Im Folgenden soll die Entwickelung von Ketteler reproducirt werden.

Zur Vereinfachung des Problems nehmen wir an, dass die Translationsgeschwindigkeit g des tonerregenden Körpers ein kleiner Bruchtheil der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Wellen ist. Dann ist es erlaubt, die Aenderung der Amplitude und der Gesetze der Schwingungen, die wegen der entstehenden Reibung vorhanden sein müssen, zu vernachlässigen und von der localen Dichtigkeitsänderung des Mittels in unmittelbarer Nähe der Quelle abzusehen.

Es geschieht die Uebertragung der unendlich vielen und unendlich kurzen Stösse, durch deren continuirliche Folge die Wellen entstehen, an das leitende Mittel in gleicher Weise, mögen dieselben von demselben oder von verschiedenen Punkten des Raumes aus erfolgen. Es darf stets die Ton- oder Lichtquelle als während einer unendlich kurzen Zeit ruhend gedacht werden.

Die Gesetze der Schwingungen mögen bei Ruhe oder Bewegung gegeben sein durch $s = f(t)$ oder speciell für pendelartige Schwingungen durch

$$s = a \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Das Princip, dessen Benutzung uns die Gleichungen unseres Problems liefert, ist folgendes: Bei jeder wellenförmigen Bewegung hat jeder schwingende Punkt in jedem Augenblick diejenige Oscillationsgeschwindigkeit, welche jeder vorhergehende um soviel früher gehabt hat, als die einzelne Erschütterung braucht, um von jenem zu diesem zu gelangen.

Für unendlich nahe Punkte giebt dies

$$\frac{\partial f(z + \Delta z, t + \Delta t)}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t},$$

$$\Delta z = c \Delta t.$$

Dies giebt nach dem Taylor'schen Satz die bekannte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}.$$

---

*) Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie. Leipzig 1867. — Briot, Mathematische Theorie des Lichtes. Uebersetzt und mit einem Zusatz vermehrt. Leipzig 1867. — W. Huggins, Spectralanalyse der Himmelskörper. Deutsch mit Zusätzen. Leigzig 1868.

**) Pogg. Ann. CXLIV.

***) Pogg. Ann. CXXXII.

Für endliche Entfernung liefert unser Princip die Gleichungen

$$v = \varphi\left(t - \frac{z}{c}\right), \qquad s = f\left(t - \frac{z}{c}\right).$$

Nehmen wir nun aus der unendlichen Menge von Cylindern bei der Mach'schen Vorrichtung irgend einen Cylinder als den ersten und betrachten die Bewegung des p^{ten}, die von da aus an die folgenden, den $p+1^{ten}$ $p+2^{ten}$ .... abgegeben wird. Derselbe mache in Folge irgend welcher Ursache zu den Zeiten

$$t, \qquad t + \Delta t, \qquad t + 2\Delta t \ldots,$$

die Excursionen

$$f(t), \quad f(t+\Delta t), \quad f(t+2\Delta t) \ldots .$$

Denselben Erfolg können wir erhalten, wenn wir

1) vom 0ten Cylinder beginnen und diesen zu den Zeiten

$$t - \frac{p\Delta z}{c}, \quad t + \Delta t - \frac{p\Delta z}{c}, \quad t + 2\Delta t - \frac{p\Delta z}{c}, \ldots$$

die Excursionen

$$f(t), \qquad f(t+\Delta t), \qquad f(t+2\Delta t) \ldots$$

machen lassen;

2) von beliebigen Cylindern ausgehen und zwar wie folgt denselben zu bestimmten Augenblicken bestimmte Excursionen ertheilen:

Nummer des Cylinders	Zeit	Excursion
0	$t - \frac{p\Delta z}{c}$	$f(t)$,
m_1	$t - \frac{(p-m_1)\Delta z}{c} + \Delta t$	$f(t+\Delta t)$,
m_2	$t - \frac{(p-m_2)\Delta z}{c} + 2\Delta t$	$f(t+2\Delta t)$,
. . . . .	. . . . .	. . . . .
m_n	$t - \frac{(p-m_n)\Delta z}{c} + n\Delta t$	$f(t+n\Delta t)$.

Letzterer Vorgang ist der, welcher in continuirlicher Form in Luft und Aether bei Bewegung von Ton- oder Lichtquelle vor sich geht.

Zur Zeit $t = 0$ beginne die Bewegung, man habe $s_0 = f(0)$ und zwar bei $z = 0$.

Nach der Zeit Δt ist diese Excursion fortgerückt nach $z = c\Delta t$, während die Excursion $s_1 = f(\Delta t)$ sich befindet bei $z = g\Delta t$.

Nach der Zeit $2\Delta t$ ist die Excursion s_0 bei $z = 2c\Delta t$, s_1 ist bei $z = (g+c)\Delta t$ und $s_2 = f(2\Delta t)$ ist bei $z = 2g\Delta t$.

Diese Betrachtung ist deutlicher durch die folgende Zusammenstellung:

Die Excursionen $s_0 = f(0)$, $s_1 = f(\Delta t)$, $s_2 = f(2\Delta t) \ldots$ befinden sich zur Zeit $t = 0$ bei $z = 0$,

Δt	$c\Delta t$,	$g\Delta t$,	
$2\Delta t$	$2c\Delta t$,	$(g+c)\Delta t$,	$2g\Delta t$,
$3\Delta t$	$3c\Delta t$,	$(g+2c)\Delta t$,	$(2g+c)\Delta t \ldots$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
$n\Delta t$	$nc\Delta t$,	$(g+\overline{n-1}\,c)\Delta t$,	$(2g+\overline{n-2}\,c)\Delta t, \ldots$

Man hat also allgemein, wenn $\Delta t = \frac{1}{n} t$ gesetzt wird

$$s_p = f\left(\frac{p}{n} t\right), \text{ bei } z = ct\left[1 - \frac{p}{n}\left(1 - \frac{g}{c}\right)\right],$$

woraus dann durch Elimination von $\frac{p}{n}$ folgt

$$s = f\left(\frac{t - \frac{z}{c}}{1 - \frac{g}{c}}\right) = f\left(\frac{ct - z}{c - g}\right)$$

als Gleichung der Welle.

Ist das Schwingungsgesetz

$$s = a \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

so ist die Gleichung der erzeugten Welle

$$s = a \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{ct - z}{c - g}, \text{ genähert } = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left[(c + g)\left(t - \frac{z}{c}\right)\right].$$

Um nun die veränderte Schwingungsdauer T_1 und Wellenlänge λ_1 zu finden, geben wir dieser Gleichung die Form

$$s = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{z}{\lambda_1}\right).$$

Durch Gleichsetzung dieser Werthe von s erhalten wir dann

$$\frac{c - g}{c} T = T_1, \quad (c - g) T = \lambda_1,$$

da ausserdem $\lambda = cT$ ist, so ergiebt sich hieraus die wichtige Folgerung

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\lambda_1}{\lambda},$$

d. h. die Schwingungsdauer und Wellenlänge verändern sich in gleichem Verhältniss.

Es mag noch bemerkt werden, dass die Gleichung der Welle in der allgemeinsten Form der Bedingung genügt, dass für denjenigen Punkt des Mittels, der von der Quelle gerade passirt wird, die Elongation desselben der Elongation der Quelle gleich ist. Denn setzen wir die für diesen Punkt bestimmte Entfernung $z = gt$ in $s = f\left(\frac{ct - z}{c - g}\right)$ ein, so erhalten wir $s = f(t)$.

Alle obigen Entwickelungen beruhen auf der Annahme, dass der Bruch $\frac{g}{c}$ eine sehr kleine Grösse sei. „Ist das nicht der Fall (a. a. O. S. 125), so können, wie bereits angedeutet wurde, bei der Bewegung von Ton- und Lichtquelle Momente auftreten, die eine unmittelbare Identificirung der Erscheinung mit dem analogen Vorgange auf der Mach'schen Maschine nicht mehr gestatten. Sieht man ab von dem Einfluss der Bewegung auf die Schwingungen der Quelle selbst, so bleibt noch zu beachten, dass die

rasche Translation eine sich auf eine gewisse Entfernung hin erstreckende Dichtigkeitsänderung des Mittels hervorruft, und dass die Schwingungen sich zunächst an diese verdichtete resp. verdünnte Umgebung übertragen. Die Theilchen innerhalb derselben haben eine Translationsgeschwindigkeit, die alle Zwischenstufen umfasst zwischen g und 0, und ebenso liegt ihre Dichtigkeit zwischen einem gewissen Maximal- resp. Minimalwerth und 1, so dass die entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit von $c \pm c_1$ allmählig in c übergeht. Nun ist klar, dass unsere Betrachtungen ihre Gültigkeit behalten, wenn man sie in continuirlicher Weise auf jede unendlich dünne Schicht der genannten Umgebung überträgt. Und andererseits wird der Fehler, der durch die Vernachlässigung dieser Verhältnisse entsteht, immerhin ein geringer sein."

Klinkerfues kommt a. a. O. auf die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (c + g)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

und deren Integral

$$s = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} [(c + g) t - z + Z],$$

auf Resultate, die Ketteler als unrichtig verwirft.

III. Optik.

Begriff und Wesen des Lichtes. (§ 279.)

1. Differentialgleichungen der Schwingungsbewegung des Aethers.*)

Nach § 18 haben wir uns den Aether als einen Stoff zu denken, dessen einzelne Theile eine gegenseitige Abstossung oder Anziehung auf einander ausüben, welche bewirkt, dass die Theilchen in ihren ursprünglichen gegenseitigen Abständen verharren. Wird aber der Aether durch den Process des Leuchtens in Bewegung gesetzt, so sind es eben diese Kräfte, welche die aus der Gleichgewichtslage herausgetriebenen Theilchen zu ihr zurückzuführen streben und hierdurch die Fortpflanzung der eingeleiteten Lichtbewegung vermitteln. Diese Kraft ist nun jedenfalls eine Function der Entfernung r dieser Theilchen, also $f(r)$, von der wir annehmen, dass sie sich mit r stetig ändert, aber mit zunehmendem r rasch abnimmt. Diese Function sei positiv oder negativ, je nachdem die Kraft ist attractiv oder repulsiv. Da ferner diese gegenseitigen Anziehungen oder Abstossungen auch proportional den Massen sein müssen, so wird $m_1 . m_2 f(r)$ der allgemeine Ausdruck der Kraft sein, die zwischen den Theilchen wirkt, deren Massen m_1 und m_2 sind und deren gegenseitige Entfernung r ist. Wir denken uns nun durch ein Aethertheilchen ein rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt und bezeichnen mit r den Abstand der Aethertheilchen, welche auf einander wirken, ferner mit x', y', z' die Projectionen von r auf die Coordinatenaxen, so dass also die Cosinus der Richtungswinkel von r gegen die Coordinatenaxen $\frac{x'}{r}$, $\frac{y'}{r}$, $\frac{z'}{r}$ sind und $r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ ist. Nach Einführung des selbstverständlichen Algorithmus Σ erhalten wir dann, da die Componenten nach den drei Axen verschwinden müssen, als Gleichgewichtsgleichungen für jedes Molekül:

$$0 = \Sigma m f(r) \frac{x'}{r}, \quad 0 = \Sigma m f(r) \frac{y'}{r}, \quad 0 = \Sigma m f(r) \frac{z'}{r}.$$

---

*) Beer, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853. — Briot, Mathematische Theorie des Lichtes, übersetzt von Klinkerfues. Leipzig 1867. — Radicke, Handbuch der Optik. Berlin 1839.

Wir nehmen nun an, dass durch eine beliebige Ursache die Aether-Moleküle sehr wenig aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht sind und dass sie in Folge dessen kleine Schwingungen um diese ihre Gleichgewichtslage ausführen. Nennen wir dann ξ, η, ζ die Veränderungen der Coordinaten eines Aethermoleküles, so werden die des benachbarten sich ausdrücken lassen durch $\xi + \varDelta\xi$, $\eta + \varDelta\eta$, $\zeta + \varDelta\zeta$. Während vorher deren Abstand r war, so sei er jetzt $r + \varDelta r$, so dass also ist

$$(r + \varDelta r)^2 = (x' + \varDelta\xi)^2 + (y' + \varDelta\eta)^2 + (z' + \varDelta\zeta)^2.$$

Die Gleichungen der Bewegung sind demnach ganz allgemein:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \Sigma m f(r + \varDelta r)\frac{x' + \varDelta\xi}{r + \varDelta r},\\
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \Sigma m f(r + \varDelta r)\frac{y' + \varDelta\eta}{r + \varDelta r},\qquad (1.)\\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= \Sigma m f(r + \varDelta r)\frac{z' + \varDelta\zeta}{r + \varDelta r}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen (1.) vereinfachen sich, da es sich um kleine Schwingungsbewegungen handelt und wir in Folge dessen kleine Grössen zweiter Ordnung, d. h. die Potenzen und Produkte der Verschiebungen oder ihrer Projectionen vernachlässigen können.

Eine bequemere Ausdrucksweise erhalten wir, wenn wir von nun an $\frac{f(r + \varDelta r)}{r + \varDelta r}$ oder $\frac{f(r)}{r}$ mit dem einfachen Functionszeichen f bezeichnen, also setzen $f(r)$ statt $\frac{f(r)}{r}$.

In Folge der genannten Vernachlässigungen ist

$$\varDelta r = \frac{x'\varDelta\xi + y'\varDelta\eta + z'\varDelta\zeta}{r},\qquad f(r + \varDelta r) = f(r) + f'(r)\varDelta r.$$

Durch Substitution dieser Grössen unter Benutzung der Gleichgewichtsbedingungen verwandeln sich die Gleichungen (1.) in

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \Sigma m f(r)\varDelta\xi + \Sigma m f'(r)[x'\varDelta\xi + y'\varDelta\eta + z'\varDelta\zeta]\frac{x'}{r},\\
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \Sigma m f(r)\varDelta\eta + \Sigma m f'(r)[x'\varDelta\xi + y'\varDelta\eta + z'\varDelta\zeta]\frac{y'}{r},\qquad (2.)\\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= \Sigma m f(r)\varDelta\zeta + \Sigma m f'(r)[x'\varDelta\xi + y'\varDelta\eta + z'\varDelta\zeta]\frac{z'}{r}.
\end{aligned}$$

Diesen Gleichungen (2.) wollen wir eine für das Folgende bequemere Form geben. Man kann nämlich schreiben nach dem Taylor'schen Satz und der Exponentialreihe $\xi + \varDelta\xi = \xi + e^{x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}} - 1$, wenn man symbolisch bezeichnet durch $\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2$ den Werth

$$\left(x'^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 2x'y'\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + y'^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + 2x'z'\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial z} + 2y'z'\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial z} + z'^2\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)$$

und dem entsprechend die höheren Potenzen dieser Parenthese.

Es ist dann

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \Sigma m f(r)\left(e^{x'\frac{\partial\xi}{\partial x}+y'\frac{\partial\xi}{\partial y}+z'\frac{\partial\xi}{\partial z}}-1\right)$$

$$+\Sigma m\frac{f'(r)}{r}\left\{x'^2\left[e^{x'\frac{\partial\xi}{\partial x}+y'\frac{\partial\xi}{\partial y}+z'\frac{\partial\xi}{\partial z}}-1\right]\right.$$

$$\left.+x'y'\left[e^{x'\frac{\partial\eta}{\partial x}+y'\frac{\partial\eta}{\partial y}+z'\frac{\partial\eta}{\partial z}}-1\right]+x'z'\left[e^{x'\frac{\partial\zeta}{\partial x}+y'\frac{\partial\zeta}{\partial y}+z'\frac{\partial\zeta}{\partial z}}-1\right]\right\}$$

und diesem analog können die beiden anderen Gleichungen umgeformt werden.

Nach der Bemerkung zu § 309, 1. ergiebt sich, dass die dort mit $\frac{g'+h'}{4}$ bezeichnete Grösse verschwinden muss; setzen wir aber $f(r) = \frac{\mu}{r^{n+1}}$, d. h. nehmen wir die Kraft zwischen den Aethertheilchen umgekehrt proportional der n^{ten} Potenz des Abstandes, so ist

$$g' = \frac{1}{2.3.5}\Sigma\frac{m\mu}{r^{n-3}} \text{ und } h' = -\frac{n+1}{2.3.5.7}\Sigma\frac{m\mu}{r^{n-3}} = -\frac{n+1}{7}g',$$

also

$$g'+h' = g'\left(1-\frac{n+1}{7}\right) = g'\frac{6-n}{7}.$$

Es muss also, damit $g'+h'=0$ wird, $n=6$ sein. Da ferner nach den dort gebrauchten Bezeichnungen $g+h$ positiv ist (cf. § 373, 4.), so muss die Kraft die Entfernung der Theilchen vergrössern, d. h. eine repulsive sein. Die Molekularwirkung der Aethertheilchen auf einander ist demnach eine repulsive, die mit der sechsten Potenz der Entfernung abnimmt.

Nach § 309, 2. muss nahezu $g_1+h_1=0$ sein. Setzen wir nun $f_1(r_1) = \frac{\mu_1}{r_1^{n+1}}$, so ist

$$g_1 = \Sigma\frac{m_1\mu_1}{r_1^{n+1}}, \quad h_1 = -\frac{n+1}{3}\Sigma\frac{m\mu_1}{r_1^{n+1}} = -\frac{n+1}{3}g_1,$$

folglich

$$g_1+h_1 = -\frac{n-2}{3}g_1.$$

Dies ist gleich Null, wenn $n=2$ ist. Die Wirkung der ponderabelen Moleküle steht also im umgekehrten Verhältniss des Quadrats des Abstandes und wird, da wir aus anderen Gründen annehmen müssen, dass die Dichtigkeit des Aethers in den ponderablen Mitteln grösser ist als im freien Aether, eine Anziehung sein müssen.

2. Integration der Gleichungen für homogene Mittel.

Für homogene Mittel müssen die Coefficienten der Grössen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ in den Gleichungen (2.) constant nach allen Richtungen dieselben sein. Wir wollen daher den Gleichungen (2.) folgende einfachere Form geben:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = L \varDelta\xi + R \varDelta\eta + Q \varDelta\zeta,$$
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = M \varDelta\eta + P \varDelta\zeta + R \varDelta\xi, \qquad (3.)$$
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = N \varDelta\zeta + Q \varDelta\xi + P \varDelta\eta,$$

wo ist

$$L = \sum m \left[f(r) + \frac{x'^2}{r} f'(r) \right], \quad P = \sum m \frac{y'z'}{r} f'(r),$$
$$M = \sum m \left[f(r) + \frac{y'^2}{r} f'(r) \right], \quad Q = \sum m \frac{z'x'}{r} f'(r),$$
$$N = \sum m \left[f(r) + \frac{z'^2}{r} f'(r) \right], \quad R = \sum m \frac{x'y'}{r} f'(r).$$

Es kommt nun darauf an, zu bestimmen ξ, η, ζ als Functionen der Zeit und der Coordinaten x, y, z des schwingenden Punktes.

Da wir also lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten haben, so genügen denselben Integrale von der Form

$$\xi = A e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\eta = B e^{ux + vy + wz - st},$$
$$\zeta = C e^{ux + vy + wz - st},$$

wo u, v, w und A, B, C, s willkürliche Constanten sind. A, B, C sind proportional den Cosinus der Winkel, welche die Schwingungsrichtungen mit den Coordinatenaxen machen. Diese Grössen sind § 225, 1. mit α, β, γ bezeichnet. Die Constanten u, v, w, s setzen sich aus einem reellen und einem imaginären Theil zusammen. Wenn dies besonders erörtert werden soll, schreiben wir $u = \mathfrak{U} + \mathfrak{u} i$, $v = \mathfrak{V} + \mathfrak{v} i$, $w = \mathfrak{W} + \mathfrak{w} i$, $s = S + \sigma i$. Durch Substitution dieser Integralwerthe in (3.) ergeben sich Bedingungsgleichungen für die Constanten A, B, C, s. Wenn wir höhere Potenzen von x′, y′, z′ als die zweite vernachlässigen, erhalten wir zunächst

$$\varDelta\xi = x' \frac{\partial \xi}{\partial x} + y' \frac{\partial \xi}{\partial y} + z' \frac{\partial \xi}{\partial z} = \xi (x'u + y'v + z'w),$$
$$\varDelta\eta = x' \frac{\partial \eta}{\partial x} + y' \frac{\partial \eta}{\partial y} + z' \frac{\partial \eta}{\partial z} = \eta (x'u + y'v + z'w),$$
$$\varDelta\zeta = x' \frac{\partial \zeta}{\partial x} + y' \frac{\partial \zeta}{\partial y} + z' \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \zeta (x'u + y'v + z'w)$$

und dann durch Substitution in (3.)

$$As^2 = [AL' + BR' + CQ'] (x'u + y'v + z'w),$$
$$Bs^2 = [BM' + CP' + AR'] (x'u + y'v + z'w), \qquad (4.)$$
$$Cs^2 = [CN' + AQ' + BP'] (x'u + y'v + z'w),$$

wo die L′, M′,… P′, Q′… die obigen Werthe von L, M,… P, Q… sind, wenn nur die eben geschriebene Näherung von $\varDelta\xi$, $\varDelta\eta$, $\varDelta\zeta$ genommen wird.

Will man aber höhere Potenzen berücksichtigen, so kann man setzen, wenn symbolisch bezeichnet wird mit $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{u}^2$, $\bar{u}\bar{v}$... die partiellen Derivirten einer Function, also $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ldots$

$$\Delta\xi = \left(e^{x'\bar{u} + y'\bar{v} + z'\bar{w}} - 1\right)\xi,$$
$$\Delta\eta = \left(e^{x'\bar{u} + y'\bar{v} + z'\bar{w}} - 1\right)\eta,$$
$$\Delta\zeta = \left(e^{x'\bar{u} + y'\bar{v} + z'\bar{w}} - 1\right)\zeta,$$

also dann symbolisch

$$\begin{aligned} As^2\xi &= [AL + BR + CQ]\left(e^{x'\bar{u} + y'\bar{v} + z'\bar{w}} - 1\right)\xi, \\ Bs^2\eta &= [BM + CP + AR]\left(e^{x'\bar{u} + y'\bar{v} + z'\bar{w}} - 1\right)\eta, \\ Cs^2\zeta &= [CN + AQ + BP]\left(e^{x'\bar{u} + y'\bar{v} + z'\bar{w}} - 1\right)\zeta. \end{aligned} \qquad (4^*)$$

Aus den Gleichungen (4.) oder (4*) können folgende abgeleitet werden, die sich einfacher schreiben, wenn wir die Produkte der Grössen L, M, N, P, Q, R mal den letzten Parenthesen mit L_1, M_1, N_1 etc. bezeichnen.

Wir eliminiren aus der ersten und zweiten C, aus der zweiten und dritten A, so erhalten wir die Doppelgleichung

$$A[P_1(s^2 - L_1) + Q_1R_1] = B[Q_1(s^2 - M_1) + R_1P_1] = C[R_1(s^2 - N_1) + P_1Q_1].$$

Die Resultante der Gleichungen (4.), wenn A, B, C die drei unbekannten cos. sind, ist

$$\begin{vmatrix} s^2 - L_1 & -R_1 & -Q_1 \\ -R_1 & s^2 - M_1 & -P_1 \\ -Q_1 & -P_1 & s^2 - N_1 \end{vmatrix} =$$

$$(s^2 - L_1)(s^2 - M_1)(s^2 - N_1) - P_1^2(s^2 - L_1) - Q_1^2(s^2 - M_1) - R_1^2(s^2 - N_1) - 2P_1Q_1R_1 = 0.$$

Einer jeden Wurzel s^2 dieser Gleichung entspricht ein System von Werthen der Verhältnisse $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, so dass also eine der Constanten willkürlich bleibt. Bezeichnen wir dann mit s', s'', s''' die drei Wurzeln dieser Gleichung, so können wir schreiben als das Integral der Gleichungen:

$$\xi = A'e^{ux+vy+wz-s't} + A''e^{ux+vy+wz-s''t} + A'''e^{ux+vy+wz-s'''t},$$
$$\eta = B'e^{ux+vy+wz-s't} + B''e^{ux+vy+wz-s''t} + B'''e^{ux+vy+wz-s'''t},$$
$$\zeta = C'e^{ux+vy+wz-s't} + C''e^{ux+vy+wz-s''t} + C'''e^{ux+vy+wz-s'''t}.$$

3. Trennung des Imaginären vom Reellen. Ebene Wellen.

Nach 2. ist, wenn noch gesetzt wird $A = ae^{\alpha i}$, $B = be^{\beta i}$, $C = ce^{\gamma i}$,

$$\xi = a e^{(Ux + Vy + Wz - St)} e^{(\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z - \sigma t + \alpha)i},$$
$$= a e^{Ux + Vy + Wz - St} \times$$
$$[\cos(\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z - \sigma t + \alpha) + i\sin(\mathfrak{u}x + \mathfrak{v}y + \mathfrak{w}z - \sigma t + \alpha)]$$

und dem entsprechend η, ζ.

Dasselbe gilt von den beiden anderen geradlinigen Schwingungen, die sich nach den beiden anderen Wurzeln der kubischen Gleichung S. 261 für s^2 ergeben.

Hieraus folgt der allgemeine Satz: In einem symmetrischen Mittel sind die drei beständigen Schwingungen, welche einer ebenen Welle entsprechen, nach den drei Hauptaxen des Ellipsoides (8.) gerichtet, also auf einander senkrecht.

Cauchy hat dieses Ellipsoid (8.), weil es die Seitlichkeit der geradlinigen Schwingungen bestimmt, Polarisations-Ellipsoid genannt.

5. Näherungsweise Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen in symmetrischen Mitteln.

Setzen wir die allgemeinen Werthe für $L_1, \ldots P_1 \ldots$ ein, indem wir ihnen nach der eingeführten symbolischen Bezeichnung folgende Form geben:

$$L_1\xi = \sum m\left[f(r) + \frac{x'^2}{r}f'(r)\right]\left(e^{x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}} - 1\right),$$

$$P_1\xi = \sum m\frac{y'z'}{r}f'(r)\left(e^{x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}} - 1\right),$$

oder mit Beibehaltung der symbolischen Potenzirung

$$L_1\xi = \sum m\left[f(r) + \frac{x'^2}{r}f'(r)\right]\left[\frac{x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}}{1} + \frac{\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}{1.2} + \ldots\right],$$

$$P_1\xi = \sum m\frac{y'z'}{r}f'(r)\left[\frac{x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}}{1} + \frac{\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}{1.2} + \ldots\right].$$

Bei den symmetrischen Mitteln müssen aber in den Summen die Glieder mit ungeraden Potenzen verschwinden, es ist demnach

$$L_1\xi = \tfrac{1}{2}\sum m\left[f(r) + \frac{x'^2}{r}f'(r)\right]\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2,$$

$$P_1\xi = \tfrac{1}{2}\sum m\frac{y'z'}{r}f'(r)\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2.$$

Bis zu diesem Grade der Annäherung reduciren sich die Differentialgleichungen (2.) der Schwingungsbewegungen auf partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, die in Bezug auf die Differentiationen nach x, y, z, t homogen sind.

Dies ist, wenn wir wieder wie in 4. $U = V = W = 0$ setzen,

$$L_1 = -\tfrac{1}{2}\sum m\left[f(r) + \frac{x'^2}{r}f'(r)\right](x'\mathfrak{u} + y'\mathfrak{v} + z'\mathfrak{w})^2,$$

$$P_1 = -\tfrac{1}{2}\sum m\frac{y'z'}{r}f'(r)(x'\mathfrak{u} + x'\mathfrak{v} + z'\mathfrak{w})^2.$$

4. Schwingungen in ebenen Wellen bei symmetrischen Mitteln.

Wir setzen im Folgenden die willkürlichen Constanten U, V, W gleich Null und schreiben zunächst die Werthe $L_1, \dots P_1 \dots$ von 2. in folgende Form:

$$L_1 = L\,[\cos(\mathfrak{u}x' + \mathfrak{v}y' + \mathfrak{w}z') - 1 + i\sin(\mathfrak{u}x' + \mathfrak{v}y' + \mathfrak{w}z')],$$
$$P_1 = P\,[\cos(\mathfrak{u}x' + \mathfrak{v}y' + \mathfrak{w}z') - 1 + i\sin(\mathfrak{u}x' + \mathfrak{v}y' + \mathfrak{w}z')].$$

Da nun das Mittel symmetrisch sein soll, so werden in den zu summirenden Grössen immer absolut gleiche, aber relativ entgegengesetzte Coefficienten des Imaginären vorkommen und es entsprechen jedem reellen Werthe von s^2 nach den Gleichungen unter 2. reelle Werthe von $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$. Dies ist aber nach den in 3. angenommenen Werthen von A, B und C nur möglich, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ ist, d. h. nur wenn nach 3. die Schwingungen geradlinig polarisirt sind. In den symmetrischen Mitteln sind demnach die beständigen Schwingungen geradlinig polarisirt.

Die Richtung dieser Schwingungen finden wir folgendermassen, wenn die drei Wurzeln der Gleichung für s^2 reell und negativ sind und demnach die σ reell sind. Wir tragen vom Coordinatenanfang aus der Schwingung parallel eine Länge $\frac{1}{\sigma}$ auf und bezeichnen mit x, y, z die Coordinaten des so erhaltenen Punktes. Da nun für unseren Fall $\alpha = \beta = \gamma$ ist, so ist $\frac{\xi}{\eta} = \frac{a}{b} = \frac{A}{B}$, d. h. die ξ, η, ζ sind proportional den cos der Winkel, welche die Schwingungsrichtung mit den Axen bildet. Diesen cos. sind aber nach unserer Construction die x, y, z proportional, sodass $A:B:C = x:y:z$. Mithin lassen sich die Gleichungen (4.) oder (4*), wenn die $L_1, \dots P_1 \dots$ eingeführt werden, durch folgende ersetzen:

$$\begin{aligned} -\sigma^2 x &= L_1 x + R_1 y + Q_1 z,\\ -\sigma^2 y &= R_1 x + M_1 y + P_1 z,\\ -\sigma^2 z &= Q_1 x + P_1 y + N_1 z. \end{aligned} \qquad (7.)$$

Werden diese Gleichungen beziehungsweise mit x, y, z multiplicirt, dann mit Rücksicht darauf, dass $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\sigma^2}$ ist, addirt, so erhält man die Gleichung eines Ellipsoides:

$$L_1 x^2 + M_1 y^2 + N_1 z^2 + 2\,P_1 yz + 2\,Q_1 zx + 2\,R_1 xy + 1 = 0. \qquad (8.)$$

Weil die rechten Seiten von (7.) sind die Hälften der partiellen Derivirten nach x, y, z der Gleichung (8.), welche nach den Lehren der analytischen Geometrie proportional den cos der Winkel sind, welche die Normale zum Ellipsoide an dem Punkte x, y, z mit den Axen einschliesst, und diese Werthe zugleich den x, y, z proportional sind, so liegt der Punkt des Ellipsoides, in dem es von der Schwingungsrichtung geschnitten wird, an einem Endpunkte einer Hauptaxe desselben.

Fortpflanzung von ebenen Wellen geradliniger, gleichgerichteter Schwingungen mit sehr kleinen Amplituden besteht. Die Richtungen dieser Schwingungen können in einem gegebenen symmetrischen Mittel und bei bestimmter Wellenebene nur nach drei bestimmten aufeinander senkrechten Richtungen vor sich gehen. Diese Richtungen sind vorgeschrieben durch die Hauptaxen des Polarisationsellipsoides (8.), so dass einer bestimmten Wellenebene drei verschiedene Gruppen von Oscillationen sich zuordnen. Einer jeden von ihnen kommt eine Geschwindigkeit zu, die proportional ist dem reciproken Werth der Halbaxe von (8.), nach deren Richtung die Schwingung stattfindet.

6. Fortpflanzung der Schwingungen im freien Aether.

Wir können hierbei ausgehen von den Gleichungen der vorigen Nummer für symmetrische Mittel, also ist mit Beibehaltung des symbolischen Ausdrucks:

$$L_1 \xi = \tfrac{1}{2} \sum m \left[f(r) + m \frac{x'^2}{r} f'(r) \right] \left(x' \frac{\partial \xi}{\partial x} + y' \frac{\partial \xi}{\partial y} + z' \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2,$$

$$P_1 \xi = \tfrac{1}{2} \sum m \frac{y'z'}{r} f'(r) \left(x' \frac{\partial \xi}{\partial x} + y' \frac{\partial \xi}{\partial y} + z' \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2.$$

Da ferner im freien Aether die Moleküle keine besondere Anordnung haben, so kann angenommen werden, dass sie auf jede der Coordinatenebenen symmetrisch vertheilt sind. Hiernach werden in den obigen Ausdrücken und in den entsprechenden für M_1, N_1, Q_1, R_1 die Summen, welche ungerade Potenzen der Projectionen von r enthalten, verschwinden und, da die Vertheilung der Moleküle in Bezug auf die drei Coordinatenaxen dieselbe ist, muss sein:

$$\sum m x'^2 f(r) = \sum m y'^2 f(r) = \sum m z'^2 f(r) = \tfrac{1}{3} \sum r'^2 (r), \tag{1.}$$

$$\sum m x'^4 \frac{f'(r)}{r} = \sum m y'^4 \frac{f'(r)}{r} = \sum m z'^4 \frac{f'(r)}{r}, \tag{2.}$$

$$\sum m y'^2 x'^2 \frac{f'(r)}{r} = \sum m z'^2 x'^2 \frac{f'(r)}{r} = \sum m x'^2 y'^2 \frac{f'(r)}{r}. \tag{3.}$$

Eine weitere Vereinfachung in Bezug auf die Werthe der zweiten und dritten Reihe ergiebt sich ferner aus dem Grunde, dass im freien Aether, wie in jedem isotropen Mittel, die Gleichungen der Schwingungsbewegungen dieselben bleiben müssen, welches auch die Richtung der Coordinatenaxen sei.

Drehen wir nun unser Coordinatensystem um die z Axe um den $\angle \vartheta$, so wird nach den allgemeinen Transformationsformeln, wenn die neuen Projectionen von r durch $\bar{x}$, $\bar{y}$ bezeichnet werden,

$$x' = \bar{x} \cos \vartheta + \bar{y} \sin \vartheta,$$

mithin

$$x'^4 = \bar{x}^4 \cos^4 \vartheta + \bar{y}^4 \sin^4 \vartheta + 6 \bar{x}^2 \bar{y}^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + 4 \bar{x}^3 \bar{y} \cos^3 \vartheta \sin \vartheta$$
$$+ 4 \bar{x} \bar{y}^3 \cos \vartheta \sin^3 \vartheta.$$

Darnach ergiebt sich bei Vernachlässigung der Summen ungerader Potenzen und unter Berücksichtigung, dass $\Sigma m \bar{y}^4 \varphi(r) = \Sigma m \bar{x}^4 \varphi(r)$ ist,

$$\begin{aligned}\Sigma m x'^4 \varphi(r) &= (\cos^4 \vartheta + \sin^4 \vartheta)\, \Sigma m \bar{x}^4 \varphi(r) + 6 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta\, \Sigma m \bar{x}^2 \bar{y}^2 \varphi(r), \\ &= (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)^2\, \Sigma m \bar{x}^4 \varphi(r) + 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta\, [3\, \Sigma m \bar{x}^2 \bar{y}^2 \varphi(r) \\ &\quad - \Sigma m \bar{x}^4 \varphi(r)].\end{aligned}$$

Da nun aber $\Sigma m x'^4 \varphi(r) = \Sigma m \bar{x}^4 \varphi(r)$ sein muss, so ist

$$3\, \Sigma m \bar{x}^2 \bar{y}^2 \varphi(r) = \Sigma m \bar{x}^4 \varphi(r)$$

oder auch für unseren Fall

$$3\, \Sigma m x'^2 y'^2 \frac{f'(r)}{r} = \Sigma m x'^4 \frac{f'(r)}{r}.$$

Diese Gleichung und die entsprechenden für die anderen Projectionen charakterisiren demnach ein isotropes Mittel, d. h. ein Mittel von der Art, dass die Gleichungen der Schwingungsbewegung dieselben bleiben, welches auch die Richtung der Axen sei.

Bezeichnen wir nun die Werthe von (1.) mit $2g$ und die von (2.) mit $6h$, also die von (3.) mit $2h$, so reduciren sich für ebene Wellen die Grössen L_1 und P_1 und dem entsprechend die M_1, N_1 etc. auf

$$\begin{aligned}L_1 &= -(g + h)(\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2) - 2h\mathfrak{u}, \\ P_1 &= -2h\mathfrak{v}\mathfrak{w},\end{aligned}$$

und demnach die L_2, P_2... der vorigen Nummer auf:

$$\begin{aligned}L_2 &= g + h(3m^2 + n^2 + p^2), \\ &= g + h(2m^2 + 1), \\ P_2 &= 2hnp.\end{aligned}$$

Die Gleichungen (9.) von 5. werden demnach

$$\begin{aligned}c^2 A &= A(g + h) + 2hm(Am + Bn + Cp), \\ c^2 B &= B(g + h) + 2hn(Am + Bn + Cp), \\ c^2 C &= C(g + h) + 2hp(Am + Bn + Cp).\end{aligned} \qquad (10.)$$

Diese drei Gleichungen geben, nachdem sie beziehungsweise mit m, n, p multiplicirt werden,

$$[c^2 - (g + 3h)][Am + Bn + Cp] = 0. \quad \text{(cf. § 225, 2.)}$$

Dieser Relation kann auf zwei Arten genügt werden.

1) $c^2 = g + 3h$, dann ist nach (10.) $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$, mithin ist die Schwingung geradlinig und zur Wellenebene senkrecht, d. h. es ist Longitudinalschwingung.

2) $Am + Bn + Cp = 0$.

Diese Schwingungen gehen in der Wellenebene vor sich, es sind also Transversalschwingungen und für diese ist dann nach (10.) $c^2 = g + h$. Da aber keine weitere Gleichung zwischen den A, B, C und m, n, p gegeben ist, so bleibt die Richtung der Transversalschwingung im Allgemeinen unbestimmt.

Im freien Aether also und damit überhaupt (§ 225) in jedem isotropen Mittel können zwei Arten von Schwingungen sich fortpflanzen, nämlich transversale von unbestimmter Form und longitudinale.

Nehmen wir nun an, dass das Licht aus longitudinalen Schwingungen besteht, so können wir die Interferenzerscheinungen erklären, da diese nur eine Bewegung in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung in den beiden interferirenden Strahlen zur Erklärung braucht. Die Erscheinungen der Polarisation lassen sich aber nur erklären durch verschiedene Seitlichkeit der Strahlen. Man muss daher überhaupt annehmen, dass nur durch transversale Schwingungen des Aethers Licht hervorgebracht wird, longitudinale Schwingungen in demselben also entweder gar nicht stattfinden oder wenigstens nicht als Licht empfunden werden, so dass sie in den optischen Untersuchungen vernachlässigt werden können.

Die Intensität des Lichtes. (§ 284.)

Die objective Intensität des Lichtes ist direct proportional dem Quadrate der Amplitude und der Lichtmenge indirect proportional dem Quadrate der Schwingungsdauer.

Ein Theil der aufgestellten Behauptung ist allgemein erwiesen in § 272. Die objective Intensität stimmt aber nicht mit unserer Lichtempfindung überein und auch die anderen Methoden, welche wir anwenden zur experimentellen Bestimmung der Lichtintensität geben nicht vollständigen Aufschluss.

Dass die Intensität des Lichtes proportional dem Quadrat der Amplitude ist, ergiebt sich auch wie folgt aus der Doppelbrechung. Der Wechsel in der Helligkeit der beiden Bilder, die man erhält, wenn man einen Lichtstrahl durch einen doppelt brechenden Krystall gehen lässt und diesen dreht, führt auf die Vermuthung, dass die Intensität der ordentlich gebrochenen Strahlen mit dem cos. und die der ausserordentlich gebrochenen mit dem sin. des Winkels, den die Polarisationsebene der einfallenden Strahlen mit dem Hauptschnitt macht, sich ändert. Damit man aber nicht genöthigt ist, von dem Vorzeichen dieser Ausdrücke abzusehen, ist es wahrscheinlicher, dass die Intensität einer geraden Potenz dieser Functionen proportional ist und zwar am einfachsten der zweiten Potenz. (cf. § 381, 2.) Diese Voraussetzung würde darauf führen, dass die Summe der Intensitäten der beiden Strahlen eine constante, von dem Winkel unabhängige Grösse ist. Wenn wir nun von dem Verlust absehen, der durch Absorption des Lichtes im Krystall stattfindet, so ist wirklich die Intensität an der Stelle, wo beide Strahlen zusammenwirken, unmerkbar verschieden von der ohne Krystall. Bezeichnen wir demnach mit χ den Winkel, welchen die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes von der Intensität I mit dem Hauptschnitt des Krystalles macht, so sind $I \cos^2\chi$ und $I \sin^2\chi$ die Intensitäten des ordentlich und des ausserordentlich gebrochenen Lichtes. Seien nun die Schwingungen beider Strahlen gegeben durch:

$$s_1 = r_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

$$s_2 = r_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Durch Zusammensetzung in eine Schwingungsebene erhalten wir

$$S = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

wo dann die Schwingungsrichtung gegeben ist durch

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

also ist

$$\cos \chi = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}, \qquad \sin \chi = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}.$$

Nach dem obigen Gesetz ist

$$I_1 = I \cos^2 \chi, \qquad I_2 = I \sin^2 \chi,$$

also

$$\frac{I_1}{I} = \frac{r_1^2}{r_1^2 + r_2^2}, \qquad \frac{I_2}{I} = \frac{r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}.$$

Das giebt

$$I_1 : I_2 = r_1^2 : r_2^2,$$

was die zu beweisende Behauptung enthält.

Das hier gewonnene Resultat $I = r_1^2 + r_2^2$ sagt weiter, dass die Intensität der aus zwei senkrecht zu einander polarisirten Schwingungen resultirenden Schwingung gleich ist der Summe der Intensitäten der beiden componirenden.

Die beiden hier betrachteten Schwingungen s_1 und s_2 haben dieselben Schwingungsphasen, da nun aber die Aenderung der Phase auf die Lichtintensität ohne Einfluss ist, so wird dieser Satz auch noch gelten, wenn diese Phasen verschieden sind. Da nach § 226 das elliptisch und circularpolarisirte Licht sich immer in zu einander senkrecht polarisirtes Licht zerlegen lässt, so geben die componirenden Schwingungen die Intensität des Lichtes. Dass die Art der Zerlegung, wie man leicht durchführen kann, keinen Unterschied der Intensität giebt, beweist auch die Richtigkeit des Gesetzes.

Erregen zwei linear polarisirte Strahlen von gleicher Amplitude ein Aethertheilchen, so setzen sich die Schwingungen, wenn die Schwingungsrichtungen zusammenfallen in eine zusammen, deren Intensität nach § 226 ist

$$2 r^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{a}{l}\right).$$

Diese Intensität ist $4 r^2$ oder 0, je nachdem $\frac{a}{l} = 0, 1, 2, \ldots$ oder $\frac{a}{l} = \frac{1}{2}$, $3 . \frac{1}{2}$, $5 . \frac{1}{2}, \ldots$ ist. Für dazwischen liegende Werthe der Phasendifferenz schwankt also die Intensität zwischen 0 und $4 r^2$. Dasselbe gilt für zwei gleiche elliptisch oder circularpolarisirte Strahlen.

Dasselbe gilt von den beiden anderen geradlinigen Schwingungen, die sich nach den beiden anderen Wurzeln der kubischen Gleichung S. 261 für s^2 ergeben.

Hieraus folgt der allgemeine Satz: In einem symmetrischen Mittel sind die drei beständigen Schwingungen, welche einer ebenen Welle entsprechen, nach den drei Hauptaxen des Ellipsoides (8.) gerichtet, also auf einander senkrecht.

Cauchy hat dieses Ellipsoid (8.), weil es die Seitlichkeit der geradlinigen Schwingungen bestimmt, Polarisations-Ellipsoid genannt.

5. Näherungsweise Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen in symmetrischen Mitteln.

Setzen wir die allgemeinen Werthe für $L_1, \ldots P_1 \ldots$ ein, indem wir ihnen nach der eingeführten symbolischen Bezeichnung folgende Form geben:

$$L_1\xi = \sum m\left[f(r) + \frac{x'^2}{r}f'(r)\right]\left(e^{x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}} - 1\right),$$

$$P_1\xi = \sum m\frac{y'z'}{r}f'(r)\left(e^{x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}} - 1\right),$$

oder mit Beibehaltung der symbolischen Potenzirung

$$L_1\xi = \sum m\left[f(r) + \frac{x'^2}{r}f'(r)\right]\left[\frac{x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}}{1} + \frac{\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}{1.2} + \ldots\right],$$

$$P_1\xi = \sum m\frac{y'z'}{r}f'(r)\left[\frac{x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}}{1} + \frac{\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2}{1.2} + \ldots\right].$$

Bei den symmetrischen Mitteln müssen aber in den Summen die Glieder mit ungeraden Potenzen verschwinden, es ist demnach

$$L_1\xi = \tfrac{1}{2}\sum m\left[f(r) + \frac{x'^2}{r}f'(r)\right]\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2,$$

$$P_1\xi = \tfrac{1}{2}\sum m\frac{y'z'}{r}f'(r)\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x} + y'\frac{\partial\xi}{\partial y} + z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2.$$

Bis zu diesem Grade der Annäherung reduciren sich die Differentialgleichungen (2.) der Schwingungsbewegungen auf partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, die in Bezug auf die Differentiationen nach x, y, z, t homogen sind.

Dies ist, wenn wir wieder wie in 4. $U = V = W = 0$ setzen,

$$L_1 = -\tfrac{1}{2}\sum m\left[f(r) + \frac{x'^2}{r}f'(r)\right](x'\mathfrak{u} + y'\mathfrak{v} + z'\mathfrak{w})^2,$$

$$P_1 = -\tfrac{1}{2}\sum m\frac{y'z'}{r}f'(r)(x'\mathfrak{u} + x'\mathfrak{v} + z'\mathfrak{w})^2.$$

Nach 3. ist nun, wenn wir diese Gleichungen auf ebene Wellen anwenden,

$$c^2 = \frac{\sigma^2}{\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2}$$

oder wenn wir $S = 0$, also $s = \sigma i$, setzen

$$c^2 = \frac{-s^2}{\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{w}^2} = -s^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{-s^2}{x^2}.$$

Es ist ferner, wenn wir die Bezeichnungen von § 225 einführen

$$m = \frac{\mathfrak{u}}{x}, \qquad n = \frac{\mathfrak{v}}{x}, \qquad p = \frac{\mathfrak{w}}{x},$$

$$L_1 = -\tfrac{1}{2}\sum m\left[f(r) + \frac{x'^2}{r} f'(r)\right](x'm + y'n + z'p)^2 x^2 = -L_2 x^2,$$

$$P_1 = -\tfrac{1}{2}\sum m \frac{y'z'}{r} f'(r)(x'm + y'n + z'p)^2 x^2 \qquad = -P_2 x^2.$$

Diese Werthe nun in die Gleichung für s^2 unter 2. eingesetzt giebt:

$$(c^2 - L_2)(c^2 - M_2)(c^2 - N_2) - P_2^2(c^2 - L_2) - Q_2^2(c^2 - M_2)$$
$$- R_2^2(c^2 - N_2) - 2P_2Q_2R_2 = 0.$$

Da diese Gleichung unabhängig von der Wellenlänge ist, so erhalten wir folgenden Satz: Wenn die Differentialgleichungen der Schwingungsbewegungen auf homogene Gleichungen der zweiten Ordnung zurückgeführt werden können, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in allen Richtungen dieselbe, welches auch die Wellenlänge sei.

Mit den eben eingeführten Bezeichnungen erhalten (4*) die Form:

$$\begin{aligned} c^2A &= L_2A + R_2B + Q_2C, \\ c^2B &= M_2B + P_2C + R_2A, \qquad (9.) \\ c^2C &= N_2C + Q_2A + P_2B. \end{aligned}$$

Bedenken wir dann, dass nach 4. die Grössen A, B, C proportional den cos. der Winkel sind, welche die Richtung der Vibration mit den Coordinatenaxen macht, so leitet man daraus ab

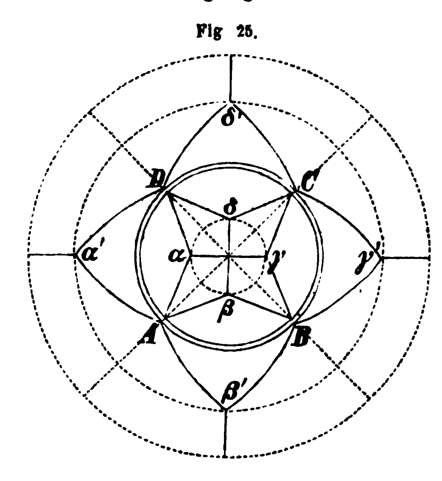
$$c^2 = L_2A^2 + M_2B^2 + N_2C^2 + 2P_2BC + 2Q_2CA + 2R_2AB.$$

Vergleicht man dies mit dem Ellipsoid (8.) in 4., wenn dort die $L_2, \ldots P_2 \ldots$ eingeführt sind, so findet man, dass, da die A, B, C nach 3. sind die cos. der Winkel einer Hauptaxe gegen die Coordinaten, der berechnete Werth c ist das Reciproke dieser Hauptaxe. Es gilt also: Die Vibrationen, welche einer und derselben ebenen Welle entsprechen und nach den Hauptaxen des Ellipsoides (8.) gerichtet sind, besitzen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die im umgekehrten Verhältniss zu der Länge dieser Axen stehen. Diese drei zu einander rechtwinkligen Richtungen sind unabhängig von der Wellenlänge, aber die Coefficienten des Ellipsoides ändern sich im Allgemeinen mit der Richtung der ebenen Welle.

Die Resultate dieser beiden letzten Nummern zusammengestellt heissen demnach: Ein symmetrisches Mittel gestattet eine Bewegung, welche in der

zeichne um M mit dem Halbmesser MC einen Kreisbogen und errichte in D, x_1, x_2 etc. Senkrechte auf MC, so sind die Stücke FG, HK, deren Construction aus der Figur klar ist, die gesuchten y_1, y_2, wie man nach einer einfachen Ueberlegung findet.

Fig 25.



Es sei noch bemerkt, dass die obige Formel von y übereinstimmt mit der allgemeinen Formel für Kegelspiegel, deren Winkel an der Spitze = 1 R ist, denn dafür ist

$$y = \frac{ex}{r - x}.$$

Darnach findet man das Zerrbild des Sternes $A\beta B\gamma C\delta D\alpha$ in Fig. 25, indem man zunächst die Breite des Zerrbildes nach

$$\text{Max. } y = \frac{r}{-\cos 2\alpha}$$

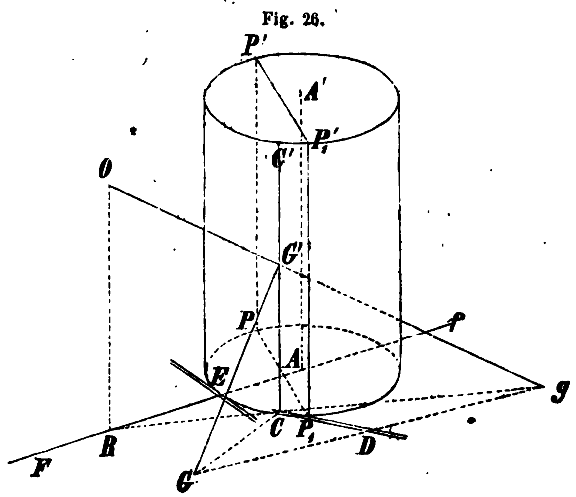
$$= \frac{r}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{5}{4} r$$

berücksichtigt.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, also A, B, C, D sind Punkte des Zerrbildes. Dem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entsprechen die Punkte $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ und darnach der durch dieselben gelegte Kreis dem Kreis im Stern etc.

2. Zerrbild für einen Cylinderspiegel.

Fig. 26.



Gegeben ist ein gerader kreisförmiger Cylinder, dessen Axe Fig. 26 AA' ist. O sei das beobachtende Auge. In der erweiterten Grundebene des Cylinders ist ein Zerrbild so zu zeichnen, dass das Auge O in einer Verticalebene $PP_1P_1'P'$ ein gegebenes Bild sieht.

Sei R die Projection von O auf der Grundebene und G ein leuchtender Punkt in der Grundebene, der von O im Spiegel in der Richtung Og gesehen werde. In G′ werde der Strahl von der Cylinderoberfläche reflectirt. G′ kann nun als ein Punkt eines ebenen Spiegels gedacht werden, welcher mit der durch G′ an den Cylinder gelegten Tangentialebene zusammenfällt. Diese Tangentialebene berührt den Cylinder in CC′ und schneidet die Grundebene in einer Tangente an den Grundkreis in C, d. i. CD. Nach der Theorie der ebenen Spiegel ist dann GD = gD. Da auch klar ist, dass RCg eine Gerade bildet, so folgt ferner, dass Cg das Spiegelbild der Geraden CG ist. Ebenso ist, wenn für einen Punkt F der Geraden von A durch R FE = fe ist, f das Bild von F und die Gerade Ef das Bild von EF ist. Es liegen demnach die Bilder aller Punkte, die zwischen FECG sich befinden, innerhalb fECg.

Zugleich ist hierdurch klar, wie die Projectionsebene des Bildes $PP_1P_1'P'$ für ein gegebenes O bestimmt werden kann. Man zeichne nämlich von O (Fig. 27) aus die beiden Tangentialebenen an den Cylinder, so ist die Ebene durch die beiden Berührungslinien die verlangte Bildebene.

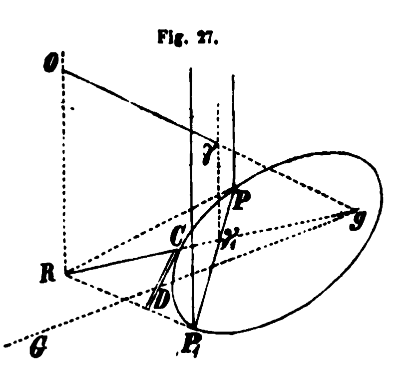


Fig. 27.

Für die Construction des Zerrbildes ist uns nun gegeben ein Bild in der Ebene $PP_1P_1'P'$, also die Punkte γ, und wir suchen die dazugehörigen G. Ziehen wir dann die Gerade $O\gamma$, deren Verlängerung die Grundebene in g schneidet, so wird es zunächst unsere Aufgabe sein, den Punkt g zu finden und dann dazu den Punkt G des Zerrbildes.

g wird wie folgt gefunden. Sei γ_1 die Projection von γ auf PP_1 und $\gamma\gamma_1 = x$, $\gamma_1 g = y$, $OR = a$, $R\gamma_1 = R$ gesetzt, so ist $x : y = a : y + R$, also $y = \frac{R.x}{a - x}$. Da nun zu jedem γ die R und x bekannt sind, so kann hiernach y construirt werden.

G wird nun, wie die Entwickelung am Anfange zeigt, gefunden. An den Schnittpunkt der Linie Rg mit dem Grundkreis, d. i. C, wird eine Tangente an den Kreis gezeichnet, von g eine Senkrechte auf diese Tangente gD gezogen und diese um sich selbst verlängert, also gD = GD, so ist G der gesuchte Punkt.

Allgemeine Sätze über die Lage und Grösse der Bilder bei sphärischen Spiegeln. (§ 293.)

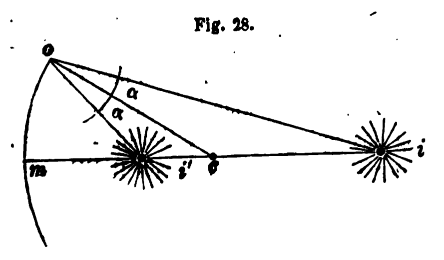


Fig. 28.

Alle Lichtstrahlen, welche von einem Punkte der Hauptaxe ausgehen, schneiden sich nach der Reflexion wiederum in einem Punkte derselben, wenn sie denselben Winkel mit dieser Linie bilden.

Mit Hülfe der im Lehrbuch eingeführten Bezeichnungen (Fig. 28) findet man

$$\mathrm{ic : r = \sin\alpha : \sin\angle mio}, \quad \mathrm{\sin\angle mio = \frac{r\sin\alpha}{ic} = \frac{r\sin\alpha}{d-r}}, \qquad (1.)$$

$$\mathrm{i'c : r = \sin\alpha : \sin\angle mi'o}, \quad \mathrm{i'c = r - b = \frac{r\sin\alpha}{\sin\angle mi'o}}. \qquad (2.)$$

Nun ist $\angle \mathrm{mi'o} = \alpha + \angle \mathrm{mco}$, $\angle \mathrm{mio} = \angle \mathrm{mco} - \alpha$.
Aus (2.) folgt:

$$\mathrm{b = r - \frac{r\sin\alpha}{\sin(\alpha + mco)}},$$

$$\mathrm{= r - \frac{r}{\cos\angle mco + \cos\alpha\sin\angle mco}}.$$

Aus (1.) ergiebt sich durch Division mit $\sin\alpha$:

$$\mathrm{\frac{\sin\angle mio}{\sin\alpha} = \sin\angle mco\cot\alpha - \cos\angle mco = \frac{r}{d-r}},$$

mithin

$$\mathrm{b = r - r\frac{r}{\frac{r}{d-r} + 2\cos\angle mco}},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Wenn nun $\angle \mathrm{mco}$ so klein ist, dass man angenähert $\cos\angle \mathrm{mco} = 1$ setzen kann, giebt diese Formel das allgemeine Gesetz, dass alle Strahlen in einem Punkte zusammentreffen, die von einem Punkte ausgegangen sind. Es ist dann

$$\mathrm{b = r\left(1 - \frac{1}{\frac{r}{d-r} + 2}\right) = \frac{d\,r}{2d - r}}.$$

Im Folgenden soll diese Formel verallgemeinert werden für die Annahme, dass die reflectirende Fläche irgend eine Umdrehungsfläche ist. Es ist klar, dass wir auch für diese Untersuchung nur die Lage in einer durch die Umdrehungsaxe gelegten Ebene zu berücksichtigen haben. In einer solchen Ebene sei, wenn die Umdrehungsaxe mit der x Axe zusammenfällt, die Durchschnittscurve der reflectirenden Fläche gegeben durch $\mathrm{y = f(x)}$. Die Abscisse des gegebenen Punktes i sei a, die des gesuchten i' sei a' und

o habe die Coordinaten x, y. Die Gleichungen des einfallenden und reflectirten Strahles sind dann, wenn η, ξ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$\text{für } oi: \eta - y = A(\xi - x), \text{ wenn } A = \frac{y}{x-a} \text{ ist,}$$

$$\text{für } oi': \eta - y = B(\xi - x), \text{ wenn } B = \frac{y}{x-a'} \text{ ist.}$$

Es ist ferner

$$ii' = a' - a = x - a - y \cot \angle oi'm. \qquad (3.)$$

Nun ist

$$\angle oi'm = \angle mco + \alpha,$$

also

$$\alpha = \angle oi'm - \angle mco.$$

Da ferner $\angle oi'm = \angle mio + 2\alpha$ ist, so erhält man mit Hülfe des eben gefundenen Werthes von α:

$$\angle oi'm = \angle mio + 2(\angle oi'm - \angle mco)$$

oder

$$\angle oi'm = 2\angle mco - \angle mio,$$

also

$$\cot oi'm = \frac{1 + \cot 2\angle mco \cot \angle mio}{\cot \angle mio - \cot 2\angle mco}.$$

Da nun $\cot 2\angle mco = \frac{\cot^2 mco - 1}{2\cot mco}$, $\cot \angle mio = \frac{1}{A}$ und

$$\cot mco = -\frac{dx}{dy} = \text{abgekürzt} - \frac{1}{p}$$

ist, so ist aus (3.):

$$ii' = a' - a = x - a - y\frac{1 - p^2 + 2pA}{2p - (1 - p^2)A}$$

oder durch Einsetzung des obigen Werthes von A:

$$a' - a = \frac{2(x-a)[px - ap - y + p^2y] - 2py^2}{2p(x-a) - (1-p^2)y}. \qquad (4.)$$

Dies für den Kreis angewendet giebt folgende Werthe.

Wenn i der Coordinatenanfang ist, so ist die Kreisgleichung

$$y^2 + (x - [d - r])^2 = r^2$$

und damit

$$\frac{dy}{dx} = p = -\frac{x - (d - r)}{y}.$$

Nach einiger Transformation erhält man dann

$$a' = \frac{2(d-r)[r^2 + (d-r)(x-(d-r))]}{r^2 + 2(d-r)[x-(d-r)]}.$$

Ist speciell in der allgemeinen Formel $A = 0$ oder $a = \infty$, d. h. ist der eintretende Strahl der Rotationsaxe parallel, so ist

$$a' = x - y\frac{1-p^2}{2p}.$$

Die Formel (4.) lässt sich natürlich auch für Planspiegel anwenden; steht nämlich die Ebene des Spiegels senkrecht zur Axe, so ist $p = \infty$, also $a' - a = 2(x - a)$, d. i. das bekannte Gesetz, es ist a' unabhängig von y und die Entfernung des Schnittpunktes der rückwärts verlängerten reflec-

tirten Strahlen mit der Axe, d. i. der Senkrechteu auf den Spiegel vom leuchtenden Punkt, vom Spiegel ist $a' - x = x - a$, also ist das virtuelle Bild ebensoweit hinter dem Spiegel als der leuchtende Punkt vor demselben.

Die Bilder der Hohlspiegel, Brennlinie. (§ 294.)

1. Sphärische Abweichung.

a) Längenabweichung.

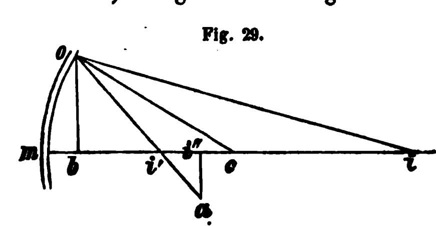


Fig. 29.

Fällt das Bild der reflectirten Randstrahlen nach i' (Fig. 29) und das der reflectirten Centralstrahlen nach i'', so nennt man i'i'' die **Längenabweichung** des Spiegels, deren Grösse berechnet werden soll.

Nach § 293 ist

$$mi' = r\left(1 - \frac{1}{\frac{r}{d-r} + 2\cos\angle mco}\right),$$

wo nun $\angle mco$ den äussersten Werth dieses Winkels bezeichnet und

$$mi'' = \frac{dr}{2d - r}$$

ist, folglich erhält man

$$i'i'' = mi'' - mi' = r\left(\frac{d}{2d-r} - \left[1 - \frac{1}{\frac{r}{d-r} + 2\cos\angle mco}\right]\right),$$

$$= \frac{2r(d-r)^2(1 - \cos\angle mco)}{(2d - r)(2\cos\angle mco\,(d-r) + r)}.$$

b) Seitenabweichung.

Verlängert man den reflectirten Randstrahl bis er die in i'' auf die Axe errichtete Senkrechte schneidet, so heisst das Stück der Senkrechten ai'' von der Axe bis zu diesem Schnittpunkt die **Seitenabweichung** des Spiegels.

Es ist $ai'' : i'i'' = ob : i'b$, da $\triangle ai'i'' \sim \triangle oi'b$, also

$$ai'' = \frac{i'i''.\,ob}{i'b} = \frac{i'i''.\,r.\sin\angle mco}{i'b},$$

$$= \frac{i'i''.\,r\sin\angle mco}{mi' - r + bc}.$$

Wird nun der in a) berechnete Werth eingesetzt, so ergiebt sich:

$$ai'' = \frac{2r(d-r)^2(1 - \cos\angle mco)\sin\angle mco}{(2d - r)(2[d-r]\cos^2\angle mco + r\cos\angle mco + r - d)}.$$

Beide Ausdrücke gehen für einen leuchtenden Punkt, der im Vergleich zu den Dimensionen des Spiegels sehr weit entfernt ist, über in

$$i'i'' = \frac{r}{2} \cdot \frac{1 - \cos \angle \text{ mco}}{\cos \angle \text{ mco}}, \quad ai'' = r \frac{(1 - \cos \angle \text{mco}) \sin \angle \text{mco}}{2 \cos^2 \angle \text{ mco} - 1}.$$

Wenn $\angle$ mco klein ist, so werden auch $i'i''$, ai'' klein, d. h. die Bilder der einzelnen Punkte stellen sich als sehr kleine Kreise, Abweichungskreise, dar, wenn die Oeffnung des Spiegels klein genommen wird.

2. Meridiancurve der Rotationsfläche, welche die von einem bestimmten leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen nach einem Punkt reflectirt.

Das Problem dieser Nummer heisst mathematisch ausgedrückt: Es ist die Curve zu suchen, für welche der Werth von $a' - a$ § 293 (4.) constant ist. Wir setzen diese Constante $2C$ und, da unser Coordinatenanfang noch durch Nichts bestimmt ist, so wählen wir ihn so, dass $a = -C$ ist.

Die Differentialgleichung unserer Aufgabe ist dann nach einer einfachen Transformation

$$p(x^2 - y^2 - C^2) = xy(1 - p^2). \qquad (1.)$$

Setzen wir darin $py = xz$, wo z eine neue Veränderliche ist, so erhält man nach Multiplication mit y:

$$xz(x^2 - y^2 - C^2) = xy^2 - x^3 z^2$$

und daraus

$$y^2 = \frac{zx^2 - C^2 z + z^2 x^2}{1 + z} = zx^2 - C^2 \frac{z}{1 + z},$$

$$2y\,dy = 2xz\,dx + x^2 dz - C^2 d\frac{z}{1 + z}.$$

Da ferner $y\,dy = py\,dx = xz\,dx$ ist, so erhält man

$$\left(x^2 - \frac{C^2}{(1 + z)^2}\right) dz = 0.$$

Dieser Gleichung ist genügt durch Nullsetzung der Factoren.

Der zweite Factor $dz = 0$ giebt $z = C$. Daraus ist dann

$$c = p\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{x}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{x}{y}.$$

Deren Integral ist $y^2 = c(x^2 - A)$, also ist die verlangte Curve ein Kegelschnitt.

Der erste Factor giebt $x = \dfrac{C}{1 + z}$ oder $x + py = C$. Dieser Werth aber ist mit der Gleichung (1.) unvereinbar; denn setzt man den hier gefolgerten Werth von p in (1.) ein, so erhält man

$$y^2 + (x - C)^2 = 0,$$

was unmöglich ist.

3. Katakaustik.

Die Ausdrücke für die Katakaustik ergeben sich als ein specieller Fall der Gleichung der Diakaustik. Wir müsssn nämlich in den Formeln der Diakaustik § 306 überall setzen $n = - n'$. Dadurch erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\eta - y = a(\xi - x), \qquad \eta - y = \alpha(\xi - x),$$

für die einfallenden und zurückgeworfenen Strahlen, wenn die α und a durch folgende Gleichung zusammenhängen:

$$\frac{1 + a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + a^2}} = -\frac{1 + \alpha\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Diese Gleichungen mögen auf einige Beispiele angewendet werden.

a) Parallele Strahlen sollen von einem Kreisspiegel reflectirt werden.

Wenn wir dann in der diesem Beispiele entsprechenden Erörterung der Diakaustik (§ 306, 2.) setzen $n' = - n$, so erhalten wir nach einiger Umformung

$$(r^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \{2\xi - (r^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} (r^{\frac{2}{3}} + 2\eta^{\frac{2}{3}})\} = 0.$$

Der erste Factor dieser Gleichung giebt zwei der Abscissenaxe parallele Gerade $\eta_1 = r$ und $\eta_2 = - r$. Der zweite Factor heisst rational gemacht:

$$27 r^4 \eta^2 = 4.(\eta^2 + 4\xi^2 - r^2)^3.$$

Dies ist die Gleichung einer Epicykloide. Der Grundkreis dieser Epicykloide ist dem zurückstrahlenden concentrisch; der Radius des ersteren ist der Hälfte, der Radius des rollenden Kreises aber dem vierten Theil des Radius dieses zurückwerfenden Kreises gleich.

b) Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, mögen von der concaven Seite eines Kreisspiegels reflectirt werden.

Durch Uebertragung der entsprechenden Aufgabe von § 306, 2. erhalten wir, wenn wir schreiben abgekürzt $b = \frac{x}{y}$:

$$\frac{(1 - ab)^2}{1 + a^2} = \frac{(1 - \alpha b)^2}{1 + \alpha^2}$$

oder

$$(\alpha - a)\{(\alpha + a) + 2b(1 - \alpha a) - b^2(\alpha + a)\} = 0.$$

Da nun $\alpha - a$ nicht gleich Null sein kann, so muss der andere Factor gleich Null gesetzt die gesuchte Brennlinie geben. Dieser giebt

$$\frac{\alpha + a}{1 - \alpha b} = \frac{b + a}{ab - 1}.$$

Werden nun die Werthe für a, α... eingesetzt, so erhält man

$$\frac{\eta y + \xi x - (x^2 + y^2)}{y\xi - x\eta} = \frac{ex - (x^2 + y^2)}{- ey}.$$

Setzen wir dann $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, so giebt diess

$$\eta(e \cos 2\varphi + r \cos \varphi) - \xi(e \sin 2\varphi - r \sin \varphi) + er \sin \varphi = 0.$$

Differenzirt man diese Gleichung nach t, so erhält man

$$\eta\,(2e \sin 2\varphi + r \sin \varphi) + \xi\,(2e \cos 2\varphi - r \cos \varphi) - er \cos \varphi = 0.$$

Zwischen diesen letzteren beiden Gleichungen wäre nun φ zu eliminiren, um die Gleichung der einhüllenden Curve, d. i. der Katakaustik zu finden.

Eine Vereinfachung tritt ein, wenn der strahlende Punkt auf der Peripherie des reflectirenden Kreises liegt. Dann ist $e = r$ und wir können aus den beiden Gleichungen nach einiger Transformation ableiten

$$\xi = \tfrac{2}{3} r \cos \varphi + \tfrac{1}{3} r \cos 2\varphi, \qquad \eta = \tfrac{2}{3} r \sin \varphi + \tfrac{1}{3} r \sin 2\varphi.$$

Nach den Lehren der analytischen Geometrie bedeutet dies eine Epicykloide, in der der Radius des rollenden Kreises der dritte Theil des festen Kreises ist, also eine Cardioide.

Begriff und Gesetze der Brechung. (§ 298.)

1. Andere Form des Brechungsgesetzes.*)

Wir nennen die Summe der Producte der Wege eines Lichtstrahles in den verschiedenen Mitteln mit dem absoluten Brechungsexponenten des betreffenden Mittels die **optische Länge** des Strahles. Seien also $l_1, l_2, l_3, \ldots l_m$ die Weglängen desselben im 1ten, 2ten, $3^{ten}, \ldots m^{ten}$ Mittel und $n_1, n_2, n_3, \ldots n_m$ die entsprechenden absoluten Brechungsexponenten derselben, so ist die optische Länge:

$$\psi = n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 + \ldots n_m l_m.$$

Diese Grösse ist proportional der Zeit (t), welche das Licht braucht, um den Weg zurückzulegen, und gleich dem Weg, den das Licht im leeren Raum in dieser Zeit zurücklegen würde. Dies ergiebt sich wie folgt.

Seien $c_1, c_2, c_3, \ldots c_m$ die Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeiten in den betreffenden Mitteln und c_0 die im leeren Raum, so ist nach der Definition des absoluten Brechungsexponenten

$$n_1 = \frac{c_0}{c_1}, \quad n_2 = \frac{c_0}{c_2}, \quad n_3 = \frac{c_0}{c_3}, \ldots\; n_m = \frac{c_0}{c_m},$$

also

$$\psi = c_0 \left(\frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} + \frac{l_3}{c_3} + \ldots + \frac{l_m}{c_m} \right).$$

Da nun die Parenthese gleich ist der oben genannten Zeit t, so wird

$$\psi = c_0 t,$$

womit obige Behauptung bewiesen ist.

Der definirte Begriff der optischen Länge kann auch benutzt werden, wenn man den Strahl im letzten Mittel rückwärts verlängert denkt bis über die Grenze des Mittels hinaus, etwa bis zu einem Punkte hin, wo ein

*) Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik. Leipzig. S. 238.

potentielles Bild des leuchtenden Punktes sich befindet, dann aber muss man die Entfernung vom Eintritt des Strahles in das letzte Mittel bis zu dem potentiellen Bilde gemessen negativ nehmen.

Mit Hülfe dieser Definition lässt sich das Brechungsgesetz wie folgt ausdrücken:

Die optische Länge des Strahles zwischen einem ihm angehörigen Punkte im ersten und einem im zweiten Mittel ist ein Grenzwerth (Max. oder Min.).

Die Uebereinstimmung dieses Satzes mit dem Gesetze von Snellius ergiebt sich folgendermassen. Die Grenze der beiden Mittel sei eine beliebig gestaltete Fläche von continuirlicher Krümmung. Wir beziehen dieselbe auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so dass dieselbe gegeben ist durch $z = f(x, y)$.

Wenn nun x_1, y_1, z_1 (x_2, y_2, z_2) die Coordinaten eines Punktes des Strahles im ersten (zweiten) Mittel und x, y, z die des Einfallspunktes sind, so ist

$$\psi = n_1 l_1 + n_2 l_2,$$
$$= n_1 \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2} + n_2 \sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+(z_2-z)^2}.$$

Zur Bestimmung des Grenzwerthes von ψ hat man dann folgenden Gleichungen zu genügen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Die Ausführung der hier angegebenen Differenziationen ergiebt die Gleichungen:

$$0 = n_1 \frac{(x-x_1)+(z-z_1)\frac{\partial z}{\partial x}}{l_1} + n_2 \frac{(x-x_2)+(z-z_2)\frac{\partial z}{\partial x}}{l_2},$$
$$0 = n_1 \frac{(y-y_1)+(z-z_1)\frac{\partial z}{\partial y}}{l_1} + n_2 \frac{(y-y_2)+(z-z_2)\frac{\partial z}{\partial y}}{l_2}.$$

Zur Vereinfachung dieser beiden Bedingungen, welche das Brechungsgesetz enthalten sollen, nehmen wir als Coordinatenanfang den Einfallspunkt und als die zAxe das Einfallsloth. Dann ist also

$$x = y = z = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad l_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}, \quad l_2 = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

Die zu erfüllenden zwei Gleichungen bekommen damit die einfache Form

$$0 = n_1 \frac{x_1}{l_1} + n_2 \frac{x_2}{l_2}, \qquad 0 = n_1 \frac{y_1}{l_1} + n_2 \frac{y_2}{l_2}. \qquad (\alpha.)$$

Wenn wir Polarcoordinaten einführen, also

$$x_1 = l_1 \sin \alpha_1 \cos \vartheta_1, \qquad x_2 = l_2 \sin \alpha_2 \cos \vartheta_2,$$
$$y_1 = l_1 \sin \alpha_1 \sin \vartheta_1, \qquad y_2 = l_2 \sin \alpha_2 \sin \vartheta_2,$$
$$z_1 = l_1 \cos \alpha_1, \qquad z_2 = l_2 \cos \alpha_2$$

setzen, so gehen die Gleichungen (α.) über in

$$n_1 \sin \alpha_1 \cos \vartheta_1 = -n_2 \sin \alpha_2 \cos \vartheta_2, \quad n_1 \sin \alpha_1 \sin \vartheta_1 = -n_2 \sin \alpha_2 \sin \vartheta_2. \quad (\beta.)$$

Werden diese Gleichungen quadrirt und addirt, so geben sie

$$n_1^2 \sin^2\alpha_1 = n_2^2 \sin^2\alpha_2 \quad \text{oder} \quad n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2. \qquad (\gamma.)$$

Es kann hier nur das positive Zeichen gelten, da α_1 zwischen 0° und 90°, α_2 zwischen 90° und 180° liegen muss.

Wenn dies in (β.) eingesetzt wird, so erhält man

$$\cos\vartheta_1 = -\cos\vartheta_2, \qquad \sin\vartheta_1 = -\sin\vartheta_2,$$

also

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + 180^0. \qquad (\delta.)$$

Diese Gleichungen (δ.) und (γ.) sind eben die des Brechungsgesetzes von Snellius, denn ϑ_1 und ϑ_2 sind die Winkel der Einfallsebene und der Brechungsebene mit der xz Ebene. Da deren Differenz 180° ist, so fallen dieselben in eine zusammen. α_1 und α_2 sind die Einfalls- und Brechungswinkel.

Diese Form des Brechungsgesetzes sagt zugleich, dass das Licht den Weg von einem Punkt zu einem andern in der kleinsten Zeit zurücklegt, denn nach S. 279 ist eben $\psi = c_0 t$ und es bestimmen also die Grenzwerthe von ψ ein Min. von t, da hier von einem Max. nicht die Rede sein kann. So ist das Gesetz zuerst von Fermat gegeben worden.

Dasselbe Beweisverfahren kann auch in der Katoptrik angewendet werden, um zu zeigen, dass der allgemeine Ausdruck auch für das Reflexionsgesetz passt.

Dieser Satz lässt sich endlich auch für mehrere brechende Mittel erweitern und lautet dann: Wenn ein Lichtstrahl durch eine beliebige Anzahl von brechenden Mitteln hindurchgegangen ist, welche durch Flächen von continuirlicher Krümmung begrenzt sind, so ist sein Weg durch die Bedingung bestimmt, dass die optische Länge des Strahles zwischen einem seiner Punkte im ersten und einem im letzten Mittel ein Grenzwerth (Max. oder Min.) ist.

Sei ψ die optische Länge des Strahles, seien die Gleichungen der aufeinander folgenden brechenden Flächen $z_1 = f_1(x_1 y_1)$, $z_2 = f_2(x_2 y_2)$, … $z_m = f_m(x_m y_m)$ und mögen alle diese Coordinatensysteme so gelegt sein, dass ihre z Axen mit dem Einfallsloth zusammenfallen, so sind die Bedingungen des Grenzwerthes:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_m} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y_m} = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen ist nach dem obigen identisch mit der Bedingung, dass der Strahl an der ersten Fläche nach dem bekannten Brechungsgesetze gebrochen werde; die zweite sagt dasselbe für die zweite Fläche, die m^te^ für die m^te^. Also ist der Weg des Strahles durch die aufgestellte Bedingung genau ebenso bestimmt, wie durch das Brechungsgesetz.

2. Homocentrische Lichtstrahlen.

Wenn Lichtstrahlen, welche von einem Punkte ausgehen, d. h. homocentrische Strahlen durch beliebig viele Flächen von continuirlicher Krümmung gebrochen werden, so stehen sie nach der letzten Brechung senkrecht auf jeder krummen Fläche, für deren sämmtliche Punkte die optische Länge einen constanten Werth hat.

Bedenkt man, dass gleiche optische Längen in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, so kann dann eine jede oben bezeichnete Fläche als eine Wellenfläche betrachtet werden, d. h. als eine solche Fläche, welche durch alle diejenigen Punkte geht, in denen die gleiche Phase der Aetherschwingung stattfindet.

Die brechenden Flächen sind gegeben wie unter 1. durch die Gleichungen $z_1 = f_1(x_1 y_1)$, $z_2 = f_2(x_2 y_2)$, ... $z_m = f_m(x_m y_m)$ und die letzte Fläche, für die ψ constant $= C$ sein soll, werde bezogen auf das Coordinatensystem der letzten brechenden Fläche und heisse dann $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$. Die Coordinaten eines der Strahlen seien in den aufeinander folgenden brechenden Flächen $x_1, y_1;\ x_2, y_2; \dots x_m, y_m;\ \xi, \eta$.

Betrachten wir nun einen zweiten Strahl, der dem ersten sehr nahe ist, und bezeichnen die Coordinaten der Punkte, in denen dieser die aufeinanderfolgenden Flächen trifft, mit

$$x_1 + \Delta x_1,\ y_1 + \Delta y_1;\ x_2 + \Delta x_2,\ y_2 + \Delta y_2; \dots\ x_m + \Delta x_m,\ y_m + \Delta y_m;$$
$$\xi + \Delta\xi,\ \eta + \Delta\eta \text{ und } \zeta + \Delta\zeta = \zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\Delta\xi + \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\Delta\eta.$$

Wenn die optische Länge des ersten Strahles ψ ist, so werde die des benachbarten mit $\psi + \Delta\psi$ bezeichnet. Es ist dann

$$\psi + \Delta\psi = \psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_m}\Delta x_m + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)\Delta\xi$$
$$+ \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y_2}\Delta y_2 + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial y_m}\Delta y_m + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)\Delta\eta.$$

Da nun die Fläche $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ so sein soll, dass die optischen Längen bis zu ihr einander gleich und zwar gleich der Constanten C sein sollen, so muss sein

$$\Delta\psi = 0,$$

da ferner nach dem Brechungsgesetz aus 1.:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial\psi}{\partial x_m} = \frac{\partial\psi}{\partial y_1} = \frac{\partial\psi}{\partial y_2} = \dots \frac{\partial\psi}{\partial y_m} = 0$$

ist, so muss

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)\Delta\xi + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)\Delta\eta = 0$$

sein. Da nun $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ von einander unabhängig sind, so kann dieser Gleichung allgemein nur genügt werden durch

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} = 0. \qquad (\alpha.)$$

Es ist aber nach der vorigen Nummer $\psi = n_1 l_1 + n_2 l_2 + \dots n_m l_m$, wo nur l_m abhängig ist von ξ, η, ζ. Also ist

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = n_m \frac{\partial l_m}{\partial \xi} = n_m \frac{\xi - x_m}{l_m},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = n_m \frac{\partial l_m}{\partial \eta} = n_m \frac{\eta - y_m}{l_m},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = n_m \frac{\partial l_m}{\partial \zeta} = n_m \frac{\zeta - z_m}{l_m}.$$

Damit gehen die Gleichungen (α.) über in:

$$\begin{aligned} (\xi - x_m) + (\zeta - z_m)\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} &= 0, \\ (\eta - y_m) + (\zeta - z_m)\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned} \qquad (\alpha^*)$$

Diese Gleichungen sagen nach den Lehren der analytischen Geometrie, dass ξ, η, ζ der Fusspunkt einer von x_m, y_m, z_m auf die Fläche $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ gefällten Normale ist; diese Fläche aber ist bestimmt durch $\psi = C$.

Brechung des Lichtes durch Prismen. (§ 300.)

1. Brechung mit Hülfe des in § 298 erörterten Brechungsgesetzes.*)

Wir beziehen unsere Untersuchung auf zwei Coordinatensysteme mit gemeinschaftlichem Anfangspunkt, bei denen je eine Coordinatenebene mit einer brechenden Fläche des Prismas zusammenfällt und je eine Axe auf der brechenden Kante liegt. Die erste brechende Ebene sei die yzEbene, die zweite die $\eta\zeta$Ebene und die brechende Kante die z- und ζAxe. Ein Lichtstrahl geht aus von dem Punkte a, b, c, treffe das Prisma in einem Punkte 0, y, z, verlasse dasselbe im Punkte 0, η, ζ, und α, β, γ sei ein Punkt des abgelenkten Lichtstrahles. Es seien ferner mit l_0, l_1, l_2 die Längen des Strahles vor dem Prisma, im Prisma und ausserhalb des Prismas, mit φ der brechende Winkel und mit n der Brechungsexponent des Materials des Prismas bezeichnet. Dann ist, wenn unter ψ die optische Länge verstanden wird:

$$\begin{aligned} l_0 &= \sqrt{a^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2}, \\ l_1 &= \sqrt{y^2 - 2y\eta\cos\varphi + \eta^2 + (z - \zeta)^2}, \\ l_2 &= \sqrt{\alpha^2 + (\beta - \eta)^2 + (\gamma - \zeta)^2}, \\ \psi &= l_0 + n l_1 + l_2. \end{aligned} \qquad (\alpha.)$$

Die allgemeinen Transformationsformeln der analytischen Geometrie geben:

$$\begin{aligned} \xi &= -x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ \eta &= -x\sin\varphi - y\cos\varphi, \\ \zeta &= z. \end{aligned} \qquad (\beta.)$$

*) Helmholtz, a. a. O. S. 249.

Nach § 298, 1. muss gelten:

$$
\left.
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{y-b}{l_0} + n\,\frac{y-\eta\cos\varphi}{l_1},\\
0 &= \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \frac{\eta-\beta}{l_2} + n\,\frac{\eta-y\cos\varphi}{l_1},\\
0 &= \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{z-c}{l_0} + n\,\frac{z-\zeta}{l_1},\\
0 &= \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\zeta-\gamma}{l_2} + n\,\frac{\zeta-z}{l_1}.
\end{aligned}
\right\}\quad (\gamma.)
$$

2. Minimalablenkung.

Zur Bestimmung des cos des Winkels ω, den der eintretende Strahl mit dem austretenden macht, müssen wir die cos. der Winkel dieser Richtungen mit den Coordinatenaxen bestimmen.

Dieser Winkel ω ist der Nebenwinkel von A, wir müssen deshalb für die Minimalablenkung die Bedingungen suchen, unter denen ω ein Max. wird.

Der eintretende Strahl bildet mit den x, y, z Axen Winkel, deren cos. sind beziehungsweise

$$\frac{a}{l_0},\quad \frac{b-y}{l_0},\quad \frac{c-z}{l_0},$$

mit den Axen der ξ, η, ζ aber nach den oben citirten Transformationsformeln:

$$-\frac{a\cos\varphi+(b-y)\sin\varphi}{l_0},\quad \frac{(b-y)\cos\varphi-a\sin\varphi}{l_0},\quad \frac{c-\zeta}{l_0}.$$

Mit diesen Axen bildet der austretende Strahl Winkel, deren cos. sind

$$\frac{a}{l_2},\quad \frac{\beta-\eta}{l_2},\quad \frac{\gamma-\zeta}{l_2}.$$

Dann ist nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$\cos\omega = -\frac{[a\cos\varphi+(b-y)\sin\varphi]}{l_0}.\frac{a}{l_2} + \frac{[(b-y)\cos\varphi-a\sin\varphi]}{l_0}.\frac{(\beta-\eta)}{l_2} + \frac{(c-z)}{l_0}.\frac{(\gamma-\zeta)}{l_2}.$$

Es ist nun zu untersuchen, unter welchen Bedingungen mit Berücksichtigung von (α.) und (γ.) dieser Werth zu einem Min. und damit ω zu einem Max. wird.

Wenn in (α.) die Werthe aus (γ.) eingesetzt werden, um a zu eliminiren, erhält man

$$l_0^2 = a^2 + n^2\,\frac{l_0^2\,(y-\eta\cos\varphi)^2}{l_1^2} + n^2\frac{l_0^2\,(z-\zeta)^2}{l_1^2}$$

oder

$$\frac{a}{l_0} = \sqrt{1 - n^2\,\frac{(y-\eta\cos\varphi)^2+(z-\zeta)^2}{l_1^2}}$$

oder mit Berücksichtigung des Werthes von l_1^2 aus (α.):

$$\frac{a}{l_0} = \sqrt{\frac{n^2\eta^2\sin^2\varphi}{l_1^2} - (n^2-1)}.$$

Ganz ebenso findet man, um α eliminiren zu können,

$$\frac{\alpha}{l_2} = \sqrt{1 - n^2\frac{(\eta - y\cos\varphi)^2 + (z-\zeta)^2}{l_1^2}},$$

$$= \sqrt{\frac{n^2y^2\sin^2\varphi}{l_1^2} - (n^2-1)}.$$

Beide Wurzeln müssen reell sein, denn wäre die Grösse unter dem Wurzelzeichen negativ, so müsste an jeder der betreffenden Flächen, wie man durch eine einfache Rechnung folgern kann, totale Reflexion stattfinden.

Für die Quotienten $\frac{b-y}{l_0}$, $\frac{c-z}{l_0}$, $\frac{\beta-\eta}{l_2}$, $\frac{\gamma-\zeta}{l_2}$ nehmen wir aus (γ.) die betreffenden Ausdrücke $n\frac{y-\eta\cos\varphi}{l_1}$, $n\frac{z-\zeta}{l_1}$, $n\frac{\eta-y\cos\varphi}{l_1}$, $n\frac{\zeta-z}{l_1}$.
Durch Einsetzung dieser Grössen erhält man endlich $\cos\omega$ als Function von y, η, z, ζ und zwar nach einer einfachen Transformation, indem man $(z-\zeta)^2$ durch (α.) eliminirt und setzt $(z-\zeta)^2 = l_1^2 - y^2 + 2y\eta\cos\varphi - \eta^2$,

$$\begin{aligned}\cos\omega = &- n^2 + n^2\frac{\sin^2\varphi}{l_1^2}(y^2 - y\eta\cos\varphi + \eta^2)\\ &- n\frac{\sin\varphi}{l_1^2}(y - \eta\cos\varphi)\sqrt{n^2y^2\sin^2\varphi - (n^2-1)\,l_1^2}\\ &- n\frac{\sin\varphi}{l_1^2}(\eta - y\cos\varphi)\sqrt{n^2\eta^2\sin^2\varphi - (n^2-1)\,l_1^2}\\ &- \frac{\cos\varphi}{l_1^2}\sqrt{n^2y^2\sin^2\varphi - (n^2-1)l_1^2}\,\sqrt{n^2\eta^2\sin^2\varphi - (n^2-1)l_1^2}.\end{aligned}$$

Wenn wir nun $\cos\omega$ zu einem Min. machen wollen, so können wir y und x constant setzen, also $\cos\omega$ als Function von η und ζ betrachten. Es muss demnach gesetzt werden

$$\frac{\partial\cos\omega}{\partial\eta} = 0 \quad\text{und}\quad \frac{\partial\cos\omega}{\partial\zeta} = 0.$$

Da nun ζ in dem Ausdruck von $\cos\omega$ nur in l_1 vorkommt, so ist

$$\frac{\partial\cos\omega}{\partial\zeta} = \frac{\partial\cos\omega}{\partial(l_1^2)}\frac{\partial l_1^2}{\partial\zeta} = \frac{\partial\cos\omega}{\partial(l_1^2)}\cdot(\zeta - z) = 0,$$

Dieser Gleichung wird genügt durch $\zeta = z$, wenn nicht gleichzeitig $\frac{\partial\cos\omega}{\partial(l_1^2)} = \infty$ wird, dadurch, dass ein darin vorkommender Nenner den Werth Null erhält. In den Nenner von $\frac{\partial\cos\omega}{\partial(l_1^2)}$ kann aber nur vorkommen erstens l_1 und zweitens eine der in $\cos\omega$ enthaltenen Quadratwurzeln. l_1 kann nicht $= 0$ werden, so lange, wie es hier angenommen ist, y und η nicht verschwinden, wenn ihr Werth auch sehr klein werden kann. Von den Wurzeln kann auch keine verschwinden, denn sonst wären wir, wie

oben schon angegeben ist, an der Grenze der totalen Reflexion, was nicht vorausgesetzt wird.

Die erste Bedingung für ein Min. cos ω ist also $\zeta = z$ und dann nach $(\gamma.)$ $\zeta = \gamma$ und $z = c$, d. h. der eintretende und gebrochene Strahl liegen in einer Ebene senkrecht zur z Axe oder zur brechenden Kante.

Wenn wir ferner statt der Ordinaten η und y deren Verhältniss $q = \frac{\eta}{y}$ bestimmen wollen und bedenken, dass der Ausdruck von cos ω gegen η und y symmetrisch ist, so ist cos ω derselbe Werth, wenn wir überall schreiben $\eta = qy$ oder $y = \frac{1}{q}\eta$, das eine Mal ist aber cos ω eine Function von q, das andere Mal dieselbe Function von $\frac{1}{q}$, d. h. es ist

$$\cos\omega = \varphi(q) = \varphi\left(\frac{1}{q}\right),$$

mithin ist

$$\frac{\partial \cos\omega}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi(q)}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi\left(\frac{1}{q}\right)}{\partial\left(\frac{1}{q}\right)}\frac{\partial\frac{1}{q}}{\partial\eta},$$

das ist

$$\frac{\partial \cos\omega}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi(q)}{\partial q}\frac{1}{y} = -\frac{\partial\varphi\left(\frac{1}{q}\right)}{\partial\left(\frac{1}{q}\right)}\frac{y}{\eta^2}$$

und letzteres

$$= -\frac{\partial\varphi(q)}{\partial\left(\frac{1}{q}\right)}\frac{1}{yq^2}.$$

Da nun für $q = 1$ oder $y = \eta$

$$\frac{\partial\varphi(q)}{\partial q}\frac{1}{y} = -\frac{\partial\varphi\left(\frac{1}{q}\right)}{\partial\left(\frac{1}{q}\right)}\frac{1}{y}$$

ist, so wird jedenfalls dieser Gleichung genügt, wenn

$$\frac{\partial\varphi(q)}{\partial q} = \frac{\partial\varphi\left(\frac{1}{q}\right)}{\partial\left(\frac{1}{q}\right)} = 0$$

ist, dann aber ist auch

$$\frac{\partial\cos\omega}{\partial\eta} = 0.$$

Die zweite Bedingung für Min. cos ω ist demnach $y = \eta$, wodurch nun bewiesen ist, dass cos ω und damit ω einen Grenzwerth erhält, wenn der Lichtstrahl symmetrisch durch das Prisma geht.

Dass der hier gefundene Grenzwerth für ω ein Max. ist, kann man durch Untersuchung des zweiten Differentialquotienten finden oder einfacher durch Ausführung eines Beispieles. Man setze z. B. $\varphi = 90^0$ und dann $\eta = yr$, wo $r < 1$ ist.

3. Subjectives Bild eines schmalen Gegenstandes.

Nehmen wir unter Beibehaltung der Bezeichnung in den vorigen Nummern der Einfachheit wegen den Coordinatenanfang so, dass $c = 0$ ist, und bezeichnen mit x', y', z' die laufenden Coordinaten der einfallenden Strahlen, welche von dem Punkte $a, b, 0$ ausgehen, so sind deren Gleichungen:

$$y' - b = \frac{y-b}{z} z', \qquad x' - a = \frac{a}{-z} z'.$$

Die gebrochenen Strahlen mögen auf dasselbe Coordinatensystem bezogen werden und x', y', z' seien deren laufende Coordinaten. Da dieselben durch den Punkt gehen, dessen Coordinaten $0, y, z$ sind, so erhalten deren Gleichungen die Form:

$$y' - y = \alpha(z' - z); \qquad x' = \beta(z' - z).$$

Ferner ist hier

$$l_0^2 = a^2 + (b-y)^2 + z^2, \quad l_1^2 = x'^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2, \quad \psi = l_0 + n l_1.$$

Die Gleichungen des Brechungsgesetzes sind

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 = \frac{z}{l_0} - n\frac{z'-z}{l_1}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 = \frac{y-b}{l_0} - n\frac{y'-y}{l_1}.$$

Diese letzteren beiden Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung von α und β. Sie geben nach Einsetzung der Werthe von l_0 und l_1:

$$\frac{z}{\sqrt{a^2+(b-y)^2+z^2}} = n\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2+1}},$$

$$\frac{y-b}{\sqrt{a^2+(b-y)^2+z^2}} = n\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2+1}}.$$

Daraus findet man

$$\alpha = \frac{y-b}{z}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{n^2a^2 + (n^2-1)\left[(l-y)^2+z^2\right]}}{z}.$$

Bezeichnen wir nun durch φ den Neigungswinkel der gebrochenen Strahlen gegen die yzEbene, so ist

$$\sin\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}} = \frac{y-b}{n\sqrt{a^2+(b-y)^2+z^2}}.$$

Dieser Werth und damit auch φ wird, wenn a, b, y unverändert bleiben, um so kleiner, je grösser z ist, es wird also die Fläche der austretenden Strahlen die Brechungsfläche in einer Geraden schneiden und ihre concave Seite gegen die yzEbene zukehren. Denken wir uns nun umgekehrt statt der gebrochenen Strahlen und der einfallenden die einfallenden und gebrochenen und statt des leuchtenden Punktes ein Auge, so wird dieses die

Strahlen, welche die gekrümmte Oberfläche bilden, sehen, als ob sie von einer Geraden ausgegangen wären. Man sieht also als eine gerade Linie cd (Fig. 30) eine Curve von der Form ab; wenn aber umgekehrt beobachtet wird eine Gerade a'b', so muss sie erscheinen als eine Curve c'd'.

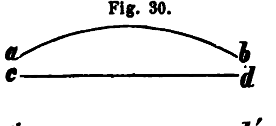


Fig. 30.

Was nun von einer einmaligen Brechung gilt, muss sich wiederholen bei einer abermaligen Brechung, wodurch bewiesen ist, dass durch ein Prisma betrachtet alle geraden Linien parallel der brechenden Kante gekrümmt erscheinen, so dass ihre concave Seite der brechenden Kante zugekehrt ist, also werden die vom Hauptschnitte entfernteren Punkte weiter abgelenkt.

4. Ableitung der Formeln für die Verschiebungen.*)

Ein Körper, der sich im Innern eines durchsichtigen Mediums befindet, erfährt durch Brechung eine scheinbare Verschiebung in verticaler und horizontaler Richtung. Um Formeln für diese Verschiebungen zu erhalten, gehen wir aus von der Gleichung der hier in Betracht kommenden Diakaustik aus § 306, 3. Die dort aufgestellte Gleichung vereinfachen wir für unseren Fall dadurch, dass wir statt der absoluten Brechungsexponenten n und n' einführen n für $\frac{n}{n'}$ und geben damit der dort aufgestellten Gleichung die Form:

$$\left(\frac{\xi}{h:\sqrt{n^2-1}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{h:n}\right)^{\frac{2}{3}}-1=0=f(\xi,\eta). \qquad (1.)$$

Man bedenke nun, dass, wenn ein Winkel β gegeben ist, den ein von dem leuchtenden Punkt ausgehender Strahl mit dem Einfallsloth bildet, und r der dazugehörige Brechungswinkel ist, zunächst gilt:

$$\sin r = n \sin \beta, \qquad (2.)$$

dann, dass wir den leuchtenden Punkt dahin versetzen, wo die Linie, welche durch den $\angle$ r bestimmt ist, die Diakaustik berührt. Wenn wir also den verschobenen Ort des leuchtenden Punktes finden wollen, müssen wir den Punkt suchen, wo die durch r bestimmte Richtung die Diakaustik berührt.

Die hier anzustellende Rechnung geschieht folgendermassen.

$y-\eta=\cot r\,(x-\xi)$ ist die Gleichung unseres Lichtstrahles, wenn x, y die laufenden Coordinaten und ξ, η die Coordinaten des Berührungspunktes bedeuten. Dann muss sein

*) Bauer, Ueber den scheinbaren Ort eines in einem dichten Medium befindlichen, sowie eines durch eine sogenannte planparallele Platte betrachteten Lichtpunktes. Pogg. Ann. 153. — Daselbst befindet sich auch eine Geschichte dieses Problems.

$$\cot r = \frac{d\eta}{d\xi} = -\left[\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi} : \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right],$$
$$= -\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

oder

$$\cot^3 r = -\frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{\xi}{\eta}. \tag{3.}$$

Diese drei Gleichungen (1.), (2.), (3.) reichen dann hin zur Berechnung der ξ, η (im Lehrbuch y, x) und der dort aufgestellten speciellen Fälle. Wir erhalten nämlich:

$$\xi = \frac{h}{n}\,[1-(n^2-1)\,tg^2\beta]^{\frac{3}{2}},$$
$$\eta = h\,(n^2-1)\,tg^3\beta.$$

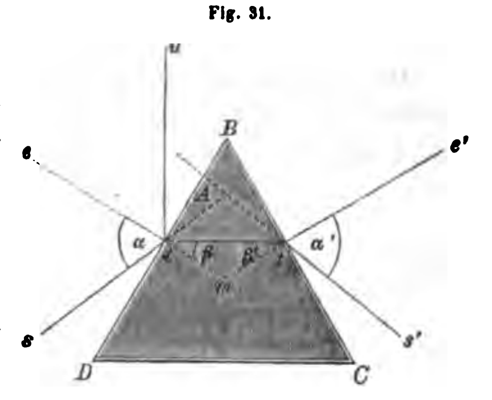
Bestimmung des Brechungsexponenten. (§ 301.)

Bestimmung des Brechungsexponenten bei beliebigem Einfallswinkel α.

Wir gehen aus von den Gleichungen § 300, 1., 2. des Lehrbuchs und benutzen die Bezeichnungen der daselbst gezeichneten Fig. 162 (Fig. 31). Bedeutet also B den Brechungswinkel, A die Ablenkung, α und α' den Eintritts- und Austrittswinkel, β und β' den Brechungswinkel und den Einfallswinkel im Prisma. Verbindet man dann die beiden Gleichungen

$$\sin\alpha = n\sin\beta,$$
$$\sin\alpha' = n\sin\beta'$$

Fig. 31.



sowohl durch Addition als durch Subtraction, so ergiebt sich durch Anwendung der Formeln für die Summe und die Differenz zweier Sinus

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha') = n\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\beta')\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\beta'),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha') = n\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\beta')\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\beta').$$

Die Division dieser Gleichungen giebt, wenn wir die cot. entfernen:

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')\tan\tfrac{1}{2}(\beta-\beta') = \tan\tfrac{1}{2}(\beta+\beta')\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha').$$

Nun ist aber

$$\alpha+\alpha' = A+B, \qquad \alpha-\alpha' = 2\alpha-(A+B),$$
$$\beta-\beta' = 2\beta-A, \qquad \beta+\beta' = A.$$

Die Einsetzung dieser Werthe giebt

$$\tan\frac{A+B}{2}\tan\left(\beta-\frac{A}{2}\right) = \tan\frac{A}{2}\tan\left(\alpha-\frac{A+B}{2}\right).$$

Ist nun A, B, α beobachtet, so kann man hieraus β berechnen und findet endlich

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Ausser der Minimalablenkung ist noch geeignet zur Bestimmung des Brechungsexponenten die Ablenkung, welche wir erhalten, wenn wir das Prisma so aufstellen, dass von den durch das Prisma durchtretenden Strahlen nur diejenigen beobachtet werden, welche senkrecht zu der letzten Fläche austreten, wenn wir also etwa ein Prisma so vor ein Rohr stellen, dass die Axe senkrecht zur letzten Prismenfläche steht, und dann durch das Rohr und Prisma nach einer Lichtquelle sehen und die Ablenkung messen. Dann ist

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad B = \alpha - A, \quad \alpha = B + A, \quad \beta = A$$

und

$$n = \frac{\sin (B + A)}{\sin A}.$$

Brechung des Lichtes durch Linsen. (§ 303.)

1. Verallgemeinerung der aufgestellten Formeln.*)

Wir führen zunächst die absoluten Brechungsexponenten ein. Wenn wir den des ersten Mittels mit n_1, den des zweiten mit n_2 bezeichnen, so ist nach § 301 $\frac{n_2}{n_1} = n$ und die aufgestellte Formel geht damit in folgende über

$$\frac{n_2}{u} + \frac{n_1}{d} = \frac{n_2 - n_1}{r}.$$

Daraus folgt die Formel der Katoptrik (41) § 294, wenn wir $n_2 = -n_1$ setzen und statt u die dort gebrauchte Bezeichnung b einführen:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{r} \text{ für Convexspiegel und}$$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \text{ für Concavspiegel,}$$

da bei diesen b und r negativ zu nehmen sind.

Für die folgende Untersuchung führen wir eine Grösse F ein, welche die Brennweite genannt wird, und geben derselben den Index 1, 2, um dadurch anzudeuten, für welches Mittel diese Grösse genommen ist. Die Definition von F_2 ist $F_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r$, d. i. die Entfernung des Vereinigungspunktes (Brennpunktes) im zweiten Mittel von der trennenden Fläche aller der im ersten Mittel parallel laufenden Strahlen, also wird $u = F_2$, wenn $d = \infty$ ist.

---

*) Gauss, Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1841. — Helmholtz a. a. O.

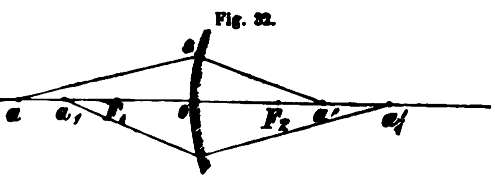
Die Brennweite F_1 ist dann die Entfernung des Punktes, nach dem alle parallelen Strahlen aus dem zweiten Mittel in das erste gebrochen werden. F_1 ist also $= d$, wenn wir setzen $u = \infty$, folglich

$$F_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe von F_1 und F_2 wird der Zusammenhang von u und d folgender:

$$\frac{F_2}{u} + \frac{F_1}{d} = 1.$$

Diese Formel ist insofern noch speciell, als die Entfernungen u, d, F_2, F_1 bezogen sind auf den Punkt o, den optischen Mittelpunkt, d. h. auf einen Punkt, der leuchtender Punkt und zugleich Bildpunkt ist. Es soll nun im Folgenden die obige Formel verallgemeinert werden, indem diese Entfernungen bezogen werden auf irgend zwei conjugirte Vereinigungspunkte, d. h. auf solche Punkte, von denen der eine der Bildpunkt des anderen ist. Seien a_1 und a_1' (Fig. 32) zwei solche Punkte. Bezeichnen wir dazu noch



$$a_1o = d_1, \quad ao = d, \quad a_1'o = u_1, \quad a'o = u,$$
$$F_2o = F_2, \quad F_1o = F_1,$$
$$aa_1 = h_1, \quad a'a_1' = -h_2, \quad a_1F_1 = -H_1, \quad a_1'F_2 = -H_2,$$

so dass also der Zusammenhang zwischen h_1, h_2, H_1 und H_2 zu suchen ist.

Die Wahl der Vorzeichen erklärt sich leicht durch Vergleichung der gegenseitigen Lage an der Figur.

Wir erhalten nun mit Hülfe der obigen speciellen Formeln und einfacher geometrischer Betrachtungen folgende Gleichungen:

$$1) \quad \frac{F_1}{d_1} + \frac{F_2}{u_1} = 1,$$
$$2) \quad \frac{F_1}{d} + \frac{F_2}{u} = 1,$$
$$3) \quad d - d_1 = h_1,$$
$$4) \quad u - u_1 = h_2,$$
$$5) \quad F_1 - d_1 = H_1,$$
$$6) \quad F_2 - u_1 = H_2.$$

Aus diesen 6 Gleichungen sind zu eliminiren d_1, d, u_1, u, F_1, F_2. Dazu setze man d und u aus 3) und 4) in 2) ein. Dies giebt nach einer einfachen Transformation

$$F_1(h_2 + u_1) + F_2(h_1 + d_1) = (h_2 + u_1)(h_1 + d_1).$$

Zieht man davon 1) ab, nachdem es transformirt ist in $F_1u_1 + F_2d_1 = u_1d_1$, so erhält man

$$F_1h_2 + F_2h_1 = h_2h_1 + h_2d_1 + h_1u_1$$

oder

$$(F_1 - d_1)h_2 + (F_2 - u_1)h_1 = h_1h_2,$$

woraus mit 5) und 6) die verlangte Relation sich ergiebt, nämlich

$$\frac{H_1}{h_1} + \frac{H_2}{h_2} = 1,$$

d. i. wieder dieselbe einfache Formel.

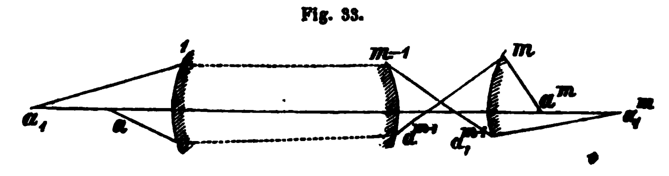
Diese Gleichung wird unbrauchbar, wenn a_1 mit F_1 zusammenfällt, denn dann ist a_1' im Unendlichen, also $a'a_1' = -h_2 = -\infty$ und nach 6., da $u_1 = \infty$ ist, auch H_2 unendlich. Man findet aber die entsprechende Gleichung aus $\frac{F_2}{u} + \frac{F_1}{d} = 1$ oder $d = \frac{u.F_1}{u - F_2}$ oder, wenn F_1 davon subtrahirt wird, $d - F_1 = \frac{F_1 F_2}{u - F_2}$. Setzen wir nun $d - F_1 = l_1$ und $u - F_2 = l_2$, wobei l_1 die Entfernung des leuchtenden Punktes vom ersten Brennpunkte aus nach vorn gerechnet, l_2 die Entfernung seines Bildes vom zweiten Brennpunkte nach hinten sein würde, so erhalten wir die einfachste Form in der sich das Gesetz für die Lage der Bilder darstellen lässt $l_1 l_2 = F_1 F_2$.

2. Brechung in Systemen von Kugelflächen.

Vorn heisst in Bezug auf ein centrirtes System brechender Kugelflächen die Seite, von der das Licht herkommt, hinten die, wo es hingeht. Die brechende Fläche, welche das Licht zuerst trifft, ist die erste, das Medium, welches vor der ersten brechenden Fläche gelegen ist, das erste, das zwischen der ersten und zweiten gelegene das zweite, das hinter der letzten gelegene das letzte. Giebt es demnach m brechende Flächen, so haben wir $m + 1$ brechende Medien. Es sei n_1 der absolute Brechungsexponent des ersten, n_2 der des zweiten, n_{m+1} der des letzten brechenden Mittels. Die Radien der brechenden Flächen sind positiv (negativ), wenn deren Convexität nach vorn (hinten) sieht. Es wird immer von einem Bilde eines Punktes in einem Mittel gesprochen, auch wenn das Bild nicht zu Stande kommt, sondern erst durch Verlängerung der Strahlen über die Grenzen des Mittels hinaus entstehen würde.

Wir betrachten nur solche Strahlen, welche von einem Punkte ausgehen und wieder in einem Punkte vereinigt werden.

Fig. 33.



Es soll für diese bewiesen werden, dass die verallgemeinerte Gleichung der vorigen Nummer gilt für beliebig viele brechende Flächen. In der Fig. 33 seien mit $1, \ldots. m-1, m$ die Durchschnitte der brechenden Flächen mit der Papierebene bezeichnet, mit a_1 und a_1^m zwei conjugirte

Punkte, mit a der leuchtende Punkt und mit a^m dessen Bild. Analog der vorigen Bezeichnung ist $a a_1 = h_1$, $a^m a_1^m = h_{m+1}$, H_1 der Abstand des ersten Hauptbrennpunktes von a_1, H_2 der Abstand des zweiten Hauptbrennpunktes von a_1^m, so ist zu beweisen die Gleichung

$$\frac{H_1}{h_1} + \frac{H_2}{h_{m+1}} = 1.$$

Der Beweis dieses Satzes werde mit Hülfe der Methode von m — 1 zu m geführt.

Es entwerfe das System der (m — 1) ersten Flächen von dem Punkte $a(a_1)$ das Bild a^{m-1} (a_1^{m-1}) und die m^{te} Fläche wiederum von diesen Punkten die Bilder a^m (a_1^m). Die Entfernung a_1^{m-1} a^{m-1} ist dann dem vorigen analog mit h_m zu bezeichnen. Wenn nun mit L_1 (L_2) die Entfernungen der Hauptbrennpunkte des Systems der m — 1 Flächen von a_1 (a_1^{m-1}) bezeichnen, wobei, wie auch unten weiter, diese Entfernungen von a_1 (a_1^{m-1}) in der Richtung positiv gerechnet werden, in welcher das brechende Medium, dem die betreffenden Strahlenbüschel angehören, von den betreffenden Flächen oder Systemen liegt, so gelte

$$\frac{L_1}{h_1} + \frac{L_2}{h_m} = 1. \qquad (1.)$$

Wenn die Entfernungen der Brennpunkte der m^{ten} Fläche von a_1^{m-1} (a_1^m) bezeichnet werden mit M_1 (M_2), so ist

$$-\frac{M_1}{h_m} + \frac{M_2}{h_{m+1}} = 1. \qquad (2.)$$

Wird nun die Gleichung (1.) mit L_2 und (2.) mit M_1 dividirt und werden diese so erhaltenen Resultate addirt, so ergiebt sich nach einiger Transformation

$$\frac{M_1 L_1}{M_1 + L_2} \cdot \frac{1}{h_1} + \frac{M_2 L_2}{M_1 + L_2} \cdot \frac{1}{h_{m+1}} = 1.$$

Setzen wir hierin h_1 $(h_{m+1}) = \infty$, so muss werden h_{m+1} $(h_1) = H_2$ (H_1). Dies giebt

$$H_2 = \frac{M_2 L_2}{M_1 + L_2}, \qquad H_1 = \frac{M_1 L_1}{M_1 + L_2},$$

womit die obige Gleichung übergeht in die zu beweisende Formel

$$\frac{H_1}{h_1} + \frac{H_2}{h_{m+1}} = 1.$$

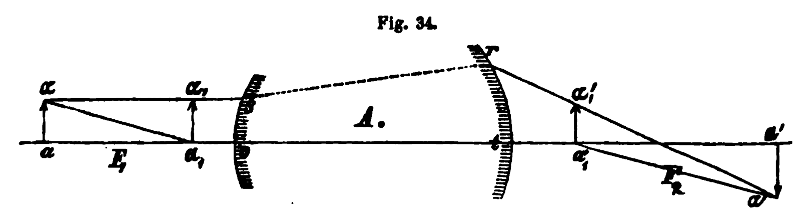
3. Die optischen Cardinalpunkte.

Die Definitionen des § 303 können bei einer genaueren Betrachtung centrirter brechender Kugelflächen nicht ausreichen. Wir benutzen deswegen die in § 335 definirten optischen Cardinalpunkte.

Es soll zunächst bewiesen werden, dass in jedem System centrirter brechender Kugelflächen es zwei und nur zwei Hauptpunkte und damit auch zwei und nur zwei Hauptebenen giebt.

Bezeichne A (Fig. 34) das gegebene optische System, dessen Brennpunkte F_1 und F_2 seien, $a\alpha$ sei ein zur Axe senkrechter leuchtender Gegenstand. Wenn nun dieser Gegenstand längs der Axe so verschoben wird, dass er immer sich selbst parallel bleibt, so bewegt sich der Punkt α in der zur Axe parallelen Linie αs; der Lichtstrahl αs wird also stets dem Punkte α angehören, welches auch die Entfernung ao sein möge. Alle Lichtstrahlen parallel der Axe werden nun durch das System so gebrochen, dass sie zuletzt durch F_2 gehen, das Bild von α liegt demnach bei jeder Entfernung ao auf der Linie $r\alpha'$ Das Bild des Punktes a muss bei der Bewegung immer auf der Geraden ao bleiben. Das Bild des auf aa_1 senkrechten Gegenstandes, welches nach § 304 auch senkrecht auf aa_1 sein muss, ist also immer zwischen $r\alpha'$ und ta' gelegen. Da nun nach den Gleichungen der vorigen Nummer F_2a' immer verschiedene Werthe hat für verschiedene aF_1 und diese Werthe alle möglichen Grössen von $+\infty$ bis $-\infty$ annehmen können, da ferner in diesen verschiedenen Lagen von a' die Bilder stets von einander der Grösse und Lage nach verschieden sind, wobei man zu bedenken hat, dass die Bilder zwischen $\alpha' F_2 a'$ als negativ zu nehmen sind, so kann es nur eine einzige Lage von $a\alpha$ und damit von $a'\alpha'$ geben, wo Bild und Gegenstand einander gleich sind. An der Figur seien dann $a_1\alpha_1$ und $a_1'\alpha_1'$ die Durchschnitte der Hauptebenen mit der Figurebene.

Fig. 34.



In § 304, 2., 3. wird angegeben, wie die Knotenpunkte gefunden werden, wenn die Hauptpunkte gegeben sind, und da dies durch eine Gleichung des ersten Grades geschieht, so ist damit zugleich bewiesen, dass es nur zwei Knotenpunkte und Knotenebenen giebt.

Ausser den in § 335 genannten Cardinalpunkten hat Töpler*) noch zwei Paare von Cardinalpunkten eingeführt. Den angeführten Hauptpunkten, die nun positiv genannt werden, entsprechen zwei negative Hauptpunkte und Hauptebenen von der Beschaffenheit, dass von dem leuchtenden Gegenstand in der einen negativen Hauptebene in der anderen ein dem Gegenstand gleiches aber verkehrtes Bild entworfen wird. Die beiden anderen neuen Punkte heissen negative Knotenpunkte. Ein Strahl, welcher durch den ersten negativen Knotenpunkt geht, wird so gebrochen, dass er durch den zweiten geht, aber dem eintretenden Strahl antiparallel ist, also mit der Axe einen Winkel bildet, welcher der Supplementwinkel des Winkels ist, den der eintretende mit der Axe bildet.

*) Pogg. Ann. CXLII. Bemerkungen über die Anzahl der Fundamentalpunkte eines beliebigen Systems von centrirten, brechenden Kugelflächen.

Dass diese genannten Cardinalpunkte auch nur je zweimal existiren folgt aus dem Späteren ebenso wie für die positiven Knotenpunkte.

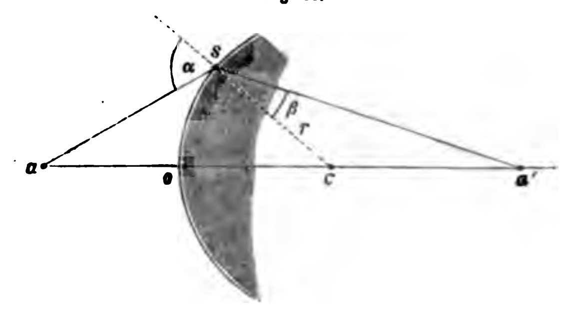
4. Die brechende Fläche ist irgend eine Rotationsfläche.

Wir benutzen die Bezeichnungen § 293, 1. $y = f(x)$ ist die Gleichung der um die x Axe rotirenden Linie. Die Gleichung der einfallenden und gebrochenen Strahlen seien nach der Fig. 166 des Lehrbuchs zu § 303 (Fig. 35):

$$\text{für as:}\quad \eta - y = A(\xi - x),\ \text{wenn } A = \frac{y}{x - a}\ \text{ist,}$$

$$\text{für a's:}\quad \eta - y = B(\xi - x),\ \text{wenn } B = \frac{y}{x - a'}\ \text{ist.}$$

Fig. 35.



Unsere Aufgabe ist nun zunächst $aa' = a' - a$ zu bestimmen. Es ist, wenn wir den Coordinatenanfang nach a verlegen,

$$aa' = a' = x + y \cot \angle sa'a.$$

Nun ist aber

$$\angle sa'a = \angle sca - \beta,$$

also

$$\cot \angle sa'a = \frac{1 + \operatorname{tg} \angle sca \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \angle sca - \operatorname{tg} \beta},$$

oder, da $\operatorname{tg} \angle sca = \frac{dx}{dy} =$ abgekürzt $\frac{1}{p}$ ist,

$$\cot \angle sa'a = \frac{p + \operatorname{tg} \beta}{1 - p \operatorname{tg} \beta}.$$

Ferner ist

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \qquad \alpha = \angle sac + \angle sca,$$

also

$$n \sin \beta = \sin (\angle sac + \angle sca),$$
$$= \sin \angle sac \cos \angle sca + \cos \angle sac \sin \angle sca.$$

Die Werthe der in diesem Ausdrucke vorkommenden sin. und cos. von $\angle sac$ erhält man aus der Gleichung der einfallenden Strahlen. Darnach erhält man, wenn $\varrho^2 = x^2 + y^2$ ist:

$$\operatorname{tag} \angle \operatorname{sac} = A = \frac{y}{x},$$

$$\sin \angle \operatorname{sac} = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} = \frac{y}{\varrho},$$

$$\cos \angle \operatorname{sac} = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} = \frac{x}{\varrho}.$$

Die Werthe der Functionen des $\angle$ sca sind:

$$\operatorname{tag} \angle \operatorname{sca} = \frac{1}{p}, \qquad \sin \angle \operatorname{sca} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}, \qquad \cos \angle \operatorname{sca} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Dies in die Gleichung für $n \sin \beta$ eingesetzt giebt:

$$n \sin \beta = \frac{py + x}{\varrho \sqrt{1 + p^2}},$$

$$n \cos \beta = \frac{\nu}{\varrho \sqrt{1 + p^2}},$$

wo $\nu = \sqrt{n^2 \varrho^2 (1 + p^2) - (x + py)^2}$ ist,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{py + x}{\nu}.$$

Wird dieser Werth endlich in den oben gefundenen Ausdruck für a' eingesetzt, so ergiebt sich als die gesuchte Formel:

$$a' = x + y \frac{p\nu + py + x}{\nu - (py + x) \cdot p} = (x + py) \frac{\nu + y - px}{\nu - (py + x) p}.$$

Diese allgemeine Formel muss die speciellen für den Kreis enthalten. Es ist nämlich dann, um diese Probe anzustellen,

$$a' = d + u$$

und die Kreisgleichung

$$(d + r - x)^2 + y^2 = r^2,$$

also

$$p = \frac{d + r - x}{y}, \qquad 1 + p^2 = \frac{r^2}{y^2}, \qquad x + py = d + r.$$

Die Benutzung dieser Gleichungen giebt dann

$$a' = d + u = (d + r) \left(1 + \frac{r^2}{y\nu - (d + r)(d + r - x)}\right).$$

Wenn nun y klein ist, so dass man dessen 4[te] und höheren Potenzen vernachlässigen kann, so ist

$$d + r - x = \sqrt{r^2 - y^2} = r - \frac{1}{2} \frac{y^2}{r},$$

also

$$x = d + \frac{1}{2} \frac{y^2}{r}$$

und nach einiger Transformation

$$\nu y = nrd + \frac{(d + r)(n^2 r - d - r)}{2\, nrd} y^2,$$

folglich ist dann, wenn auch wieder höhere Potenzen von y vernachlässigt werden,

$$d + u = (d + r)\left[\frac{(n-1)d}{nd-(d+r)} - \frac{(d+r)[(n-1)r+d]y^2}{[nd-(d+r)]^2 . 2nrd}\right].$$

Dies giebt dann selbstverständlich, wenn das Glied mit y^2 weggelassen wird, die Formel (42) des Lehrbuchs. Die Erörterung des vollständigen Ausdrucks befindet sich § 306, 4.

5. Aplanatische Flächen.

Zwei Mittel sind durch eine aplanatische Fläche getrennt, wenn die von einem bestimmten leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkt durch Brechung vereinigt werden. Da jedenfalls eine solche Fläche eine Rotationsfläche ist, so handelt es sich um die Auffindung der Meridiancurve.

Die Differentialgleichung unserer gesuchten Curve ergiebt sich analog der entsprechenden Aufgabe von § 294, 2. aus der Gleichung in 4.:

$$a' = (x + py)\frac{\nu + y - px}{\nu - (py + x)p},$$

indem wir a' constant gleich c setzen.

Wir erhalten daraus, wenn wir zur Abkürzung $x + py = P$ einführen,

$$P[p(x - c) - y] = \nu(P - c).$$

Wird in diese Gleichung der Werth von ν aus 4. eingesetzt und dann durch $1 + p^2$ dividirt, so wird sie

$$P^2[(x - c)^2 + y^2] = n^2(x^2 + y^2)(P - c)^2.$$

Die Quadratwurzel auf beiden Seiten, nachdem mit dx^2 multiplicirt worden ist, gezogen giebt

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = n\frac{(x - c)dx + ydy}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}}.$$

Das Integral dieser Gleichung heisst

$$\sqrt{x^2 + y^2} = n\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + C.$$

Die verlangte Curve ist also vom 4ten Grade.

Man erhält das sehr einfache geometrische Gesetz derselben, wenn man aus a (Fig. 35, S. 295) mit der willkürlichen Constanten C als Radius einen Kreisbogen beschreibt, der as in d schneidet. Dann nämlich ist

$$ds = \sqrt{x^2 + y^2} - C, \qquad sa' = \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

wodurch unsere Gleichung sich umformt in

$$ds : sa' = n : 1,$$

Für $C = 0$ wird die Curve ein Kreis

$$x^2 + y^2 = n^2[(x - c)^2 + y^2],$$

dessen Halbmesser

$$R = \frac{nc}{n^2 - 1}$$

und dessen Mittelpunkt um nR von a entfernt ist.

Ist umgekehrt der Kreis gegeben, so findet man die Entfernung des Punktes a aus nR und den Ort a' aus $as : sa' = n : 1$. (Vergl. § 306, 4.)

Für parallel einfallende Strahlen finden wir die Meridiancurve folgendermassen. Wir verlegen den Coordinatenanfang nach a′, indem wir statt x setzen c — x′ und dann c = ∞ nehmen. Die Gleichung der Curve wird

$$\sqrt{(c-x')^2+y^2}=n\sqrt{x'^2+y^2}+C.$$

Diese Gleichung giebt entwickelt, wenn die Glieder, in deren Nenner c steht, als unendlich klein vernachlässigt werden,

$$(c-C)-x'=n\sqrt{x'^2+y^2}.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes. Bestimmt man nun von a′ nach a zu einen Punkt O so, dass $Oa' = c - C$, und zeichnet von s die Senkrechte nach aa′, welche aa′ in e schneidet, so ist $Oe = c - C - x'$. Da $a's = \sqrt{x'^2+y^2}$ ist, so reducirt sich die Gleichung unseres Kegelschnittes auf

$$Oe = n\,.\,a's.$$

Es ist mithin a′ der Brennpunkt des Kegelschnittes und die Senkrechte auf aa′ durch O die Directrix.

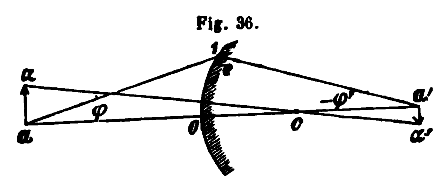
Ist nun $n \gtrless 1$, d. h. ist das zweite Mittel optisch $\begin{matrix}\text{dichter}\\ \text{dünner}\end{matrix}$ als das erste, so ist der Kegelschnitt eine $\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}$. Der Fall $n = 1$ bleibt ausgeschlossen, denn dann giebt es keine Brechung.

Die Bilder der Convex- oder Sammellinsen. (§ 304.)

1. Das Bild ist dem Gegenstand ähnlich.*)

Das Bild von einem Gegenstande, dessen leuchtende Fläche senkrecht steht gegen die Axe des optischen Systems, und von dem nur solche Lichtstrahlen ausgehen, die nahe senkrecht auf den brechenden Kugelflächen stehen, also mit der Axe nur sehr kleine Winkel einschliessen, ist dem Gegenstande ähnlich und steht auch senkrecht auf der Axe.

Fig. 36.



Sei 1 in Fig. 36 der Durchschnitt der brechenden Kugelfläche mit der Papierebene und aα der des senkrecht zur Axe aa′ stehenden leuchtenden Gegenstandes, ferner α ein seitlich neben der Axe liegender leuchtender Punkt, c der Mittelpunkt der brechenden Fläche. Den Bildpunkt α′ des Punktes α vom leuchtenden Gegenstande beziehen wir auf zwei rechtwinklige Coordinaten durch c, so dass y den Abstand des Punktes von aa′ und x den des Fusspunktes der Senkrechten von α′ auf aa′ von c angiebt. Die Linie αc

*) Gauss; Helmholtz, a. a. O. § 9.

ist eine Axe der brechenden Kugelfläche, mithin liegt α' auf der Linie αc und es ist, wenn αc und $\alpha' c$ mit ε und ε' bezeichnet werden nach § 303:

$$\frac{F_2}{\varepsilon' + r} + \frac{F_1}{\varepsilon - r} = 1.$$

Ist wie § 303 $ac = d + r$, so ist, wenn $\angle ac\alpha = \varphi$ ist,

$$\varepsilon' = \frac{x}{\cos\varphi}, \qquad \varepsilon = \frac{d + r}{\cos\varphi},$$

mithin

$$\frac{F_2}{x + r\cos\varphi} + \frac{F_1}{d + r(1 - \cos\varphi)} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

oder, da φ sehr klein ist,

$$\frac{F_2}{x + r} + \frac{F_1}{d} = 1.$$

Weil aber a und a' conjugirte Punkte sind, so ist nach § 303:

$$\frac{F_2}{u} + \frac{F_1}{d} = 1.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$x + r = u = ca' + r \quad \text{oder} \quad x = ca'$$

ist, d. h. die Bilder der Punkte, welche in einer durch a gegen die Axe senkrecht gelegten Ebene liegen, befinden sich also auch annähernd in einer gegen die Axe senkrechten Ebene, welche durch das Bild von a gelegt ist. Hat man demnach a' das Bild von a gesucht und durch a' eine gegen die Axe senkrechte Ebene gelegt, so findet man die Orte der Bilder aller einzelnen Punkte des leuchtenden Gegenstandes, indem man durch den betreffenden Punkt des Objects und den Mittelpunkt der brechenden Kugelfläche eine gerade Linie legt; wo diese die durch a' gelegte Ebene schneidet, ist der Ort des Bildes.

Daraus folgt mit Hülfe bekannter geometrischer Sätze, dass das Bild dem Objecte geometrisch ähnlich ist.

Man kann ferner leicht daraus folgern das Verhältniss der Lineardimension des Objects zu der entsprechenden des Bildes. Sei z. B. $a\alpha = \gamma$ eine solche Dimension des Objectes und $a'\alpha' = \beta$ die entsprechende des Bildes, die negativ zn nehmen ist, da sie an der entgegengesetzten Seite der Axe liegt, so ist

$$-\frac{\gamma}{\beta} = \frac{d + r}{u - r}.$$

Daraus erhält man, wenn man mit Hülfe der ersten Formel § 303, 1 r eliminirt

$$-\frac{\gamma}{\beta} = \frac{n_2 d}{n_1 u}. \ (*)$$

Aus den Gleichungen des §, 303 1.)

$$\frac{F_2}{u} + \frac{F_1}{d} = 1, \quad F_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r, \quad F_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r \ \text{also} \ \frac{F_1}{F_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

findet man dann

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{F_1 - d}{F_1} = \frac{F_2}{F_2 - u}.$$

Der letztere Ausdruck lässt sich auch, wenn die Entfernungen auf die Hauptpunkte als conjugirte Punkte bezogen werden, allgemein auf mehrere centrirte brechende Kugelflächen übertragen. Seien Fig. 34 S. 294 $a\alpha = \gamma$, $a'\alpha' = -\beta$, so ist, wenn $a'_1 a' = u_2$ und $aa_1 = d_1$, als die Entfernungen der a und a' von den conjugirten Punkten a_1 und a'_1 gesetzt wird und ebenso $a'_1 F_2 = F_2$, $a_1 F_1 = F_1$,

$$\frac{a'_1 \alpha_1}{-\beta} = \frac{a'_1 F_2}{F_2 a'} = \frac{F_2}{u_2 - F_2} \text{ oder } -\frac{\gamma}{\beta} = \frac{F_2}{u_2 - F_2} = \frac{d_1 - F_1}{F_1},$$

da die letzte allgemeine Gleichung § 303 2, wenn in dieselbe unsere Bezeichnung eingeführt wird, giebt

$$\frac{F_2}{u_2} + \frac{F_1}{d_1} = 1.$$

Untersuchung des Bildes einer Geraden, welche schief gegen die Hauptaxe steht.

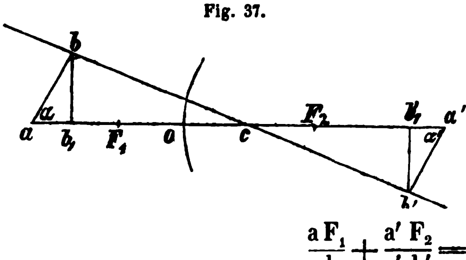


Fig. 37.

Seien Figur 37 $ab = \gamma$ das Object, $a'b' = \beta$ das Bild und ab_1, $a'b'_1$ die Projectionen dieser Linien auf die Hauptaxe. Da nun sowohl a und a' als auch b_1 und b'_1 conjugirte Punkte sind, so ist nach §303, 1.

$$\frac{aF_1}{ab_1} + \frac{a'F_2}{a'b'_1} = 1.$$

Ferner ist nach den oben gefundenen Formeln

$$-\frac{bb_1}{b'b'_1} = \frac{d_1 - F_1}{F_1} = \frac{b_1 F_1}{oF_1},$$

oder, da $b_1 F_1 = aF_1 - ab_1$ ist,

$$-\frac{bb_1}{b'b'_1} = \frac{aF_1 - ab_1}{oF_1}.$$

Hieraus findet man mit Hülfe der obigen Gleichung

$$\frac{bb_1}{ab_1} = \text{tag}\ \alpha = -\frac{(aF_1 - ab_1)\, b'b'_1}{oF_1 \cdot ab_1} = \frac{a'F_2 \cdot b'b'_1}{oF_1 \cdot a'b_1},$$

mithin

$$\frac{b'b'_1}{a'b'_1} = \frac{oF_1}{a'F_2}\ \text{tag}\ \alpha = \text{tag}\ \alpha'.$$

Betrachtet man $b'b'_1$ als Ordinaten von Punkten b' des Bildes von den entsprechenden Punkten des Objectes und $a'b'_1$ als die entsprechenden Abscissen, so ist die obige Gleichung die einer Geraden, so lange α constant ist, d. h. so lange das Object eine Gerade ist; zugleich ist der Winkel α' durch die obige Gleichung gefunden.

Die Betrachtung der Bilder von gekrümmten Gegenständen findet sich § 358.

Beziehung zwischen den Object- und Bildgrössen und den Divergenzwinkeln zweier einfallender und gebrochener Strahlen.

Wir wollen nach der Figur 36 die Winkel φ und φ' bestimmen, welche einer der von a ausgehenden Strahlen ae vor und nach der Brechung mit der Axe bildet und diese Winkel positiv rechnen, wenn der Strahl sich in Richtung der als positiv gerechneten Bilder von der Axe entfernt. Da es sich hier nur um Strahlen handelt, die nahe der Axe einfallen, so können wir oe als senkrechte Gerade zur Axe betrachten, es ist dann

$$oe = d \operatorname{tag} \varphi = -u \operatorname{tag} \varphi'.$$

Nun ist aber nach (*)

$$\frac{u}{d} = -\frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\beta}{\gamma};$$

also

$$n_1 \gamma \operatorname{tag} \varphi = n_2 \beta \operatorname{tag} \varphi'.$$

2. Verhältniss der zu den Haupt- und Knotenpunkten gehörigen Brennweiten.

Unter den zu den Hauptpunkten (Knotenpunkten) gehörigen Brennweiten mögen die Entfernungen der Brennpunkte von diesen Punkten verstanden werden. Nach der Fig. 34 zu § 303, 3.) sind a_1 und a_1' die Hauptpunkte, mithin $a_1 F_1 = F_1$ und $a_1' F_2 = F_2$ die Hauptbrennweiten in Bezug auf die Hauptpunkte und entsprechend den früheren Bezeichnungen, wenn wir die Gegenstands- und Bildweite auf die Hauptpunkte beziehen und wie in 1.) zum Unterschiede der früher mit u und d bezeichneten Grössen setzen $a a_1 = d_1$, $a_1' a_2 = u_2$, ferner sei analog der Bezeichnung von 1.) $a\alpha = \gamma = a_1' \alpha_1'$, $a' \alpha' = -\beta$, dann ist nach der vorigen Nummer

$$-\frac{\gamma}{\beta} = \frac{F_2}{u_2 - F_2} = \frac{d_1 - F_1}{F_1}. \qquad \text{(a)}$$

Setzen wir dann dem § 303 1) entsprechend $d_1 - F_1 = l_1$ und $u_2 - F_2 = l_2$, so ist

$$-\frac{\gamma}{\beta} = \frac{F_2}{l_2} = \frac{l_1}{F_1} \text{ also } l_1 l_2 = F_1 F_2,$$

womit das Gesetz § 303, 1) auch für ein System brechender Kugelflächen verallgemeinert ist.

Bezeichnen wir nun die Grösse eines in der ersten Hauptebene enthaltenen Gegenstandes γ_1 und die Reihe der Bilder, welche bei den einzelnen Brechungen in dem System gebildet werden γ_2, γ_3 ... und endlich γ_{m+1} das in der zweiten Hauptebene nach der letzten Brechung entworfene, so dass also nach der Definition der Hauptebenen $\gamma_1 = \gamma_{m+1}$ ist. Nennen wir ferner ψ_1 den Winkel $\alpha\, a_1\, a$ (Fig. 34), den der Strahl mit der Axe bildet im ersten Mittel und dem entsprechend diese Winkel im zweiten, dritten ... letzten Mittel ψ_2, ψ_3 ... ψ_{m+1}, also $\angle \alpha' a_1' a' = \psi_{m+1}$, so ist nach 1.)

$$n_1 \gamma_1 \operatorname{tag} \psi_1 = n_2 \gamma_2 \operatorname{tag} \psi_2$$
$$n_2 \gamma_2 \operatorname{tag} \psi_2 = n_3 \gamma_3 \operatorname{tag} \psi_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Mithin

$$n_1 \gamma_1 \operatorname{tag} \psi_1 = n_{m+1} \gamma_{m+1} \operatorname{tag} \psi_{m+1}. \qquad \text{(b.)}$$

Für die Hauptpunkte ist aber $\gamma_1 = \gamma_{m+1}$, folglich muss sein

$$n_1 \operatorname{tag} \psi_1 = n_{m+1} \operatorname{tag} \psi_{m+1}.$$

Da ferner nach unseren Bezeichnungen gilt

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha = \gamma = d_1 \operatorname{tag} \psi_1 \\ a'\alpha' = \beta = -u_2 \operatorname{tag} \psi_{m+1}, \end{array}\right.$$

so ist

$$\frac{n_1 \gamma}{d_1} = -\frac{n_{m+1} \beta}{u_2}.$$

Dies giebt mit Berücksichtigung von

$$\frac{F_1}{d_1} + \frac{F_2}{u_2} = 1$$

$$\frac{n_1 \gamma}{d_1 - F_1} = -\frac{n_{m+1} \beta}{F_2} \text{ oder } -\frac{\gamma}{\beta} = \frac{n_{m+1}}{n_1} \cdot \frac{d_1 - F_1}{F_2}.$$

Dann ist nach (a.)

$$\frac{n_1}{n_{m+1}} = \frac{F_1}{F_2},$$

d. h. die zu den Hauptpunkten gehörigen Hauptbrennweiten eines optischen Systemes verhalten sich wie die zugehörigen Brechungsverhältnisse des ersten und letzten Mittels.

Um das entsprechende Verhältniss der zu den Knotenpunkten gehörigen Hauptbrennweiten zu finden, geben wir aus von der Gleichung (b.).

Wenn wir in diese die Bedingung der Knotenpunkte einführen, d. h. $\psi_1 = \psi_{m+1}$ und nun mit γ die Dimensionen von Gegenstand und Bild in den Knotenpunkten bezeichnen, so wird diese

$$n_1 \gamma_1 = n_{m+1} \gamma_{m+1} \quad \text{oder} \quad \gamma_1 : \gamma_{m+1} = n_{m+1} : n_1$$

d. h. die Lineardimensionen zweier zusammengehöriger in den Knotenebenen liegender Bilder verhalten sich umgekehrt wie die Brechungsverhältnisse des ersten und letzten Mittels.

Nach der Figur 34 ist klar, dass sich die Grössen der Bilder desselben Gegenstandes γ_1 verhalten, wie deren Abstände von dem zweiten Hauptbrennpunkte F_2. Bezeichnen wir demnach die Entfernung des zweiten Knotenpunktes K_2 vom Brennpunkte F_2 mit K_2, so ist, wenn γ_{m+1} wie vorhin die Grösse des Bildes im Knotenpunkte bezeichnet, da γ_1 die Grösse desselben im Hauptpunkte ist,

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_{m+1}} = \frac{F_2}{K_2},$$

oder nach dem eben aufgestellten Verhältnisse

$$\frac{n_{m+1}}{n_1} = \frac{F_2}{K_2},$$

mithin ist

$$K_2 = \frac{n_1}{n_{m+1}} F_2, \text{ d. i. aber } F_1.$$

Die Entfernung des zweiten Knotenpunktes von dem zweiten Brennpunkte ist demnach gleich der Entfernung des ersten Brennpunktes vom ersten Hauptpunkte.

Der Abstand der zweiten Haupt- und Knotenebene von einander ist demnach

$$H_2 K_2 = F_2 - K_2,$$
$$= F_2 - F_1.$$

Da nun die erste Knotenebene das Bild der zweiten ist, so ist nach derselben Bezeichnung

$$H_1 K_1 = K_1 - F_1.$$

Weil $H_1 K_1$ und $H_2 K_2$ entsprechende Entfernungen sind, so muss nach

$$\frac{F_1}{d_1} + \frac{F_2}{u_2} = 1$$

gelten

$$-\frac{F_1}{H_1 K_1} + \frac{F_2}{H_2 K_2} = 1.$$

Diess giebt $K_1 = F_2$, also ist auch die Entfernung des ersten Knotenpunktes von dem ersten Brennpunkte gleich der Entfernung des zweiten Brennpunktes vom zweiten Hauptpunkte.

Da nun nach dem vorigen

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{n_1}{n_{m+1}}, \text{ so ist } \frac{K_1}{K_2} = \frac{n_{m+1}}{n_1};$$

die zu den Knotenpunkten gehörigen Brennweiten verhalten sich demnach umgekehrt wie die Brechungsverhältnisse des ersten und letzten Mediums.

Hieran knüpft sich eine einfache Bestimmung des Verhältnisses der zu den negativen Hauptpunkten und Knotenpunkten gehörigen Brennweiten. Es ist nämlich hier zu setzen $\gamma_1 = -\gamma_{m+1}$, also folgt aus (b.) hier die Gleichung

$$n_1 \operatorname{tag} \psi_1 = - n_{m+1} \operatorname{tag} \psi_{m+1}.$$

Da die negativen Hauptpunkte auch conjugirte Punkte sind, so gelten beziehungsweise alle oben gefundenen Relationen, es findet sich demnach

$$-\frac{n_1}{n_{m+1}} = \frac{\overline{F}_1}{\overline{F}_2},$$

wenn unter $\overline{F}_1$ und $\overline{F}_2$ die Entfernung der Brennpunkte von den negativen Hauptpunkten verstanden wird.

Für die negativen Knotenpunkte gilt

$$\psi_1 = - \psi_{m+1}.$$

Alles andere gilt beziehungsweise wieder, mithin ist

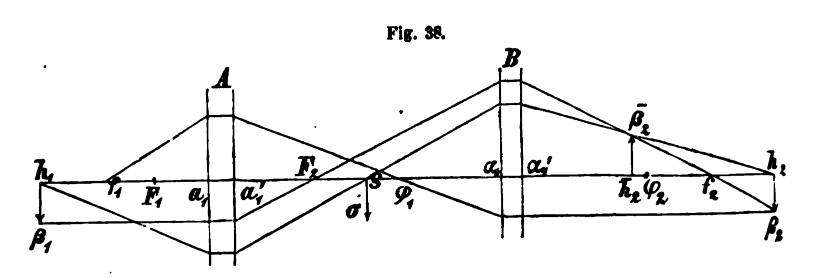
$$-\frac{n_{m+1}}{n_1} = \frac{\overline{K}_1}{\overline{K}_2}$$

wo $\bar{K}_1$ und $\bar{K}_2$ die Entfernungen der Brennpunkte von den negativen Knotenpunkten bedeuten.

Die Formeln enthalten also den obigen analoge Gesetze, nur ist die Lage dieser Punkte entgegengesetzt.

3. Bestimmung der Cardinalpunkte eines aus zwei Systemen bestehenden Systems.

Fig. 38.



Seien Figur 38 A und B die beiden centrirten zusammensetzenden Systeme, deren Entfernung $a'_1 \alpha_1 = \delta$ sei. a_1, a'_1 (α_1, α'_1) seien die beiden Hauptpunkte von A (B). F_1, F_2 (φ_1, φ_2) bezeichnen die beiden Brennpunkte von A (B) und zugleich die beiden Brennweiten, also in A $a_1 F_1$, $a'_1 F_2$ (in B $\alpha_1 \varphi_1$, $\alpha'_1 \varphi_2$), f_1, (f_2) den ersten (zweiten) Brennpunkt des combinirten Systems, und deren Entfernungen von a_1, also $f_1 a_1 = f_1$ (von α'_1, also $f_2 \alpha'_1 = f_2$).

Der erste Brennpunkt f_1 ist offenbar das Bild des ersten Brennpunktes φ_1 durch das System A, wie man erkennt durch einen Strahl an der Figur, der von f_1 ausgeht, denn dieser ist dann parallel der Axe. Wir finden demnach die gesuchte Entfernung f_1 durch Einsetzen in die Formel von § 303.

$$\frac{F_2}{\delta - \varphi_1} + \frac{F_1}{f_1} = 1, \quad \text{also} \quad f_1 = \frac{(\delta - \varphi_1) F_1}{\delta - \varphi_1 - F_2}.$$

Ganz ebenso muss f_2 sein, wie an der Figur klar wird, das durch B entworfene Bild von F_2, mithin ist

$$\frac{\varphi_1}{\delta - F_2} + \frac{\varphi_2}{f_2} = 1, \quad \text{also} \quad f_2 = \frac{(\delta - F_2)\varphi_2}{\delta - F_2 - \varphi_1}.$$

Seien ferner h_1, h_2 die beiden Hauptpunkte des combinirten Systemes und auch $h_1 = a_1 h_1$, $h_2 = \alpha'_1 h_2$. Die beiden Hauptpunkte sollen jeder des anderen Bild sein, sie müssen daher ein beiden gemeinsames Bild in dem mittleren Medium haben. Sei dieses Bild σ im Punkte ς, dessen Entfernung von a'_1 (α_1) sei x (ξ). Die zweite Bedingung für diese Punkte ist, dass zusammengehörige Bilder in den Hauptebenen gleich gross und gleich gerichtet sind. Seien nun β_2 und β_1 die Bilder von σ in den beiden Punkten h_1 und h_2, so ist nach § 304, 1

$$\frac{\beta_1}{\sigma} = \frac{F_2}{F_2 - x}, \quad \frac{\beta_2}{\sigma} = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \xi};$$

da nun $\beta_1 = \beta_2$ sein soll, so muss

$$\frac{F_2}{F_2 - x} = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \xi} \text{ werden, mithin } \frac{x}{F_2} = \frac{\xi}{\varphi_1} \text{ oder } \frac{a_1' \varsigma}{a_1' F_2} = \frac{\alpha_1 \varsigma}{\alpha_1 \varphi_1}. \quad (*)$$

Um also den Punkt im mittleren Medium zu finden, dessen Bilder in den beiden Hauptpunkten sind, theile man die Entfernung zwischen dem zweiten Hauptpunkte des ersten und ersten Hauptpunkte des zweiten Systems in zwei Theile, welche sich verhalten wie die zu diesen Hauptpunkten gehörigen Hauptbrennweiten der beiden Systeme.

Da nun ausserdem $x + \xi = \delta$ ist, so erhält man

$$x = \frac{\delta F_2}{\varphi_1 + F_2}, \quad \xi = \frac{\delta \varphi_1}{\varphi_1 + F_2}.$$

Daraus findet man dann mit Benutzung der Formeln von § 303 1.

$$a_1 h_1 = h_1 = \frac{x F_1}{x - F_2}, \quad \alpha_1' h_2 = h_2 = \frac{\xi \varphi_2}{\xi - \varphi_1},$$

$$= \frac{\delta F_1}{\delta - \varphi_1 - F_2}, \quad = \frac{\delta \varphi_2}{\delta - \varphi_1 - F_2}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergeben sich dann die Entfernungen der Brennpunkte des combinirten Systemes von ihren Hauptpunkten, die den Index h erhalten sollen,

$$f_{1h} = a_1 f_1 - a_1 h_1, \quad f_{2h} = \alpha_1' f_2 - \alpha_1 h_2,$$

$$= \frac{\varphi_1 F_1}{\varphi_1 + F_2 - \delta}, \quad = \frac{\varphi_2 F_2}{\varphi_1 + F_2 - \delta}.$$

Hat man die Haupt- und Brennpunkte gefunden, so ergeben die Formeln der vorigen Nummer die betreffenden Entfernungen der Knotenpunkte; denn wir hatten dort $K_2 = F_1$ und $K_1 = F_2$.

Um die Knotenpunkte, unabhängig von der bereits bestimmten Lage der Hauptpunkte, zu finden, benutzen wir dieselbe Figur mit anderer Bedeutung. Es seien jetzt a_1, a_1' (α_1, α_1') die Knotenpunkte des Systemes A (B), h_1, h_2 die Knotenpunkte des combinirten Systemes und deren gemeinsames Bild σ im mittleren Medium. Wenn dann die im Obigen eingeführten F und φ beibehalten werden unter der Berücksichtigung, dass diese Entfernungen sich nun auf die Knotenpunkte beziehen, so erhält man nach den in der vorigen Nummer gefundenen Gleichungen für die Knotenpunkte

$$a_1 h_1 = \frac{x F_2}{x - F_1}, \quad \alpha_1' h_2 = \frac{\xi \varphi_1}{\xi - \varphi_2}.$$

Nach der Eigenschaft der Knotenpunkte ist ferner

$$\frac{\beta_1}{\sigma} = \frac{a_1 h_1}{x} = \frac{F_2}{x - F_1}, \quad \frac{\beta_2}{\sigma} = \frac{\alpha_1' h_2}{\xi} = \frac{\varphi_1}{\xi - \varphi_2}.$$

Da nun nach den Verhältnissen aus 2 sein muss, wenn n_1 und n_2 die Brechungsexponenten des ersten und letzten Mittels sind,

$$n_1 \beta_1 = n_2 \beta_2, \text{ so ist } \frac{n_1 F_2}{x - F_1} = \frac{n_2 \varphi_1}{\xi - \varphi_2}.$$

Ist aber ν das Brechungsverhältniss im mittleren Medium, so gilt $n_1 F_2 = \nu F_1$ und $n_2 \varphi_1 = \nu \varphi_2$, also ist

$$\frac{F_1}{x - F_1} = \frac{\varphi_2}{\xi - \varphi_2}, \text{ mithin } \frac{x}{F_1} = \frac{\xi}{\varphi_2} \text{ oder } \frac{a_1' \varsigma}{a_1' F_2} = \frac{\alpha_1 \varsigma}{\alpha_1' \varphi_1}.$$

Diess ist dieselbe Gleichung wie (*). Man wird demnach zur Auffindung der Knotenpunkte des combinirten Systems verfahren wie bei der Auffindung der Hauptpunkte, nur hat man von den Knotenpunkten der einzelnen Systeme, nicht von den Hauptpunkten auszugehen. Wir finden dann, wenn mit k_1 und k_2 die Entfernungen der Knotenpunkte von den Brennpunkten des combinirten Systemes bezeichnet werden, aus den hier resultirenden Gleichungen $\frac{x}{F_1} = \frac{\xi}{\varphi_2}$ in Verbindung mit $\chi + \xi = \delta$,

$$x = \frac{\delta F_1}{\varphi_2 + F_1}, \quad \xi = \frac{\delta \varphi_2}{\varphi_2 + F_1}.$$

Nach der allgemeinen Formel aus § 303 ist

$$k_1 = \frac{x F_1}{x - F_2}, \quad k_2 = \frac{\xi \varphi_2}{\xi - \varphi_1},$$

folglich nach Einsetzung der Werth für x und ξ

$$k_1 = \frac{\delta F_1}{\delta - \varphi_2 \frac{F_2}{F_1} - F_2}, \quad k_2 = \frac{\delta \varphi_2}{\delta - F_1 \frac{\varphi_1}{\varphi_2} - \varphi_1}.$$

Es werden daher die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammenfallen, also sein

$$k_1 = h_1 \text{ und } k_2 = h_2, \text{ wenn } \frac{F_2}{F_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \text{ ist.}$$

Es erübrigt nun noch, die Lage der negativen Haupt- und Knotenpunkte zu bestimmen.

Nach der Figur ist klar, dass $\overline{h}_2$ der negative Hauptpunkt ist, wenn das Bild $\overline{\beta}_2$ an Grösse dem β_1 gleich ist. Vergleichen wir dann Fig. 34 S. 294 damit, so finden wir $f_{2h} = -\overline{f}_{2h}$, wenn $\overline{f}_{2h}$ die Entfernung des $\overline{h}_2$ von f_2 bedeutet. Dasselbe ergiebt sich nach der in 2. gefundenen Proportion für $\overline{f}_{1h}$, nämlich $f_{1h} = -\overline{f}_{1h}$. Wie also oben die Lage der positiven Knotenpunkte gefunden worden ist, so geschieht es auch bei der Bestimmung der der negativen Knotenpunkte.

Hieraus ergiebt sich folgende einfache Construction zur Auffindung der negativen Haupt- und Knotenpunkte. Wenn man die Haupt- und Knotenpunkte eines Systems gefunden hat, braucht man nur symmetrisch zu dem ersten (zweiten) Brennpunkt die Entfernung der Haupt- und Knotenpunkte von diesen aufzutragen, um die gleich benannten negativen Cardinalpunkte zu finden.

Die Untersuchungen dieser Nummer lehren nun, dass wir nach Belieben entweder statt mehrerer brechender Systeme eines setzen können oder statt eines mehrere substituiren können.

4. Anwendung der allgemeinen Formeln der vorigen Nummer.

Jedes der beiden mit einander verbundenen Systeme bestehe nur aus einer einzelnen Kugelfläche. Seien r_1 und r_2 die Halbmesser derselben, δ ihr Abstand von einander, n_1, n_2, n_3 die aufeinander folgenden Brechungsexponenten, dann ist nach § 303 1.

$$F_1 = \frac{n_1 r_1}{n_2 - n_1}, \quad F_2 = \frac{n_2 r_1}{n_2' - n_1},$$

$$\varphi_1 = \frac{n_2 r_2}{n_3 - n_2}, \quad \varphi_2 = \frac{n_3 r_2}{n_3 - n_2}.$$

Wenn nun zur Abkürzung gesetzt wird

$$N = n_2 (n_3 - n_2) r_1 + n_2 (n_2 - n_1) r_2 - (n_3 - n_2)(n_2 - n_1) \delta,$$

so ergeben sich für die Hauptbrennweiten, d. h. für die Entfernungen der Brennpunkte von den Hauptpunkten

$$f_1 = \frac{n_1 n_2 r_1 r_2}{N}, \quad f_2 = \frac{n_2 n_3 r_1 r_2}{N},$$

und für die Entfernung der Hauptpunkte von den brechenden Flächen

$$h_1 = \frac{n_1 (n_2 - n_3) \delta r_1}{N}, \quad h_2 = \frac{n_3 (n_1 - n_2) \delta r_2}{N}.$$

Die Entfernung der Hauptpunkte von einander ist

$$H = \delta \frac{(n_2 - n_1)(n_3 - n_2)(r_1 - r_2 - \delta)}{N}.$$

Ist δ eine zu vernachlässigende Grösse, so wird

$$h_1 = h_2 = H = o.$$

$$f_1 = \frac{n_1 r_1 r_2}{(n_3 - n_2) r_1 + (n_2 - n_1) r_2}, \quad f_2 = \frac{n_3 r_1 r_2}{(n_3 - n_2) r_1 + (n_2 - n_1) r_2}.$$

Ist ausserdem $r_2 = r_1$, so ist

$$f_1 = \frac{n_1 r_1}{n_3 - n_1}, \quad f_2 = \frac{n_3 r_1}{n_3 - n_1}.$$

Die hier erhaltenen Werthe, welche also von n_2 unabhängig sind, sind dieselben wie F_1 und F_2, wenn n_2 ersetzt wird durch n_3. Die Brenn- und Hauptpunkte sind also dieselben, als ob nur eine brechende Fläche vorhanden wäre.

Ist das erste und letzte Mittel dasselbe, also $n_1 = n_3$, so fallen nach der am Ende von 3. aufgestellten Bedingung die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten und ebenso die negativen gleich benannten Cardinalpunkte zusammen und es ist

$$f_1 = f_2 = \frac{n_1 n_2 r_1 r_2}{(n_2 - n_1)[n_2 (r_2 - r_1) + (n_2 - n_1) \delta]}.$$

Die Gleichheit dieser beiden Werthe. bedeutet, dass es bei Linsen in diesem Falle gleichgültig ist, welche der Flächen wir dem Lichte zuwenden,

dass die Lage der Bilder nicht durch eine Aenderung der Linsenstellung geändert wird. Die anderen Grössen werden dann

$$h_1 = \frac{n_1 \delta r_1}{n_2 (r_2 - r_1) + (n_2 - n_1)\delta}, \quad h_2 = -\frac{n_1 \delta r_2}{n_2 (r_2 - r_1) + (n_2 - n_1)\delta}$$

$$H = \delta \frac{(n_2 - n_1)(\delta + r_2 - r_1)}{n_2 (r_2 - r_1) + (n_2 - n_1)\delta}.$$

Ist ausserdem $\delta = o$, so ist

$$f_1 = f_2 = \frac{n_1 r_1 r_2}{(n_2 - n_1)(r_2 - r_1)} = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}.$$

Die letzteren Formeln geben dann nach § 303.

$$\frac{f_2}{b} + \frac{f_1}{d} = 1,$$

wenn sich die b und d auf die Hauptpunkte beziehen, oder

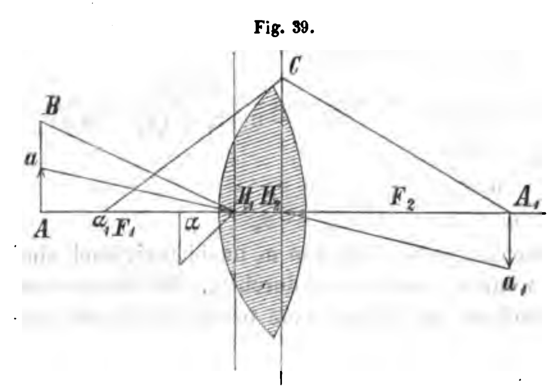
$$b = \frac{d f_2}{d - f_1}, \quad (*)$$

$$= \frac{d n_1 n_2 r_1 r_2}{d \{(n_2 - n_1)[n_2 r_2 - n_2 r_1 + (n_2 - n_1)\delta]\} - n_1 n_2 r_1 r_2}.$$

Die Lage der Bildpunkte ist demnach durch die der Hauptpunkte und Hauptbrennpunkte vollständig bestimmt; wir können sie also berechnen und auch durch Construction bestimmen.

Eine einfache, immer anwendbare Construction liefert die Gleichung (*); denn dieselbe lässt sich bringen auf die Form $d : d - f_1 = b : f_2$. Sind nun an Fig. 39 H_1 und H_2 die Hauptpunkte, also durch dieselben die Hauptebenen gelegt, F_1, F_2 die Brennpunkte und A ein auf der Axe liegender leuchtender Punkt, also $AH_1 = d$, $F_1 H_1 = f_1$ und $AF_1 = d - f_1$. Man errichte in A senkrecht auf $F_1 F_2$ $AB = d - f_1$ und mache $H_2 C = f_2 = H_2 F_2$ und ziehe $CA_1 \parallel BH_1$, so ist A_1 der gesuchte Bildpunkt von A.

Fig. 39.



Zu bedenken hierbei ist nur, dass, wenn wir finden wollen das Bild eines Punktes α, der zwischen F_1 und der Linse liegt, wir $d - f_1$ negativ haben. Wenn also vorhin das positive $d - f_1$ nach oben aufgetragen war, so muss jetzt $d - f_1$ nach unten aufgetragen werden. Im Uebrigen ändert sich die Construction nicht, aber man erkennt leicht, dass nun der Bildpunkt von α auf derselben Seite liegt, nämlich in α_1.

Liegt der leuchtende Punkt ausserhalb der Axe, z. B. in a, so finden wir einfach seinen Bildpunkt, da die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammenfallen, indem wir in A_1 auf F_1F_2 eine Senkrechte errichten und durch H_2 eine Linie parallel a H_1 zeichnen. Der Schnittpunkt a_1 dieser letzteren Linie mit der in A_1 errichteten Senkrechten ist der gesuchte Bildpunkt von a.

Eine allgemeine Untersuchung über die ausführbaren Constructionen befindet sich am Ende von 8.

5. Anwendung der Formeln auf Sammellinsen.

Wir setzen hier

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2}{n_3} = n,$$

$n > 1$ und δ kleiner als jeden der beiden Krümmungsradien.

1) Für die biconvexe Linse ist $r_1 > 0$, $r_2 < 0$, also erhält man, wenn mit r_1 und r_2 die absoluten Werthe der Halbmesser bezeichnet werden,

$$f_1 = f_2 = \frac{n\, r_1\, r_2}{(n-1)\,[n\,(r_2 + r_1) - (n-1)\,\delta]}$$

oder

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{n-1}{n\, r_1 r_2}\,\delta\right).$$

$$h_1 = \frac{\delta\, r_1}{(n-1)\,\delta - n\,(r_2 + r_1)}, \quad h_2 = \frac{\delta\, r_2}{(n-1)\,\delta - n\,(r_2 + r_1)}.$$

Die Untersuchung dieser Werthe giebt wegen der für δ gemachten Annahme, dass h_1 und h_2 negativ und dass deren absolute Werthe kleiner als δ sind. Daraus geht hervor, dass beide Hauptpunkte innerhalb der Linse liegen. Da ferner der hierher gehörige Werth von H positiv ist, so muss h_1 vor h_2 zu liegen kommen. Die Lage der Brennpunkte ist bestimmt dadurch, dass die Brennweite immer positiv ist.

Fig. 40.

Figur 40 zeigt den hier betrachteten Fall.

2) Für die planconvexe Linse ist

$$r_1 > 0,\ r_2 = -\infty,$$

oder

$$r_1 = \infty,\ r_2 < 0,$$

wo diese letztere Annahme eine Linse giebt, deren Lage der vorigen entgegengesetzt ist.

Die Einsetzung dieser Werthe giebt

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = (n-1)\frac{1}{r_1} \text{ oder } (n-1)\frac{1}{r_2}.$$

$$h_1 = 0,\ h_2 = -\frac{\delta}{n} \text{ oder } h_1 = -\frac{\delta}{n},\ h_2 = 0.$$

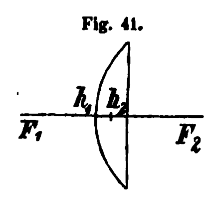


Fig. 41.

Es liegt mithin immer der eine Hauptpunkt in dem Scheidel der convexen Fläche (Fig. 41), der andere im Innern der Linse, und zwar $\frac{\delta}{n}$ von der ebenen Fläche entfernt. Wenn die Linse optisch dünner ist als das umgebende Mittel, so liegt dieser Hauptpunkt ausserhalb.

3) Für die concavconvexe Linse ist

$$r_1 > 0,\ r_2 > 0 \quad \text{und} \quad r_1 < r_2,$$

oder bei entgegengesetzter Lage

$$r_1 < 0,\ r_2 < 0 \quad \text{und} \quad r_1 > r_2.$$

Dann haben die f_1, f_2, h_1, h_2, wenn wir die erste Lage nehmen, die in Nummer 4. angegebene Form. Die Brennweite

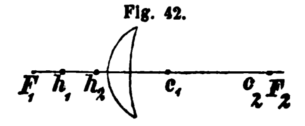
$$f_1 = f_2 \text{ ist } \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ \infty \\ 0 \end{matrix} \text{ je nachdem } n\,(r_2 - r_1 + \delta \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \delta \text{ ist,}$$

und dann ist

$$h_1 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ \infty \\ 0 \end{matrix},\quad h_2 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} - \begin{matrix} 0 \\ \infty \\ 0 \end{matrix} \quad \text{und} \quad H \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ \infty \\ 0 \end{matrix}.$$

Die hier in Parenthese stehende Grösse $r_2 - r_1 + \delta$ ist aber der Abstand des Krümmungsmittelpunktes der zweiten Fläche von dem der ersten nach hinten gerechnet. Die Figuren 42, 43, 44 veranschaulichen die Lage der betreffenden Cardinalpunkte, wo c_1 c_2 die Krümmungsmittelpunkte bedeuten.

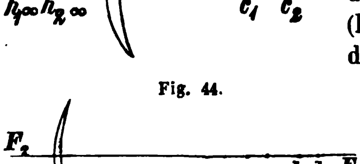
Fig. 42.



Aus den hier angestellten Einzelbetrachtungen geht hervor, dass das gemeinsame Merkmal der Sammellinsen ist, dass die Brennweite einen positiven Werth hat und nicht, wie durch den Fall Fig. 44 deutlich wird, dass die Linsen am Rande dünner sind als in der Mitte; denn es werden bei einer Linse (Fig. 44) parallel einfallende Lichtstrahlen, die z. B. von links kommen, so in divergente verwandelt, als ob sie von F_2 kämen. Vergleiche damit § 305.

Fig. 43.

Fig. 44.



Wenn wir demnach unter Berücksichtigung der Dicke der Linse die Bilder von leuchtenden Gegenständen durch Construction finden wollen, so müssen wir erst die Hauptbrennpunkte, Hauptpunkte und damit die Knotenpunkte bestimmen, dann nach den Eigenschaften der durch diese Punkte gehenden Strahlen die in der vorigen Nummer schon besprochene Construction oder eine aus 8. ausführen.

6. Verbindung mehrerer Linsen.

Obgleich in 3. die allgemeinste Erörterung über die Zusammenstellung mehrerer Systeme zu einem gegeben ist, so sollen doch hier in der Kürze

die Formeln*) aufgestellt werden, von denen häufig in dioptrischen Untersuchungen ausgegangen wird. Seien gegeben mehrere Linsen, deren Brennweiten durch f_1, f_2 .... bezeichnet werden mögen. δ_{12}, δ_{23}, δ_{34} ... seien die Entfernungen der Linsen von einander, d_1 die Entfernung des leuchtenden Punktes von der ersten Linse, b_1 die Entfernung dessen Bildpunktes von der ersten Linse, b_2 die Entfernung des Bildpunktes dieses Punktes von der zweiten Linse u. s. f. Dann hat man

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f_1},\qquad \frac{1}{b_2}+\frac{1}{\delta_{12}-b_1}=\frac{1}{f_2},\qquad \frac{1}{b_3}+\frac{1}{\delta_{23}-b_2}=\frac{1}{f_3}\ \text{u. s. f.}$$

Mithin

$$b_1=\frac{1}{\frac{1}{f_1}-\frac{1}{d}},$$

$$b_2=\frac{1}{\frac{1}{f_2}-\frac{1}{\delta_{12}-b_1}}=\frac{1}{\frac{1}{f_2}-\frac{1}{\delta_{12}-\frac{1}{\frac{1}{f_1}-\frac{1}{d}}}}.$$

$$b_3=\frac{1}{\frac{1}{f_3}-\frac{1}{\delta_{23}-b_2}}=\frac{1}{\frac{1}{f_3}-\frac{1}{\delta_{23}-\frac{1}{\frac{1}{f_2}-\frac{1}{\delta_{12}-\frac{1}{\frac{1}{f_1}-\frac{1}{d}}}}}}\ \text{u. s. f.}$$

Es ist nun leicht daraus abzuleiten

$$d=\frac{1}{\frac{1}{f_1}-\frac{1}{\delta_{12}-\frac{1}{\frac{1}{f_2}-\frac{1}{\delta_{23}-\frac{1}{\frac{1}{f_3}-\frac{1}{b_3}}}}}}.$$

Diese beiden Werthe seien geschrieben

$$b_3=\left(\frac{1}{f_3},\ \delta_{23},\ \frac{1}{f_2},\ \delta_{12},\ \frac{1}{f_1},\ d\right) \qquad (1.)$$

und

$$d=\left(\frac{1}{f_1},\ \delta_{12},\ \frac{1}{f_2},\ \delta_{23},\ \frac{1}{f_3},\ b_3\right) \qquad (2.).$$

Setzen wir nun, da b_3 eine algebraische Function von d und umgekehrt d von b_3 ist,

*) Möbius, Crelle V.

$$A + Bd + Cb_3 + Ddb_3 = 0,$$

wo die A, B, C, D sich folgendermassen bestimmen

$$d = 0, \text{ so ist } b_3' = \left(\frac{1}{f_3}, \delta_{23}, \frac{1}{f_2}, \delta_{12}\right) = A + Cb_3',$$

$$d = \infty, \text{ „ „ } b_3'' = \left(\frac{1}{f_3}, \delta_{23}, \frac{1}{f_2}, \delta_{12}, \frac{1}{f_1}\right) = B + Db_3'',$$

$$b_3 = 0, \text{ „ „ } d' = \left(\frac{1}{f_1}, \delta_{12}, \frac{1}{f_2}, \delta_{23}\right) = A + Dd',$$

$$b_3 = \infty, \text{ „ „ } d'' = \left(\frac{1}{f_1}, \delta_{12}, \frac{1}{f_2}, \delta_{23}, \frac{1}{f_3}\right) = C + Dd''.$$

Hieraus bestimmen sich die A, B, C, D, so dass man endlich erhält

$$d . b_3 - \left(\frac{1}{f_3} \neq \frac{1}{f_1}\right) d - \left(\frac{1}{f_1} \neq \frac{1}{f_3}\right) b_3 + \left(\frac{1}{f_3} \neq \delta_{12}\right)\left(\frac{1}{f_1} \neq \frac{1}{f_3}\right) = 0,$$

wobei die Abkürzung leicht zu übersehen ist.

7. Allgemeine analytische Bedingung für die Lage der Brennpunkte.*)

Wenn ξ, η, ζ die Coordinaten des Brennpunktes sein sollen, so müssen benachbarte Strahlen durch diesen Punkt gehen. Seien nun A und B zwei von einem Punkt ausgehende benachbarte Strahlen, die nach beliebig vielen Brechungen an beliebigen brechenden Flächen von continuirlicher Krümmung in dem Punkte ξ, η, ζ zusammenkommen. Die optischen Längen dieser Strahlen seien durch ψ und $\psi + \varDelta\psi$ ausgedrückt. Nach den in § 298, 2.) eingeführten Bezeichnung ist dann, wenn wir die optischen Längen ausdrücken als Funktionen der verschiedenen $\varDelta x$ und $\varDelta y$, also die betreffenden $\varDelta z$ durch die Gleichungen zwischen den x, y, z, welche die brechenden Flächen bestimmen, eliminirt haben.

$$\psi + \varDelta\psi = \psi + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\varDelta x_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\varDelta x_2 \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_m}\varDelta x_m$$
$$+ \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\varDelta y_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y_2}\varDelta y_2 \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_m}\varDelta y_m.$$

Nach dem in § 298 erörterten Brechungsgesetz sind die ψ und $\psi + \varDelta\psi$ folgenden Bedingungen unterworfen:

1) Für den ersten Strahl A oder ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots \frac{\partial\psi}{\partial x_m} = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y_2} = 0, \quad \ldots \frac{\partial\psi}{\partial y_m} = 0.$$

2) Für den zweiten Strahl B oder $\psi + \varDelta\psi$ müssen diese Gleichungen gelten, wenn überall statt ψ gesetzt wird $\psi + \varDelta\psi$. Diess führt dann mit

*) Helmholtz a. a. O. § 19.

Berücksichtigung der eben aufgestellten Bedingungen zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\Delta x_1+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial y_1}\Delta y_1+\dots+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_m}\Delta x_m+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial y_m}\Delta y_m=0,\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2}\Delta y_1+\dots+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1\partial x_m}\Delta x_m+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_1\partial y_m}\Delta y_m=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \odot\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial x_m\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_m\partial y_1}\Delta y_1+\dots+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_m^2}\Delta x_m+\frac{\partial^2\psi}{\partial x_m\partial y_m}\Delta y_m=0,\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial y_m\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_m\partial y_1}\Delta y_1+\dots+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_m\partial x_m}\Delta x_m+\frac{\partial^2\psi}{\partial y_m^2}\Delta y_m=0.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem vereinfacht sich wesentlich, wenn man bedenkt, dass in dem Ausdruck von ψ, die auf einander folgenden l immer sich so bilden, dass nur in den unmittelbar auf einander folgenden solche Δx und Δy vorkommen, die sich in Bezug auf die Indices um 1 unterscheiden.

Es werden demnach alle Grössen von der Form

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_a\,\partial y_b},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_a\,\partial x_b},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y_a\,\partial y_b}$$

verschwinden, wenn die Differenz der Grössen a und b grösser als 1 ist.

Dieses System von 2m Gleichungen enthält zunächst die 2m Unbekannten $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta x_2, \Delta y_2 \dots \Delta x_m\ \Delta y_m$, durch welche die dem A benachbarten Strahlen B bestimmt werden, welche durch den gemeinsamen Punkt ξ, η, ζ gehen. Diese Grössen können nicht alle $=0$ sein; denn sonst würden die beiden benachbarten Strahlen zusammenfallen. Dividiren wir demnach die 2m Gleichungen $\odot$ durch eine der nicht gleich Null werdenden Unbekannten, so erhalten wir 2m Gleichungen mit nur 2m—1 unbekannten Quotienten. Die Elimination dieser Unbekannten giebt dann eine Gleichung, der die Coordinaten des Brennpunktes unterworfen sein müssen. Diese Eliminationsgleichung ist aber nach bekannter Bezeichnung

$$\pm\sum\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_1}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y_1\,\partial y_1}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\,\partial x_2}\cdots\frac{\partial^2\psi}{\partial x_m\,\partial x_m}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y_m\,\partial y_m}=0.$$

8. Constructionen.

Im Lehrbuch ist eine näherungsweise Construction des Bildpunktes von einem leuchtenden Punkt angegeben und in 4. findet sich eine genaue für irgend ein System. Es leuchtet ein, dass nach Aufstellung der 5 Paare von Cardinalpunkten verschiedene Arten von Constructionen möglich sind. Aus der in 4. geht hervor, dass zwei Paare von Cardinalpunkten hinreichen. Die betreffenden Punkte sind im Früheren bezeichnet worden mit F_1, F_2; H_1, H_2; K_1, K_2; $\overline{H}_1, \overline{H}_2$; $\overline{K}_1, \overline{K}_2$. Es würden demnach sich zehn verschiedene Constructionen angeben lassen, wenn man je zwei der betreffenden Punktpaare combinirte, aber nur die folgenden sechs sind einfach:

1.) F_1, F_2 und H_1, H_2,
2.) F_1, F_2 „ K_1, K_2,
3.) F_1, F_2 „ $\overline{H}_1, \overline{H}_2$,
4.) F_1, F_2 „ $\overline{K}_1, \overline{K}_2$,
5.) H_1, H_2 „ $\overline{H}_1, \overline{H}_2$,
6.) K_1, K_2 „ $\overline{K}_1, \overline{K}_2$.

Die sich hieraus ergebenden Constructionen für Punkte ausserhalb der Axe seien durch einzelne Figuren erläutert, an denen ausser den schon oft gebrauchten gemeinsamen Bezeichnungen folgende eingeführt sind: L bedeutet den leuchtenden Gegenstand und B dessen Bild, die eintretenden Strahlen seien e_1, e_2 und die entsprechenden austretenden a_1, a_2.

Fig. 45.

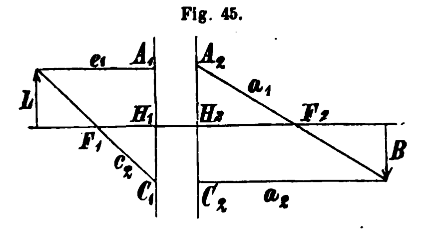
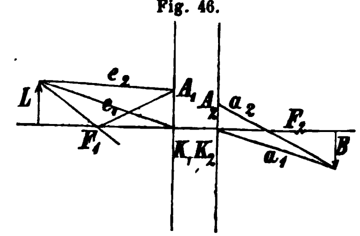


Fig. 46.



1) Fig. 45. $e_1 \parallel$ der Axe, also muss a_1 durch F_2 gehen. Ein zweiter Punkt A_2 für a_1 ist gefunden dadurch, dass $H_1 A_1 = H_2 A_2$ sein muss. a_2 muss parallel der Axe sein, da e_2 durch F_1 geht, und $H_1 C_1 = H_2 C_2$.

2) Fig. 46. $e_1 \parallel a_1$. a_2 muss, da e_2 parallel der Axe ist, durch F_2 gehen, die Richtung von a_2 ist dann so, dass $\angle A_1 F_1 K_1 = \angle A_2 F_2 K_2$ ist; denn es muss sein nach 2. $K_1 A_1 : K_2 A_2 = n_{m+1} : n_1$, d. i. $= F_1 K_1 : F_2 K_2$.

Fig. 47.

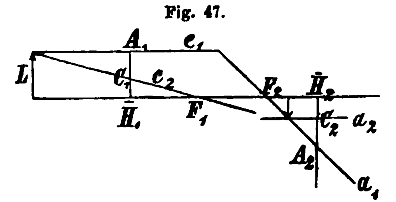
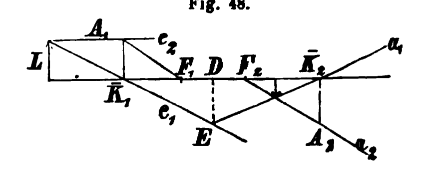


Fig. 48.



3) Fig. 47. a_1 muss, da e_1 parallel der Axe ist, durch F_2 gehen und ist weiter bestimmt durch $\overline{H}_1 A_1 = \overline{H}_2 A_2$. a_2 muss, da e_2 durch F_1 geht, parallel der Axe sein und ist weiter bestimmt durch $\overline{H}_1 C_1 = \overline{H}_2 C_2$.

Fig. 49.

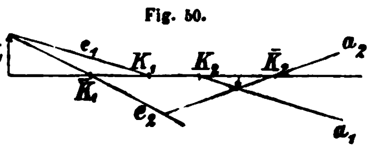
4) Fig. 48. a_1 ist bestimmt dadurch, dass $\overline{K}_1 E \overline{K}_2$ ein gleichschenkliges Dreieck ist, also sind die Winkel, welche e_1 und a_1 mit der Axe bilden, Supplementwinkel. a_2 muss gehen durch F_2, ferner muss sein $K_1 A_1 : \overline{K}_2 A_2 = n_{m+1} : n_1$, und diess ist erreicht, wenn $F_2 A_2 \parallel A_1 F_1$ construirt ist; denn nach 2. ist

absolut $\overline{K}_1 : \overline{K}_2 = F_1\overline{K}_1 : F_2\overline{K}_2 = n_{m+1} : n_1$ und diess ist nach der Aehnlichkeit der Dreiecke $= \overline{K}_1 A_1 : \overline{K}_2 A_2$.

5) Fig. 49. a_1 ist bestimmt dadurch, dass $\overline{H}_1 C_1 = \overline{H}_2 C_2, H_1 A_1 = H_2 A_2$. Auf dieselbe Art ist a_2 construirt.

6) Fig. 50. Hier ist $e_1 \parallel a_1$ und e_2, a_2 bilden ein gleichschenkliges Dreieck.

Fig. 50.



Bilder durch Zerstreuungslinsen. (§ 305.)

Bilder bei Concavlinsen unter Berücksichtigung der Dicke.

Die hier anzustellende Untersuchung geht wie in § 304, 5. aus von den Formeln § 304, 4. Mit Beibehaltung der dort eingeführten Bezeichnung erhält man:

1. Für biconcave Linsen ist $r_1 < 0$ und $r_2 > 0$, mithin, wenn n statt n_1, n_2, n_3 eingeführt wird,

$$f_1 = f_2 = \frac{-n r_1 r_2}{(n-1[n(r_2+r_1)+(n-1)]\delta},$$

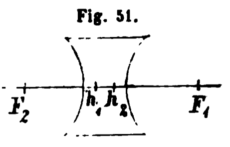
oder

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = -(n-1\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}+\frac{(n-1)\delta}{n r_1 r_2}\right).$$

$$h_1 = -\frac{\delta r_1}{n(r_2+r_1)+(n-1)\delta}, \quad h_2 = -\frac{\delta r_2}{n(r_2+r_1)+(n-1)\delta}.$$

Die Hauptbrennweiten sind also negativ. Beide h sind negativ, und durch eine Vergleichung der Werthe h_1, h_2 mit δ findet man, dass beide Hauptpunkte innerhalb der Linse liegen. Da H positiv ist, so liegt h_1 vor h_2. (Fig. 51.)

Fig. 51.



2. Für planconcave Linsen ist $r_1 < 0$ und $r_2 = \infty$ oder $r_1 = -\infty$, $r_2 > 0$ und damit

$$f_1 = f_2 = -(n-1)\frac{1}{r_1},$$

also negativ,

$$h_1 = 0, \quad h_2 = -\frac{\delta}{n}.$$

h_1 fällt also in die Grenzfläche. (Fig. 52.)

3. Für convexconcave Linsen ist

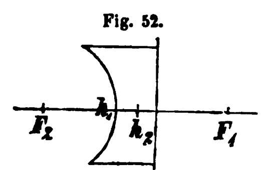
$$r_1 > 0, \quad r_2 > 0, \quad r_1 > r_2$$

oder

$$r_1 < 0, \quad r_2 < 0, \quad r_1 < r_2.$$

Betrachten wir den ersten dieser Fälle. Es

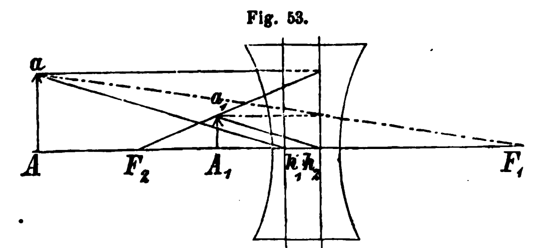
Fig. 52.



ist $f_1 = f_2 \gtreqless \begin{smallmatrix}0\\ \infty\\ 0\end{smallmatrix}$ je nachdem $n(\delta + r_2 - r_1) \gtreqless \delta$ ist und dem entsprechend wird dann $h_1 \gtreqless \begin{smallmatrix}0\\ \infty\\ 0\end{smallmatrix}$, $h_2 \lesseqgtr - \begin{smallmatrix}0\\ \infty\\ 0\end{smallmatrix}$.

Es würden also auch hier wiederum wie § 304, 5 3.) drei Fälle zu unterscheiden sein, so dass also auch $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ und $r_1 > r_2$ eine Sammellinse geben könnte.

Fig. 53.



Es ist also mit Berücksichtigung von § 304, 5. das gemeinsame Merkmal der Zerstreuungslinse die negative Hauptbrennweite. Wie man dann die Bilder von leuchtenden Gegenständen findet, ist an Fig. 53 gezeichnet. Es bedeutet an derselben Aa den Gegenstand und $A_1 a_1$ dessen Bild.

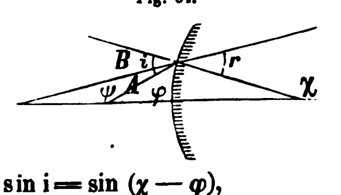
Die sphärische Abweichung. (§ 306.)

1. Gleichung der Brennlinie.

Das Problem der Brennlinie lässt sich wie folgt ausdrücken. Sei gegeben eine Curve C, die von zwei Systemen A und B continuirlich auf einander folgenden Geraden geschnitten wird. Wenn nun beide Systeme so beschaffen sind, dass je zwei Gerade a, b aus beiden Systemen, welche sich in einem Punkte m der Curve C schneiden, mit der Normale in m Winkel bilden, deren Sinus in einem constanten Verhältnisse stehen, so ist, wenn das System A gegeben ist, zu berechnen die einhüllende Curve des Systemes B.

Sei gegeben die Curve C in rechtwinkligen Coordinaten durch die Gleichung $y = f(x)$, das System A durch $\eta - y = a(\xi - x)$ und das System B durch $\eta - y = \alpha(\xi - x)$, wo η, ξ die laufenden Coordinaten sind und x, y die des Punktes, in dem die Curve C geschnitten wird, ferner sei i der Einfallswinkel, r der Brechungswinkel und $n : n'$ das constante Sinusverhältniss, so dass gilt

Fig. 54.



$$n' \sin i = n \sin r. \quad (1.)$$

Es ist nun nach Fig. 54:

$$\sin i = \sin(\chi - \varphi), \qquad \sin r = \sin(\chi - \psi),$$
$$= \sin\chi \cos\varphi - \cos\chi \sin\varphi. \qquad = \sin\chi \cos\psi - \cos\chi \sin\psi. \quad (2.)$$

Nach der oben eingeführten Bezeichnung ist

$$\operatorname{tag}\varphi = a, \qquad \operatorname{tag}\psi = \alpha, \qquad \operatorname{tag}\chi = -\frac{dx}{dy},$$

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \sin\psi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \sin\chi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \cos\chi = -\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}}.$$

Diese Werthe in (2) eingesetzt geben

$$\sin i = \frac{1+a\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right][1+a^2]}}, \quad \sin r = \frac{1+\alpha\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right][1+\alpha^2]}}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe geht (1) über in

$$\frac{n'\left(1+a\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{n\left(1+\alpha\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \qquad (3.)$$

Aus dieser Gleichung (3) können wir die Unbekannte α durch a ausdrücken, so dass also das System der Geraden B bekannt ist und damit dann nach den Lehren von den Einhüllenden deren Schnittpunkte d. h. die Brennlinie. Diese angefangene Rechnung soll nun an einigen Beispielen durchgeführt werden.

2. Die brechende Linie sei ein Kreis.

a) Unter sich parallele Strahlen fallen auf.

Der Anfang unseres Coordinatensystems liege in dem Mittelpunkte des Kreises und die Abscissenaxe sei der gegebenen Richtung der einfallenden Strahlen parallel.

Die Gleichung des Kreises ist $y^2 + x^2 = r^2$, mithin wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y};$$

ferner ist $a = 0$, mithin geht (3) über in

$$n' = n\,\frac{1-\alpha\frac{x}{y}}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Wir können nun, statt α erst aus dieser Gleichung zu berechnen, aus derselben und der allgemeinen Gleichung für B die Grösse α eliminiren. Es ist

$$\alpha = \frac{\eta - y}{\xi - x}, \text{ mithin}$$

$$n' \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = n\,[(\xi - x)\,y - (\eta - y)\,x]\,\frac{1}{y}.$$

Benutzen wir dann die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$, so erhalten wir nach Multiplication mit y

$$n'\,y \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + r^2 - 2x\xi - 2y\eta} = n\,(\xi y - \eta x).$$

Setzen wir $x = r\cos\tau$, $y = r\sin\tau$, wo τ jeden beliebigen Werth annehmen kann, so geht diese Gleichung über in

$$n' \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + r^2 - 2r\xi\cos\tau - 2r\eta\sin\tau} = n\,(\xi - \eta\cos\tau). \quad (4.)$$

Um nun die einhüllende Curve zu finden, müssen wir nach τ differenziren. Dies giebt, wenn wir zuerst beide Seiten der obigen Gleichung quadriren,

$$n'^2 r\,(\xi\sin\tau - \eta\cos\tau) = n^2\,(\xi - \eta\cot\tau)\,\frac{\eta}{\sin\tau}$$

oder

$$n'^2 r \sin^3\tau\,(\xi\sin\tau - \eta\cos\tau) = n^2\,(\xi\sin\tau - \eta\cos\tau)\,\eta,$$

also

$$\sin\tau = \sqrt[3]{\frac{n^2\eta}{n'^2 r}}.$$

Die Substitution dieses Ausdrucks in (4) giebt dann

$$\{(n^2 - n'^2)\,\xi^2 + 2\left(\sqrt[3]{n'^4 r^2} - \sqrt[3]{n^4\eta^2}\right)^{\frac{3}{2}} \xi -$$
$$\left\{n'^2 r^2 - 3\sqrt[3]{n^2 n'^4 r^2 \eta^4} + (n'^2 + n^2)\,\eta^2\right\} = 0$$

als Gleichung der gesuchten Brennlinie.

b) Die einfallenden Strahlen gehen von einem Punkt aus. Man lege wie vorhin durch den Mittelpunkt des Kreises das rechtwinklige Coordinatensystem, so dass die Abscissenaxe durch den Ausgangspunkt der Strahlen geht, der sich in der Entfernung e vom Coordinatenanfang befindet.

Es ist mithin das System A gegeben durch

$$\eta - y = \frac{y}{x - e}\,(\xi - x), \quad \text{folglich } a = \frac{y}{x - e}.$$

Die Gleichung des Systemes B ist demnach

$$\frac{n'\left(1 - \frac{x}{x - e}\,\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x - e}\right)^2}} = \frac{n\left(1 - \frac{\eta - y}{\xi - x}\cdot\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\eta - y}{\xi - x}\right)^2}}.$$

Eine Benutzung dieser Formel befindet sich in § 294, 3.

3. Die brechende Linie ist eine Gerade.

Die beide Mittel trennende Gerade sei die x Axe und die y Axe gehe durch den leuchtenden Punkt, es ist also $\frac{dy}{dx} = 0$. Wenn ferner h die Ent-

fernung des leuchtenden Punktes von der brechenden Linie ist, so sind die Gleichungen der Systeme A und B

$$\eta = \cot i\,(\xi - x), \text{ also für } \xi = 0,\; h = \cot i\,x,$$
$$\eta = \cot r\,(\xi - x).$$

Es ist also

$$a = \cot i = -\frac{h}{x},$$
$$\alpha = \cot r = \frac{\eta}{\xi - x}.$$

Dies in (3) substituirt giebt

$$\frac{n'^2}{1 + \left(\frac{h}{x}\right)^2} = \frac{n^2}{1 + \left(\frac{\eta}{\xi - x}\right)^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{n'^2 x^2}{x^2 + h^2} = \frac{n^2 (\xi - x)^2}{(\xi - x)^2 + \eta^2}. \tag{5.}$$

Diese Gleichung ist nun nach der Lehre von den Einhüllenden nach x zu differenziren. Es folgt zunächst

$$\eta^2 = \frac{(\xi - x)^2\,[n^2 h^2 + n^2 x^2 - n'^2 x^2]}{n'^2 x^2} \tag{6.}$$

$$n'^2 \frac{d(\eta^2)}{dx} = \frac{2}{x^3}\,[x^3 (n'^2 - n^2) - \xi\, n^2 h^2]\,(\xi - x).$$

Diess nun gleich Null gesetzt giebt

$$(n'^2 - n^2)\, x^3 = n'^2 h^2 \xi. \tag{7.}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung muss x entweder aus (5) oder aus (6) eliminirt werden.

ξ aus (7) berechnet giebt

$$\xi = \frac{(n'^2 - n^2)\, x^3}{n'^2 h^2}. \tag{8.}$$

Dadurch wird (6)

$$\eta^2 = -\frac{[(n^2 - n'^2)\, x^2 - n'^2 h^2]^3}{n^2 n'^4 h^4}. \tag{9.}$$

Aus (8) und (9) folgt endlich

$$x = \frac{n'^{\frac{2}{3}} h^{\frac{2}{3}}}{(n^2 - n'^2)^{\frac{1}{3}}}\, \xi^{\frac{1}{3}}, \quad (n^2 + n'^2)\, x^2 - n'^2 h^2 = - n^{\frac{2}{3}} n'^{\frac{2}{3}} h^{\frac{4}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}.$$

Hieraus ergeben sich zwei Ausdrücke für x^2, durch deren Gleichsetzung sich die folgende Gleichung der gesuchten kaustischen Linie ergiebt

$$\frac{(n^2 - n'^2)^{\frac{1}{3}}}{n'^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}\, \xi^{\frac{2}{3}} + \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n'^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}\, \eta^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Diess ist die Evolute einer Ellipse. Die erste Axe dieser Ellipse fällt mit der vom strahlenden Punkte auf die brechende Gerade gefällten Senkrechten zusammen. Ein Brennpunkt dieser Curve ist der strahlende Punkt.

4. Sphärische Abweichung.

Wie in § 294 haben wir zu unterscheiden eine Längen- und Seitenabweichung.

1. Längenabweichung. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden die Gleichungen des § 303. Nach den Bezeichnungen an Fig. 35 S. 295 ist

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \text{ (a)} \qquad \sin \alpha = \frac{d+r}{r} \sin \varphi, \text{ (b)}$$

wo φ für $\angle$ sac gesetzt wird. Daraus haben wir gefunden für centrale Strahlen

$$n = \frac{n d r}{d(n-1) - r}.$$

Wenn wir uns aber die dort angenommene Vernachlässigung nicht gestatten, so ergiebt sich aus dem Dreieck a′cs die genauere Formel

$$u + \varDelta u = r + \frac{r \sin \beta}{\sin(\alpha - \varphi - \beta)}, \text{ (c)}$$

wo $\varDelta u$ den Unterschied des wahren und genäherten Werthes, d. h. die gesuchte sphärische Längenabweichung im zweiten Mittel bezeichnet.

Um nun einen angenäherten Ausdruck dieser Abweichungen $\varDelta u$ zu erhalten, benutzen wir die bekannten Reihen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \ldots,$$

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3} \sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5} \sin^5 x \ldots$$

und nehmen an, dass der $\angle \varphi$ immer noch so klein sei, dass die vierten und höheren Potenzen des sin. gegen r vernachlässigt werden können. Schreiben wir zur Abkürzung $d + r = c$, so ist nach (b) und der ersten Reihe

$$\sin \alpha = \frac{c}{r}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3}\right).$$

Setzt man diesen Werth von $\sin \alpha$ in die zweite Reihe, so erhält man bei derselben Vernachlässigung:

$$\alpha = \frac{c\varphi}{r} + \frac{c(c^2 - r^2)}{6 r^3} \varphi^3 \quad \text{oder} \quad \alpha - \varphi = \frac{c - r}{r} \varphi + \frac{c(c^2 - r^2)}{6 r^3} \varphi^3.$$

Nach (a) ergiebt sich mit Hülfe der schon gefundenen Werthe

$$\sin \beta = \frac{r}{n r}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3}\right) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{c\varphi}{rn} + \frac{c(c^2 - r^2 n^2)}{6 r^3 n^3} \varphi^3.$$

Daraus findet man dann den Nenner von (c), da nun ist

$$\alpha - \varphi - \beta = \frac{c(n-1) - n r}{n r} \varphi + \frac{c}{6 r^3 n^3}\left\{(n^3 - 1) c^2 - n^2 r^2 (n-1)\right\} \varphi^3,$$

also nach der ersten Reihe

$$\sin(\alpha - \varphi - \beta) = \frac{c(n-1) - n r}{n r} \varphi$$

$$+ \frac{1}{6 r^3 n^3}\left\{3 c^3 (n-1) + 3 c^2 r (n-1)^2 - 4 n (n-1) c r^2 + n^2 r^3\right\} \varphi^3.$$

Nach Ausführung der Partialdivision, Wiederherstellung des Werthes $d + r$ und einfacher Transformation erhält man

$$u + \varDelta u = \frac{n d r}{(n-1) d - r} - \frac{d (d+r)^2 (n-1)(d + \overline{n+1}\, r)}{2 n r (\overline{n-1}\, d - r)^2} \varphi^2,$$

und daraus, da $\sin \angle s a' c = \frac{r \sin \beta}{u + \varDelta u - r}$ ist,

$$\angle s a' c = \frac{(n-1) d - r}{n r} \varphi + \frac{(n-1)(d+r)}{6 n^2 r^3} [\overline{n^2+n+1} . d (d+2r) + \overline{n+1}\, r^2] \varphi^3.$$

Es mag bemerkt werden, dass dieser Werth übereinstimmt mit dem nach einer anderen Methode gefundenen von § 303, 4., wenn dort eingeführt wird $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{d}$ oder $y = d \varphi$.

Bei Betrachtung dieses Werthes finden wir eine Bestätigung des Resultates von § 303, 5; denn erstens ist diese Abweichung $= 0$, wenn $d + r = 0$, d. h. wenn die Strahlen nach dem Mittelpunkt convergiren, dann aber auch, wenn $d + \overline{n+1}\, r = 0$ oder $n r = -(d + r)$ ist. Wenn nun auf das Vorzeichen des d und r geachtet wird, d. h. wenn $r > 0$ ist, so muss d negativ sein, und wenn $r < 0$ ist, so muss d positiv sein, damit der Gleichung genügt wird, so erhält man für beide Fälle, mit r und d die absoluten Grössen bezeichnet, $n r = d - r$. Da nun $d - r$ die Entfernung des Mittelpunktes von dem Lichtpunkte ist, so ist diese Bedingung übereinstimmend mit der dort gesagten, dass der Mittelpunkt um n R von a entfernt ist.

Den Ausdruck $u + \varDelta u$ können wir weiter durch Einführung des gefundenen Werthes von u vereinfachen. Es ergiebt sich nämlich

$$u + \varDelta u = u - \frac{d (d+r)^2 (n d r + u n^2 r) u \varphi^2}{2 n^3 d^2 r^3},$$

$$= u - \frac{[d (n-1) - r + r n]^2 \left(\frac{d}{n} + u\right) u \varphi^2}{2 n (n-1)^2 d r^2},$$

$$= u - \frac{n (d+u)^2 \left(\frac{d}{n} + u\right) \varphi^2}{2 (n-1)^2 d u}.$$

Die gesuchte sphärische Längenabweichung bei einmaliger Brechung ist dann

$$\varDelta u = - \frac{n (d+u)^2 \left(\frac{d}{n} + u\right) \varphi^2}{2 (n-1)^2 d u}$$

und φ geht bei Vernachlässigung von φ^3 über in

$$\angle s a' c = \frac{d}{u} \varphi.$$

Um nun die Längenabweichung einer Linse zu finden, haben wir nur die Randstrahlen zu berücksichtigen, also können wir von der Dicke der Linse ganz absehen. Die Längenabweichung durch die zweite Brechung zerlegen wir uns in zwei Theile, erstens in die, welche entsteht dadurch, dass unser in § 303 gefundenes b eine Aenderung erfährt, weil u übergegangen

ist in $u + \Delta u$, zweitens in die, welche b durch eine genauere Rechnung, wie sie eben für u geliefert ist, eine Längenabweichung erfährt. Die erste Aenderung des b sei mit Δb und die zweite mit $\Delta\beta$ bezeichnet. Δb ergiebt sich aus der Gleichung des § 303, die nun wird

$$\frac{1}{n(b+\Delta b)} - \frac{1}{(u+\Delta u)} = \frac{n-1}{r'n}.$$

Bei Vernachlässigung höherer Potenzen von Δu ist dies

$$\Delta b = \frac{nb^2 \Delta u}{u^2},$$

$$= -\frac{n^2 b^2 (d+u)^2 \left(\frac{d}{n} + u\right) \varphi^2}{2(n-1)^2 u^3 d}.$$

$\Delta\beta$ erhalten wir aus Δu, wenn wir z. B. für convexconvexe Linsen vertauschen n, d, r, φ, u beziehungsweise mit $\frac{1}{n}$, $-u$, $-r'$, $\angle sa'c = \frac{d}{u}\varphi$, b. Diese Vertauschung liefert:

$$\Delta\beta = \frac{n(b-u)^2 (b-nu) d^2 \varphi^2}{2(n-1)^2 b u^3}.$$

Die Zusammensetzung dieser Werthe giebt dann die gesuchte totale Längenabweichung

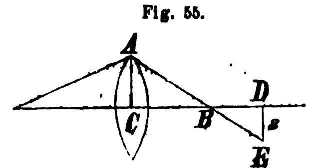
$$\Delta b + \Delta\beta = \frac{n\varphi^2}{2(n-1)^2 u^3} \left\{ \frac{n(b-u)^2 \left(\frac{b}{n} - u\right) d^2}{b} - \frac{n(d+u)^2 \left(\frac{d}{n} + u\right) b^2}{d} \right\},$$

$$= \frac{n^2 \varphi^2 b^2 d^2}{2(n-1)^2} \left\{ \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{b}\right)^2 \left(\frac{1}{nu} - \frac{1}{b}\right) - \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{d}\right)^2 \left(\frac{1}{nu} + \frac{1}{d}\right) \right\}. \quad \text{(a.)}$$

Dieser Ausdruck muss sich so umformen lassen, dass $\frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ ein Faktor wird; denn ist $r' = -r$, so wird aus der Convexconvexlinse eine convexconcave von gleichem Halbmesser mit sehr geringer Dicke. Bei einer solchen muss, da überhaupt die Strahlen fast ungebrochen durchgehen, die Ablenkung verschwinden und das Bild mit dem leuchtenden Punkt zusammenfallen, es ist also dann $b = -d$, $\frac{1}{f} = 0$. In der That lässt sich die Ablenkung unter folgende Form bringen, von deren Richtigkeit man sich durch Ausrechnung der Parenthesen überzeugen kann,

$$\Delta b + \Delta\beta = -\frac{n^2 \varphi^2 b^2 d^2}{2(n-1)^2 f} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{bd} + \frac{2+n}{nu^2} + \frac{(1+2n)}{nu} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) \right). \quad \text{(b.)}$$

Fig. 55.



Statt φ können wir endlich y, den Oeffnungshalbmesser der Linse, einführen; denn es ist näherungsweise $y = d \tan \varphi = d \cdot \varphi$.

2. Die Seitenabweichung s erhalten wir nach Figur 55 aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BCA und BDE, wo $CD = b$, $BD = \Delta b + \Delta\beta$ und $AC = y$ ist,

$$s = \frac{y.(\varDelta b + \varDelta \beta)}{b - (\varDelta b + \varDelta \beta)}.$$

Aus dem Werthe der Längenabweichung ergiebt sich, dass dieselbe mit der Oeffnung der Linse (2 y) und zwar im quadratischen Verhältniss wächst, dass also alle Strahlen, für die y denselben Werth hat, dieselbe Abweichung erleiden.

Um nun endlich die Abhängigkeit der Abweichung von dem Krümmungshalbmesser zu finden, ist es nöthig, diese Werthe in die Formel einzuführen. Man muss also setzen

$$\frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \frac{1}{d},$$

$$\frac{1}{u} = \frac{n-1}{nr} - \frac{1}{n.d}.$$

Diess giebt aber, wie sich leicht übersehen lässt, nachdem y statt φ eingeführt ist, eine Formel, in der die Radien nur im Nenner vorkommen, wodurch auch bewiesen ist, dass die Abweichung um so grösser wird, je stärker die Krümmungen der Linsenflächen sind.

Diese Einführung in (a.) giebt nach einigen leichten Transformationen

$$\varDelta b + \varDelta \beta = -\frac{y^2 b^2 (n-1}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{r'}\right)^2\left(\frac{n+1}{b} + \frac{1}{r'}\right) + \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{r}\right)^2\left(\frac{n+1}{d} + \frac{1}{r}\right)\right].$$

5. Aplanatische Linsen.

Für eine aplanatische Linse muss $\varDelta b + \varDelta \beta = 0$ sein. Diese Forderung ist aber unmöglich zu erfüllen, so lange wir d so gross nehmen, dass das Bild hinter der Linse liegt, also die Entfernung des Bildes positiv ist, bei einer convexconvexen Linse; denn in dem zuletzt angegebenen Ausdruck kommen nur positive Grössen vor. Dasselbe gilt von planconvexen Linsen in jeder Stellung des leuchtenden Gegenstandes. Für die concavconvexe Linse ist r' negativ zu nehmen, also hat dann die Längenabweichung bei positiven b die Form

$$\varDelta b + \varDelta \beta = -\frac{y^2 b^2 (n-1)}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r'}\right)^2\left(\frac{n+1}{b} - \frac{1}{r'}\right) + \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{r}\right)^2\left(\frac{n+1}{d} + \frac{1}{r}\right)\right].$$

Für eine unendliche Entfernung des leuchtenden Gegenstandes, also $d = \infty$, d. i. für eine Annahme, die bei Fernröhren meistens zu machen ist, wird $\varDelta b + \varDelta \beta = 0$, wenn das Verhältniss der Radien gegeben ist durch die Gleichung

$$\left(n - 1 - n\frac{r}{r'}\right)^2\left(n^2 - 1 - n^2\frac{r}{r'}\right) + 1 = 0,$$

die aus der obigen hervorgeht, wenn man $\frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$ einsetzt.

Für die sogenannten Zerstreuungslinsen können analoge Bemerkungen gemacht werden, nur giebt es hier nicht einen Fall, wo das Problem sofort

als unlösbar sich ergiebt, wie oben bei den convexconvexen und planconvexen Linsen.

Da also die vollständige Lösung unseres Problemes unmöglich ist, so soll nun untersucht werden, wie es möglich ist, ein Verhältniss der Krümmungsradien zu finden, welches die Abweichung zu einem Minim. macht. Ganz allgemein ist auch hier das Problem nicht zu lösen, da die Entfernung des leuchtenden Gegenstandes nicht hinausgebracht werden kann. Betrachten wir nun eine unendliche Entfernung des leuchtenden Gegenstandes, so haben wir für die verschiedenen Linsenarten folgende Werthe zu untersuchen:

1. Convexconvexe Linsen:

$$-\frac{y^2 b^2(n-1)}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{r'}\right)^2\left(\frac{n+1}{b}+\frac{1}{r'}\right)+\frac{1}{r^3}\right].$$

2. Planconvexe Linsen:

a) Gegenstand auf Seite der Ebene:

$$-\frac{y^2 b^2(n-1)}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{r'}\right)^2\left(\frac{n+1}{b}+\frac{1}{r'}\right)\right]=-\frac{y^2 n}{2(n-1)}\frac{1}{r'}.$$

b) Gegenstand auf Seite der gekrümmten Fläche:

$$-\frac{y^2 b^2(n-1)}{2n^2}\left[\frac{1}{b^2}\cdot\frac{n+1}{b}+\frac{1}{r^3}\right]=-\frac{y^2(n-1)}{2n^2}\left[n^2-1+\frac{1}{(n-1)^2}\right]\frac{1}{r}.$$

3. Concavconvexe Linsen:

a) Gegenstand auf der convexen Seite:

$$-\frac{y^2 b^2(n-1)}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{r'}\right)^2\left(\frac{n+1}{b}-\frac{1}{r'}\right)+\frac{1}{r^3}\right].$$

b) Gegenstand auf der concaven Seite:

$$-\frac{y^2 b^2(n-1)}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{r'}\right)^2\left(\frac{n+1}{b}-\frac{1}{r'}\right)-\frac{1}{r^3}\right].$$

Die Betrachtung der bis jetzt erhaltenen Ausdrücke ergiebt, dass bei Linsen der dritten Art die Abweichung am geringsten ist.

4. Concavconcave Linsen: b ist < 0

$$-\frac{y^2 b^2(n-1)}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{r'}\right)^2\left(-\frac{n+1}{b}-\frac{1}{r'}\right)-\frac{1}{r^3}\right].$$

5. Planconcave Linsen

a) Gegenstand auf Seite der Ebene:

$$-\frac{y^2 b^2(n-1)}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{r'}\right)^2\left(-\frac{n+1}{b}-\frac{1}{r'}\right)\right]=\frac{y^2 n}{2(n-1)}\frac{1}{r'}.$$

b) Gegenstand auf Seite der Krümmung:

$$-\frac{y^2 b^2(n-1)}{2n^2}\left[-\frac{n+1}{b^3}-\frac{1}{r^3}\right]=\frac{y^2(n-1)}{2n^2}\left(n^2-1+\frac{1}{(n-1)^2}\right)\frac{1}{r}.$$

6. Convexconcave Linsen:

a) Gegenstand auf der convexen Seite:

$$-\frac{y^2 b^2(n-1)}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{r}\right)^2\left(-\frac{n+1}{b}-\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^3}\right].$$

b) Gegenstand auf der concaven Seite:

$$-\frac{y^2b^2(n-1)}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{r}\right)^2\left(-\frac{n+1}{b}+\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r^3}\right].$$

Aus der Zusammenstellung dieser Werthe ergiebt sich, dass bei 2. und 5. die Abweichung einfach abnimmt mit dem Wachsen des Krümmungshalbmessers, dass also von einem Min. nicht die Rede sein kann. Führt man in die Werthe der Ablenkung für andere Linsen den Werth von b ein, ausgedrückt durch n, r, r', und sucht, während man die Grösse eines Radius unbestimmt lässt, das Verhältniss der Krümmungshalbmesser nach den Regeln der Differentialrechnung so zu bestimmen, dass die Abweichung ein Min. wird, so ergiebt sich in jedem Falle eine complicirte Gleichung des dritten Grades. Die Untersuchung derselben hat aber weder ein theoretisches noch ein praktisches Interesse.

6. Aplanatisches Linsensystem.

Wir stellen in der Entfernung e von der ersten Linse eine zweite auf und bezeichnen die Grössen für die zweite mit den entsprechenden Buchstaben, denen unten ein Index angefügt ist.

Für diese zweite Linse haben wir nun erstens eine Abweichung der Strahlen, die sich in der Entfernung b vereinigt haben. Diese geht aus der Formel (b.) in 4. hervor, wenn statt d gesetzt wird e — b. So erhalten wir die Abweichung

$$=-\frac{n_1^2b_1^2y_1^2}{2(n_1-1)^2f_1}\left(\frac{1}{(e-b)^2}+\frac{1}{b_1^2}-\frac{1}{b_1(e-b)}+\frac{2+n_1}{n_1u_1^2}+\frac{1+2n_1}{n_1u_1}\left(\frac{1}{e-b}-\frac{1}{b_1}\right)\right).$$

Wenn wir nun die Dicke der Linse vernachlässigen oder den Randstrahl der ersten Linse auch als solchen für die zweite betrachten, so ist

$$y_1 : y = e-b : b, \quad \text{also } y_1 = \frac{e-b}{b}\,y,$$

mithin abgekürzt die Abweichung

$$-\frac{b_1^2(e-b)^2y^2}{b^2}F_1.$$

Suchen wir nun die Abweichung der Strahlen, die schon eine erfahren haben. Diese muss aus zwei Gliedern bestehen, nämlich aus der, welche der eben gefundenen entspricht, und der, welche durch die erste Linse hervorgebracht wird. Nun ist aber, wenn die Abweichung durch die erste Linse mit a bezeichnet wird und die durch die zweite mit a_1, nach den bekannten Näherungsformeln

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{e-b}-\frac{1}{b_1}, \qquad \frac{1}{f_1}=\frac{1}{e-b+a}-\frac{1}{b_1+a_1}.$$

Daraus ergiebt sich bei Vernachlässigung von $a a_1$

$$a_1=\frac{b_1^2}{(e-b)^2}\,a,$$

d. h. wir erhalten die neue Ablenkung, wenn wir die durch die erste Linse verursachte mit $\frac{b_1^2}{(e-b)^2}$ multipliciren. Es ist demnach die Gesammtabweichung zusammengesetzt aus der obigen und der alten mal $\frac{b_1^2}{(e-b)^2}$, d. i. wenn zur Abkürzung die der F_1 entsprechenden Grösse für die erste Linse bezeichnet wird durch F,

$$-\frac{b_1^2(e-b)^2y^2}{b^2}F_1-\frac{b^2b_1^2y^2}{(e-b)^2}F=-\frac{b_1^2b^2y^2}{(e-b)^2}\left\{\frac{(e-b)^4}{b^4}F_1+F\right\}.$$

Lassen wir dann die Linsen nahe zusammenrücken, so dass wir e vernachlässigen können, so reducirt sich unsere Formel auf

$$-b_1y^2\{F_1+F\}.$$

Die weitere Rechnung besteht dann zunächst in dem Einsetzen gegebener numerischer Werthe.

Wir müssen hiermit die Behandlung aplanatischer Linsensysteme abbrechen und uns begnügen mit dem Hinweis auf die folgenden ausführlicheren Behandlungen:

Gauss a. a. O.

Möbius, Kurze Darstellung der Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern. Crelle V. 1830.

Bessel, Ueber die Grundformeln der Dioptrik. Schuhmacher Astron. Nachr. XVIII. 1841.

Hansen, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahles durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. Abh. der Kgl. Sächs. Gesell. d. W. X. 1871.

— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Jb. X. 1874.

Scheibner, Dioptrische Untersuchungen. Jb. XI. 1876.

W. Schmidt, Die Brechung des Lichtes in Gläsern, insbesondere die achromatische und aplanatische Objectivlinse. Leipzig 1874.

— Die Lichtbrechung im Wasser. Programm. Grimma. 1874.

Verschiedene Brechbarkeit der verschiedenen Schwingungszahlen. (§ 309.)

1. Erklärung der Dispersion nach Cauchy.*)

Nach § 279, 1. und 5. enthalten die Differentialgleichungen der Schwingungsbewegung Ausdrücke von der Form:

*) Briot, a. a. O. Buch III.

$$L_1\xi = \left[\Sigma m f(r) + m\frac{x'^2}{r}f'(r)\right]\left(e^{x'\frac{\partial\xi}{\partial x}+y'\frac{\partial\xi}{\partial y}+z'\frac{\partial\xi}{\partial z}}-1\right),$$

$$P_1\xi = \sum m\frac{x'z'}{r}f'(r)\left[e^{x'\frac{\partial\xi}{\partial x}+y'\frac{\partial\xi}{\partial y}+z'\frac{\partial\xi}{\partial z}}-1\right].$$

Bei der Aufstellung der möglichen Schwingungen in symmetrischen Mitteln § 279, 5. ist berücksichtigt worden, dass die Glieder von ungeradem Grade wegen der Symmetrie wegfallen müssen, ferner ist angenommen worden, dass man wegen der Kleinheit des Wirkungsradius der Aethermoleküle bei der Entwickelung des symbolischen Ausdruckes in der Parenthese höhere Potenzen gegen die zweiten vernachlässigen kann.

Wenn wir nun aber in der Entwickelung noch ein Glied hinzunehmen, so ergiebt sich

$$L_1\xi = \Sigma\left[m f(r) + m x'^2\frac{f'(r)}{r}\right]\left\{\frac{1}{1.2}\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x}+y'\frac{\partial\xi}{\partial y}+z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(x'\frac{\partial\xi}{\partial x}+y'\frac{\partial\xi}{\partial y}+z'\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^4\right\},$$

und dem entsprechend $P_1\xi$.

Für ein isotropes Mittel treten hierin zunächst die Vereinfachungen von § 279 6.) ein und dazu kommen aus denselben Gründen noch folgende:

$$\Sigma m x'^2 y'^2 f(r) = \frac{1}{3}\Sigma m x'^4 f(r) = \frac{1}{3.5}\Sigma m r^4 f(r) = 2g',$$

$$\Sigma m x'^2 y'^2 z'^2\frac{f'(r)}{r} = \frac{1}{3}\Sigma m x'^4 y'^2\frac{f'(r)}{r} = \frac{1}{3.5}\Sigma m x'^6\frac{f'(r)}{r} = \frac{1}{3.5.7}\Sigma m r^6\frac{f'(r)}{r} = 2h'.$$

Die Einführung dieser Bezeichnungen in die Werthe von L_1, M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1 und dann in die Differentialgleichungen giebt nach einer langen aber einfachen Rechnung, wenn man ausserdem symbolisch die in § 279, 2. gebrauchten Buchstaben $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{k^2}$, $\overline{k^4}$ einführt, indem dieselben bezeichnen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}+\frac{\partial^4}{\partial z^4}$:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = \left[(g+h)\overline{k^2}+\frac{g'+h'}{4}\overline{k^4}\right]\xi + (2h+h'\overline{k^2})\,\overline{u}\,(\overline{u}\xi+\overline{v}\eta+\overline{w}\zeta),$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \left[(g+h)\overline{k^2}+\frac{g'+h'}{4}\overline{k^4}\right]\eta + (2h+h'\overline{k^2})\,\overline{v}\,(\overline{u}\xi+\overline{v}\eta+\overline{w}\zeta),$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = \left[(g+h)\overline{k^2}+\frac{g'+h'}{4}\overline{k^4}\right]\zeta + (2h+h'\overline{k^2})\,\overline{w}\,(\overline{u}\xi+\overline{v}\eta+\overline{w}\zeta).$$

Diese Gleichungen enthalten die Derivirten der vierten Ordnung in Bezug auf x, y, z, es gilt also nicht mehr der Satz § 279, 5. über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Gehen wir zu ebenen Wellen über, so können wir die angegebenen Differentiationen ausführen. Darnach finden wir wie § 279, 6. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen

$$c^2 = g + h - \frac{g' + h'}{4} \varkappa^2,$$

wo nach S. 262 und Abkürzung S. 265 $\lambda = \frac{2\pi}{\varkappa}$ ist. Es ist demnach endlich

$$c^2 = (g + h) - \frac{(g' + h')}{\lambda^2} \pi^2.$$

Damit ist das Gesetz, welches Cauchy zuerst bewiesen hat, gefunden, dass, wenn $g' + h' > 0$ ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so grösser sein muss, je grösser die Wellenlänge ist.

Aus dieser eben gefundenen Formel, der wir die Form

$$c^2 = a_0 + \frac{a_1}{\lambda^2}$$

geben, können wir weiter einen Ausdruck für den Brechungsexponenten n zwischen zwei Mitteln finden. Setzen wir c, λ, T (c', λ', T) für das erste (zweite) Medium, dann ist $\lambda : \lambda' = c : c'$,

$$c^2 = A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2},$$

$$c'^2 = a_0 + \frac{a_1}{\lambda'^2} = a_0 + a_1 \frac{c^2}{c'^2 \lambda^2}.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung für c'^2 erhalten wir annähernd

$$c'^2 = \tfrac{1}{2} a_0 \left(1 + 1 + \frac{2 a_1 c^2}{a_0^2 \lambda^2}\right) = a_0 + \frac{a_1 c^2}{a_0 \lambda^2}$$

d. i. annähernd

$$\frac{1}{c'} = a_0^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{a_1 c^2}{a_0^2 \lambda^2}\right).$$

Mithin

$$n = \frac{c}{c'} = a_0^{-\frac{1}{2}} c \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{a_1 c^2}{a_0^2 \lambda^2}\right)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{\lambda^2}.$$

Ueber diese Erklärung sagt Briot p. 69: „Dieselbe (die Erklärung der Dispersion von Cauchy) scheint uns jedoch eine unlösbare Schwierigkeit zu enthalten; denn, wenn die Grösse $\frac{g' + h'}{4}$ einen merklichen Werth im Aether, der einen durchsichtigen Körper, wie z. B. ein Stück Glas durchdringt, hätte, so würde sie auch im freien Aether einen merklichen Werth haben; und doch zeigt die Beobachtung der veränderlichen Sterne, z. B. die von Algol, dass keine annehmbare Dispersion im Weltraum vorhanden ist, d. h. dass der Unterschied der Geschwindigkeiten für die verschiedenen Strahlen im freien Aether so klein ist, dass eine Verschiedenheit des Ganges nicht nachgewiesen werden konnte, ungeachtet des ungeheuer grossen Weges, welchen

die Strahlen durchlaufen müssen. Es ist demnach anzunehmen, dass die Grösse $\frac{g' + h'}{4}$ einen äusserst geringen Werth hat".

2. Erklärung der Dispersion durch den Einfluss directer Einwirkung der ponderablen Moleküle auf die schwingenden Aethermoleküle.

Bezeichnen wir die ponderablen Massenelemente mit m_1 und dem entsprechend die Grössen, welche sich auf die ponderablen Moleküle in Bezug auf die Aethermoleküle beziehen, mit einem Index unten, also mit r_1 den gegenseitigen Abstand, mit x_1', y_1', z_1' dessen Projectionen und mit $m m_1 r_1 f_1(r_1)$ die zwischen den Molekülen ausgeübte Wirkung, so sind die dem § 279. 1., entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum m x' f(r) + \sum m x_1' f_1(r_1) = 0.$$
$$\sum m y' f(r) + \sum m y_1' f_1(r_1) = 0.$$
$$\sum m z' f(r) + \sum m z_1' f_1(r_1) = 0.$$

Gehen wir nun zur Schwingung über, so würde sich wohl ein Theil derselben auf die ponderablen Moleküle übertragen. Diese Bewegung kann aber bei einem durchsichtigen Mittel nur gering sein und wird bei einem vollkommen durchsichtigen Mittel ganz verschwinden müssen. Wir können demnach von dieser Ortsveränderung der ponderablen Moleküle ganz absehen. Es ist nun der veränderliche Abstand des Aethermoleküls von dem ponderablen Molekül m_1.

$$(r_1 + \Delta r_1)^2 = (x_1' - \xi)^2 + (y_1' - \eta)^2 + (z_1' - \zeta)^2,$$

da mit ξ, η, ζ die Projectionen der Verschiebungen der Aethermoleküle bezeichnet werden.

Näherungsweise können wir setzen

$$\Delta r_1 = -\frac{x_1'\xi + y_1'\eta + z_1'\zeta}{r_1}.$$

Die Gleichungen der Bewegung sind demnach

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sum m f(r + \Delta r)(x' + \Delta \xi) + \sum m_1 f_1(r_1 + \Delta r_1)(x_1' - \xi)$$

und dem entsprechend zwei andere für $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$.

Dies giebt dann mit denselben Vernachlässigungen wie § 279 und mit Berücksichtigung der Gleichgewichtsgleichungen drei den (2.) S. 258 entsprechende Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sum m \left[f(r) \Delta \xi + f'(r)(x' \Delta \xi + y' \Delta \eta + z' \Delta \zeta) \frac{x'}{r} \right]$$
$$- \sum m_1 \left[f_1(r_1) \xi + \sum m_1 f_1'(r_1)(x_1' \xi + y_1' \eta + z_1' \zeta) \frac{x_1'}{r_1} \right].$$

Obgleich nun eigentlich die hier vorkommenden Coefficienten nicht mehr constant sind, sondern periodische Grössen, d. h. Grössen, welche

in der Ausdehnung einer Zelle veränderlich sind und an homologen Punkten der verschiedenen Zellen wieder denselben Werth annehmen, so können wir doch bei der ersten Annäherung diese periodischen Coefficienten durch ihre Mittelwerthe ersetzen. Wir können demnach den Aether als ein gleichförmiges und isotropes Medium ansehen. Es werden demnach in den Coefficienten verschwinden

$$\sum m_1 y_1' z_1' \frac{f_1'(r_1)}{r_1}\quad,\quad \sum m_1 z_1' x_1' \frac{f_1'(r_1)}{r_1}\quad,\quad \sum m_1 x_1' y_1' \frac{f_1'(r_1)}{r_1},$$

ferner ist dann

$$\sum m_1 x_1'^2 \frac{f_1'(r_1)}{r_1} = \sum m_1 y_1'^2 \frac{f_1'(r_1)}{r_1} = \sum m_1 z_1'^2 \frac{f_1'(r_1)}{r_1} = \tfrac{1}{3} \sum m_1 r_1^2 f_1'(r_1) = h_1.$$

Bezeichnen wir dann noch $\sum m_1 f_1'(r_1)$ mit g_1 und behalten die Näherung und Abkürzung von § 279 bei, so werden die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = [(g+h)\overline{k}^2 - (g_1 + h_1)]\, \xi + 2h\overline{u}\,(\overline{u}\xi + \overline{v}\eta + \overline{w}\zeta),$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = [(g+h)\overline{k}^2 - (g_1 + h_1)]\, \eta + 2h\overline{v}\,(\overline{u}\xi + \overline{v}\eta + \overline{w}\zeta),$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = [(g+h)\overline{k}^2 - (g_1 + h_1)]\, \zeta + 2h\overline{w}\,(\overline{u}\xi + \overline{v}\eta + \overline{w}\zeta),$$

mithin nach S. 267 für Transversalschwingungen

$$c^2 = g + h + \frac{g_1 + h_1}{\varkappa^2},$$

$$= g + h + \frac{(g_1 + h_1)}{4\pi^2}\lambda^2.$$

Nach unserer Annahme ändert sich also die Geschwindigkeit proportional der Wellenlänge, sie wird, wenn $g_1 + h_1 > 0$ ist, mit zunehmender Länge grösser. Diese Formel entspricht aber nicht der Erfahrung (vgl. 4.), es muss also $g_1 + h_1$ so klein sein, dass die directe Einwirkung der ponderablen Moleküle auf die Aethermolekule die Schwingungen nicht merklich modificirt.

3. Erklärung der Dispersion durch den Einfluss der Körpermoleküle auf die Anordnung der Aethermoleküle.

Die Körpermoleküle mögen anziehend oder abstossend auf den Aether wirken, so kann derselbe nicht überall gleiche, sondern nur eine periodisch wechselnde Dichtigkeit besitzen. Ist die Kraft, welche von den Massentheilchen ausgeübt wird, eine Anziehung, so muss eine Verdichtung des Aethers in unmittelbarer Nähe der Körpertheile und ein Min. der Dichtigkeit in der Mitte zwischen den einzelnen Körpertheilchen stattfinden. Die Dichtigkeit des Aethers wird demnach, wenn das Mittel isotrop ist, eine periodische sein und zwar periodisch gleich, d. h. in den verschiedenen Perioden, den Abständen zweier Massentheilchen, ist die Dichtigkeit als Ganzes genommen, die mittlere Dichtigkeit, dieselbe, innerhalb einer ein-

zelnen Periode ist aber die Dichtigkeit an verschiedenen Punkten eine verschiedene, so dass also die Isotropie des Mittels nicht beeinflusst wird; denn in welcher Richtung wir auch durch das Mittel fortschreiten, die Perioden, nach denen die Dichtigkeit des Aethers wieder dieselbe wird, sind für alle Richtungen dieselben.

Diese periodische Anordnung des Aethers stellt Briot vor durch Summen von der Form

$$\delta x = a' \sin \psi + a'' \cos \psi,$$
$$\delta y = b' \sin \psi + b'' \cos \psi,$$
$$\delta z = c' \sin \psi + c'' \cos \psi,$$

wo $\psi = \alpha x + \beta y + \gamma z$ ist.

Diese Summen werden in die obigen Ausdrücke von L, P .... eingeführt. Die weitläufigen Rechnungen sollen hier übergangen werden, da das Resultat nach der nächsten Nummer nicht mit der Erfahrung übereinstimmt und die Theorie durch andere § 331 zu ersetzen ist. Die Resultate von Briot sind zunächst enthalten in der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \eta(\zeta)}{\partial t^2} = \left[2 p \left(1 - \frac{703}{60} h^2 \Sigma i^2 \alpha_1^2\right) \bar{u}^2 - \frac{7807}{560} p \bar{u}^4 \Sigma \alpha_1^2\right] \eta(\zeta),$$

mithin ist dann

$$c^2 = 2 p \left(1 - \frac{703}{60} h^2 \Sigma i^2 \alpha_1^2\right) - \frac{7807}{560} p k^2 \Sigma \alpha_1^2.$$

Dies führt zu der Gleichung

$$\left(\frac{n_1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{L_0}\right)^2,$$

deren näherungsweise Lösung giebt

$$\frac{n}{n_1} = 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\lambda}{L_0}\right)^2,$$

wo λ das Zerstreuungsvermögen bedeutet.

4. Dispersionsformeln nach den Rechnungen von Ketteler*).

Ketteler hat sich folgende Aufgabe gestellt: „Ist es möglich, aus dem vielen Material mit Innehaltung eines streng kritischen empirischen Standpunktes zu einer Formel zu gelangen, die einerseits bei der bis jetzt erzielten Genauigkeit der Versuche als die einzig zulässige und dabei als die dem heutigen Stande der Theorie einzig entsprechende erachtet werden müsse?“ Die Forderungen an eine richtige Formel sind enthalten in den folgenden vier Hauptpunkten:

1) „Eine rationelle Formel muss bei einer bestimmten Dichtigkeit des dispergirenden Mittels für den ganzen Umfang der Strahlung, soweit sie gemessen ist, die Farben in richtiger räumlicher Aufeinanderfolge aus den Wellenlängen berechnen lassen.“

*) Pogg. CXL. 1—52, 177—219, Jubelband 166—182. Rechnungen zu demselben Zweck sind angestellt worden von W. Schmidt: Die Brechung des Lichts in Gläsern. Leipzig; Die Lichtbrechung im Wasser. Programm, Grimma 1874.

2) „Ihren Constanten muss, etwa in analoger Weise wie bei der Interpretation Christoffel's, eine specifisch physikalische Bedeutung untergelegt werden können."

3) „Bei Dichtigkeitsänderungen seitens der dispergirenden Substanz müssen diese Constanten in einer einfachen den Gasversuchen entsprechenden Weise an den Aenderungen der Molekular-Constitution participiren." Speciell also müssen

4) „an der Grenze der Verdünnung sämmtliche Indices gleichzeitig den Grenzwerth 1 erreichen."

Es kommt dann Ketteler zur Aufstellung der Formel

$$\frac{1}{n^2} = \left(\frac{K}{A} l^2 + 1\right) A + \frac{B}{l^2}\left(1 + \frac{C'}{l^2}\right),$$

oder

$$\frac{1}{n^2} = \frac{A}{1 - k l^2} + \frac{B}{l^2 - C''}.$$

Die speciellen Annahmen über die darin vorkommenden Constanten erläutert Ketteler (Poggendorf, Jubelb.) durch Construction der betreffenden Dispersionscurven, d. h. der Curven, welche man erhält, wenn man für ein rechtwinkliges Coordinatensystem die verschiedenen Wellenlängen als Abscissen, die zugehörigen Brechungsexponenten als Ordinaten aufträgt und dann die Endpunkte der Ordinaten verbindet.

1., $\quad B = 0 \;,\; C'' = 0 \;,\;$ also $n^2 = \frac{1}{A}\left(1 - k l^2\right).$

Setzt man statt l, der Wellenlänge im brechenden Medium, die Wellenlänge λ im Weltäther, so ist, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Weltäther $= 1$ genommen wird,

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{T \cdot c}{T \cdot 1} = \frac{1}{n}, \text{ also } l = \frac{\lambda}{n}.$$

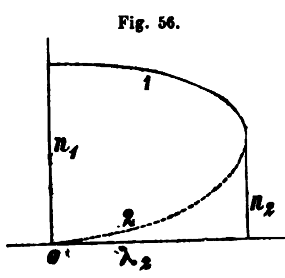
Die obige Gleichung wird dann, wenn noch

$$A = \frac{1}{n_1^2}, \quad \frac{4k}{n_1^2} = 4K = \frac{1}{\lambda_2^2}$$

eingeführt wird,

$$n = \frac{n_1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{\lambda_2}} \pm \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}}\right).$$

Fig. 56.



Jeder Wellenlänge λ entsprechen demnach immer zwei verschiedene n, ausgenommen $\lambda = \lambda_2$, wofür ist $n = n_2 = \frac{n_1}{\sqrt{2}}$.

Ist $\lambda > \lambda_2$, so ist n imaginär, also würde das Mittel für Strahlen dieser Wellen undurchsichtig sein.

Fig. 56 stellt die hierher gehörige Dispersionscurve vor.

Noch kennt man kein Mittel, dessen Dispersion dieser Curve entspräche, — am ersten vielleicht Glycerin — und daher bleibt die Bedeutung der beiden Zweige vor der Hand dunkel.

2., $$k = 0\ ,\ C'' = 0\ ,\ \text{also}\ \frac{1}{n^2} = A + \frac{B}{l^2}.$$

Setzt man hier wiederum

$$l = \frac{\lambda}{n}\ \text{und}\ A = \frac{2}{n_0^2}\ ,\ B = -\frac{\lambda_0^2}{n_0^4},$$

so geht unsere Formel über in

$$n = \frac{n_0\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{\lambda_0}{\lambda}} \pm \sqrt{1-\frac{\lambda_0}{\lambda}}}.$$ (Formel von Christoffel.)

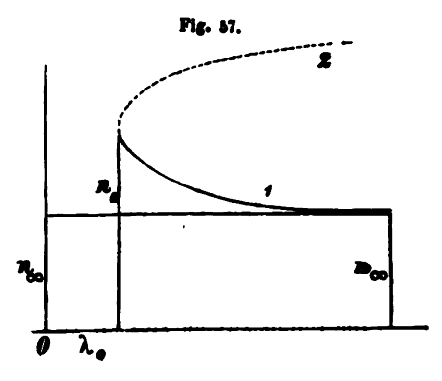


Fig. 57.

Für $\lambda < \lambda_0$ giebt dies imaginäre n (Fig. 57) und $\lambda = \lambda_0$ ist $n = n_0$. Von $\lambda = \lambda_0$ an giebt es immer zwei Werthe von n. Der Erfahrung gemäss genügt diese Formel näherungsweise zur Darstellung der Dispersion des Lichtes, und zwar nur der Zweig 1, denn der Zweig 2 würde für $\lambda = \infty$, $n = \infty$ geben. Für

$$\lambda = \infty \text{ ist } n_\infty = \frac{n_0}{\sqrt{2}};$$

es nähert sich also die Dispersionscurve asymptotisch der zur Abscissenaxe Parallelen in der Entfernung $\frac{n_0}{\sqrt{2}}$ von derselben.

3., $$k = 0\ ,\ \frac{1}{n^2} = A + \frac{B}{l^2 - C''}$$

Setzt man hier für $l = \infty$ $n = n_\infty$, so ist $A = \frac{1}{n_\infty^2}$ und führt man die neuen Constanten D und $\varLambda_0$ ein, welche definirt sind durch

$$B = -\frac{D}{n^2}\varLambda_0^2,\ C'' = \varLambda_0^2 (1 - D),$$

so geht unsere Dispersionsformel über in

$$n^2 - n_\infty^2 = \frac{D n_\infty^2}{\frac{l^2}{\varLambda_0^2} - 1}.$$

Zu bedenken ist aber, dass D nur < 1 sein kann; $D = 1$ machte $\varLambda_0$ und damit $C'' = 0$, was uns auf 2., zurückführen würde.

Diese Definition ergiebt sich wie folgt: Setzen wir $l = 0$, so sei $n = n_0$, mithin $n_\infty^2 - n_0^2 = D n_\infty^2$; denn es ist

$$n_0^2 = 1 : \left(A - \frac{B}{C''}\right) = n_\infty^2 \frac{C''}{C'' - B n_\infty^2} = n_\infty^2 (1 - D).$$

Wenn nun noch D′ statt $D n_\infty^2$ und $\frac{\lambda}{n}$ statt l gesetzt wird und dann die erhaltene Dispersionsgleichung für n aufgelöst wird, so erhält man:

$$n^2 = \frac{1}{2}\left(n_\infty^2 - D' + \frac{\lambda^2}{\Lambda_0^2}\right) \mp \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(n_\infty^2 - D' + \frac{\lambda^2}{\Lambda_0^2}\right)\right]^2 - n_\infty^2 \frac{\lambda^2}{\Lambda_0^2}}$$

oder

$$n = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(n_\infty + \frac{\lambda}{\Lambda_0}\right)^2 - D'} \mp \sqrt{\left(n_\infty - \frac{\lambda}{\Lambda_0}\right)^2 - D'}\right\}.$$

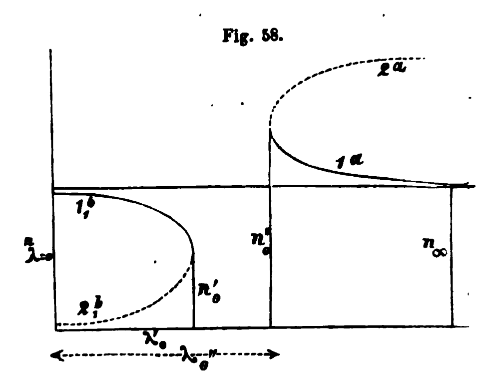


Fig. 58.

Die Curve (Fig. 58) besteht wiederum aus zwei Zweigen, die bei $\lambda = \lambda_0', \lambda_0''$ zusammentreffen und dann getrennt werden durch einen imaginären Streifen.

Für $\lambda = 0$ ist $n_{\lambda=0} = \frac{1}{2}\{\sqrt{n_\infty^2 - D'} \mp \sqrt{n_\infty^2 - D'}\}$, also ist $n_{\lambda=0}$ entweder 0 oder $\sqrt{n_\infty^2 - D'}$.

Die Doppelzweige stossen zusammen, wenn der Radicand im ersten Ausdruck verschwindet. Die dazu gehörige Wellenlänge sei λ_0, dann gilt also zur Berechnung von λ_0

$$\frac{1}{2}\left(n_\infty^2 - D' + \frac{\lambda_0}{\Lambda_0}\right) = n_\infty \frac{\lambda}{\Lambda_0},$$

folglich

$$\frac{\lambda_0}{\Lambda_0} = n_\infty \mp \sqrt{D'}.$$

Die dazu gehörigen n, also die n_0' und n_0'' sind

$$\sqrt{n_\infty (n_\infty \mp \sqrt{D'})}$$

oder

$$D' = \frac{(n_0'^2 - n_\infty^2)^2}{n_\infty^2}.$$

Zu gleicher Zeit folgt aus dieser Rechnung, dass die Curve imaginär ist zwischen λ_0' und λ_0'', also auf eine Breite $\lambda_0'' - \lambda_0'$. Ist $\lambda = \infty$, so nähert sich n, wie man durch Reihenentwickelung erfährt, für den Zweig 1a dem asymptotischen Grenzwerthe n_∞. Setzen wir $\lambda = -\infty$, so würde der Zweig 1b sich derselben Asymptote nähern. Dieses Dispersionsgesetz befolgt sehr genau der Schwefelkohlenstoff und zwar entsprechen die Beobachtungen dem Zweige 1a, so dass also die Curve 1 physische Geltung hätte und der imaginäre Theil und 1b gehöre dem Ultravioletten an.

4.,
$$\frac{1}{n^2} = \frac{A}{1 - k^2 l^2} + \frac{B}{l^2}.$$

Die Bestimmung von n, wenn noch gesetzt wird

$$l = \frac{\lambda}{n},$$

giebt dann n als eine Function des dritten Grades. Die Curve erhält ungefähr die Fig. 59 gezeichnete Gestalt, wo die Grenzwerthe sich finden im ultravioletten und ultrarothen Theil des Spectrums.

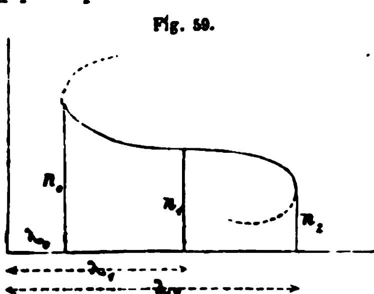


Fig. 59.

5.,
$$\frac{1}{n^2} = \frac{A}{1 - k l^2} + \frac{B}{l^2 - C''}.$$

Setzen wir hier $A = \frac{1}{n_1^2}$ und behalten im Uebrigen die früher eingeführten Bezeichnungen bei, so ist

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_1^2}\left(\frac{1}{1 - k l^2} - \frac{D \Lambda_0^2}{l^2 - \Lambda_0^2 (1 - D)}\right).$$

Die Curve Fig. 60 unterscheidet sich von Fig. 58 nur dadurch, dass zu beiden Grenzwerthen der imaginären Zone ein neuer für grosse Wellenlängen hinzutritt. Dieses Mittel wäre also undurchdringlich für Strahlen, deren Wellen zwischen λ_0' und λ_0'' liegen und für solche, die grösser als λ_2 sind.

Ein derartiges Mittel würde also zwei Spectren geben, die sich einander theilweise superponiren.

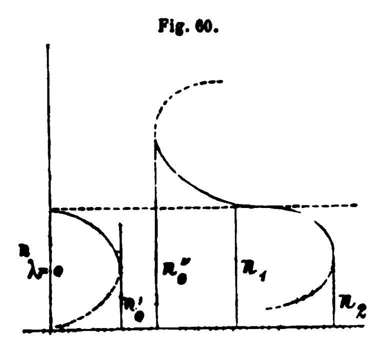


Fig. 60.

Es ist ausserdem wie unter 4. ein Wendepunkt vorhanden. Dieser Curve folgt die Dispersion aller von Ketteler berechneten Substanzen: Wasser, Flintglas Rosette, Flintglas Merz, Sylvin, Kalkspath. Für alle liegt die Zone des Imaginären im Ultraviolett und n_2 im Ultraroth.

Will man nun diese Untersuchung verallgemeinern für mehrere solche Zonen des Imaginären oder für eine Zusammenstellung von mehreren derartigen Zweigen, so muss man in der Formel noch Glieder hinzufügen. So wird man die Curven erhalten, die den in § 331 genau theoretisch erörterten entsprechen.

Es giebt dann Ketteler dem so gefundenen Dispersionsgesetz folgende allgemeine Form, indem er setzt

$$-\frac{A}{k} = M, \quad \frac{1}{k} = N,$$

wodurch sein erstes Glied $\frac{A}{1 - k l^2}$ gebracht ist auf die Form $\frac{M}{l^2 - N}$,

$$\frac{1}{n^2} = \Sigma \frac{M}{l^2 - N}.$$

Weitere Erörterung über die Dispersion findet sich in § 331.

Das reine Sonnenspectrum.*) (§ 311.)

1. Allgemeine Gleichungen.

Um die Methode zur genauen Beobachtung eines reinen Spectrums zu finden, müssen wir die allgemeine Erörterung über die Lage der Brennpunkte von § 304, 7. auf Prismen anwenden. Es gelten also zunächst die Gleichungen (α.) (β.) (γ.) in § 300, 1. und es müssen dann die den Gleichungen in § 304, 7. ⊙ entsprechenden für das Prisma abgeleitet werden. Wir bezeichnen mit Δy, Δz, $\Delta \eta$, $\Delta \zeta$ die kleinen Differenzen von y, z, η, ζ für die benachbarten Strahlen. Die 2m Gleichungen ⊙ reduciren sich demnach auf die folgenden vier:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Delta y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial z} \Delta z + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial \zeta} \Delta \zeta = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta\, \partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \Delta \eta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta\, \partial z} \Delta z + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta\, \partial \zeta} \Delta \zeta = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Delta z + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial \zeta} \Delta \zeta = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta\, \partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta\, \partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta\, \partial z} \Delta z + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \Delta \zeta = 0.$$

Die Ausführung der angedeuteten Differentiation giebt dann die folgenden Ausdrücke, welche sich auch abgekürzt schreiben lassen, wenn man sagt, was nach § 300, 1. (γ) erlaubt ist.

$$\frac{b - y}{n l_0} = \frac{y - \eta \cos \varphi}{l_1} = \cos m,$$

$$\frac{\beta - \eta}{n l_2} = \frac{\eta - y \cos \varphi}{l_1} = \cos \mu,$$

$$\frac{\zeta - \gamma}{n l_2} = \frac{c - z}{n l_0} = \frac{z - \zeta}{l_1} = \cos \nu,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{l_0} - \frac{(y - b)^2}{l_0^3} + n\left(\frac{1}{l_1} - \frac{(y - \eta \cos \varphi)^2}{l_1^3}\right) = \frac{1}{l_0}(1 - n^2 \cos^2 m) + \frac{n}{l_1} \sin^2 m,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \eta} = -n \frac{(y - \eta \cos \varphi)(\eta - y \cos \varphi)}{l_1^3} - \frac{n \cos \varphi}{l_1} = -\frac{n}{l_1}(\cos \varphi + \cos m \cos \mu).$$

---

*) Helmholtz, a. a. O. § 19.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} = -n\frac{(y-\eta\cos\varphi)(z-\zeta)}{l_1^3} - \frac{(y-b)\,z--c)}{l_0^3} = -\left(\frac{n}{l_1}+\frac{n^2}{l_0}\right)\cos m\cos\nu,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial\zeta} = n\frac{(y-\eta\cos\varphi)(z-\zeta)}{l_1^3} \qquad = \frac{n}{l_1}\cos m\cos\nu,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = \frac{1}{l_2} - \frac{(\eta-\beta)^2}{l_2^3} + n\left(\frac{1}{l_1} - \frac{(\eta-y\cos\varphi)^2}{l_1^3}\right) = \frac{1}{l_2}(1-n^2\cos^2\mu) + \frac{n}{l_1}\sin^2\mu,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial z} = -n\frac{(\eta-y\cos\varphi)(z-\zeta)}{l_1^3}, \qquad = -\frac{n}{l_1}\cos\mu\cos\nu,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\zeta} = \frac{(\eta-\beta)\gamma-\zeta)}{l_2^3} + n\frac{(\eta-y\cos\varphi)(z-\zeta)}{l_1^3} \qquad = \left(\frac{n^2}{l_2}+\frac{n}{l_1}\right)\cos\mu\cos\nu,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{l_0} - \frac{(z-c)^2}{l_0^3} + n\left(\frac{1}{l_1} - \frac{(z-\zeta)^2}{l_1^3}\right) \qquad = \frac{1}{l_0}\left(1-n^2\cos^2\nu\right) + \frac{n}{l_1}\sin^2\nu,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\zeta} = n\frac{(z-\zeta)^2}{l_1^3} - n\frac{1}{l_1} \qquad = -\frac{n}{l_1}\sin^2\nu,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} = \frac{1}{l_2} - \frac{(\zeta-\gamma)^2}{l_2^3} + n\left(\frac{1}{l_1} - \frac{(\zeta-z)^2}{l_1^3}\right) \qquad = \frac{1}{l_2}\left(1-n^2\cos^2\nu\right) + \frac{n}{l_1}\sin^2\nu.$$

Diese Werthe müssen nun in die obigen Gleichungen eingeführt werden, um die Lage der Brennpunkte und die Verhältnisse der Coordinaten Δy, Δz, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ je zweier benachbarter und sich in conjugirten Brennpunkten schneidender Strahlen zu finden. Man erhält:

$$\left[\frac{1}{l_0}(1-n^2\cos^2 m) + \frac{n}{l_1}\sin^2 m\right]\Delta y - \left(\frac{n^2}{l_0}+\frac{n}{l_1}\right)\cos m\cos\nu\,\Delta z$$
$$-\frac{n}{l_1}(\cos\varphi+\cos m\cos\mu)\,\Delta\eta + \frac{n}{l_1}\cos m\cos\nu\,\Delta\zeta = 0, \quad \text{(a.)}$$

$$-\left(\frac{n^2}{l_0}+\frac{n}{l_1}\right)\cos m\cos\nu\,\Delta y + \left[\frac{1}{l_0}(1-n^2\cos^2\nu) + \frac{n}{l_1}\sin^2\nu\right]\Delta z$$
$$-\frac{n}{l_1}\cos\mu\cos\nu\,\Delta\eta - \frac{n}{l_1}\sin^2\nu\,\Delta\zeta = 0, \quad \text{(b.)}$$

$$-\frac{n}{l_1}(\cos\varphi+\cos m\cos\mu)\,\Delta y - \frac{n}{l_1}\cos\mu\cos\nu\,\Delta z + \left[\frac{1}{l_2}(1-n^2\cos^2\mu) + \frac{n}{l_1}\sin^2\mu\right]\Delta\eta$$
$$+\left(\frac{n^2}{l_2}+\frac{n}{l_1}\right)\cos\mu\cos\nu\,\Delta\zeta = 0, \quad \text{(c.)}$$

$$\frac{n}{l_1}\cos m\cos\nu\,\Delta y - \frac{n}{l_1}\sin^2\nu\,\Delta z + \left(\frac{n^2}{l_2}+\frac{n}{l_1}\right)\cos\mu\cos\nu\,\Delta\eta$$
$$+\left[\frac{1}{l_2}(1-n^2\cos^2\nu) + \frac{n}{l_1}\sin^2\nu\right]\Delta\zeta = 0. \quad \text{(d).}$$

Eine Vereinfachung dieser Gleichungen ergiebt sich, wenn wir, wie es in der Wirklichkeit immer der Fall sein wird, l_1 sehr klein gegen l_0 und l_2 setzen, so dass, wenn wir die Gleichungen mit l_1 multipliciren, die Ausdrücke, in denen l_1 als Faktor erscheint, vernachlässigen. Damit vereinfachen sich die Gleichungen in die folgenden, wenn noch überall durch n dividirt wird:

$$\sin^2 m\, \Delta y - (\cos\varphi + \cos m \cos\mu)\, \Delta\eta - \cos m \cos\nu\, (\Delta z - \Delta\zeta) = 0,$$
$$-\cos m \cos\nu\, \Delta y - \cos\mu \cos\nu\, \Delta\eta + \sin^2\nu\, (\Delta z - \Delta\zeta) = 0,$$
$$-(\cos\varphi + \cos m \cos\mu)\, \Delta y + \sin^2\mu\, \Delta\eta - \cos\mu \cos\nu\, (\Delta z - \Delta\zeta) = 0.$$

(b.) und (d.) geben zwei identische Gleichungen.

Diese drei Gleichungen enthalten nun zunächst die Bedingung, der die Coordinaten des Brennpunktes unterworfen sein müssen, also die Bedingung der Existenz eines Brennpunktes. Wenn wir den in den Gleichungen vorkommenden Coefficienten zu diesem Zwecke einfache Zeichen geben, deren Bedeutung sofort zu erkennen ist, so muss also nach § 304, 7. verschwinden

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b & -c \\ -c & -d & a_3 \\ -b & a_2 & -d \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & -b & -c \\ -b & a_2 & -d \\ -c & -d & a_3 \end{vmatrix}$$
$$= -[a_1 a_2 a_3 - a_1 d^2 - a_2 c^2 - a_3 b^2 - 2\, bcd].$$

Setzt man dann die Werthe für die kleinen Buchstaben, so findet man nach einer einfachen Umformung folgenden Ausdruck dieser Bedingung:

$$\sin^2\varphi \sin^2\nu = \cos^2 m + 2 \cos m \cos\mu \cos\varphi + \cos^2\mu. \quad \text{(e.)}$$

Durch Einsetzung der Werthe dieser cos. überzeugt man sich leicht, dass diese Gleichung erfüllt ist. Nachdem dies bekannt ist, setzen wir nach den Lehren über die Anwendung der Determinanten auf ein lineares System von Gleichungen

$$\Delta y : \Delta\eta : \Delta z - \Delta\zeta = \begin{vmatrix} a_2 & -d \\ -d & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -d & -b \\ a_3 & -c \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -b & a_2 \\ -c & -d \end{vmatrix},$$
$$= \begin{vmatrix} -d & a_3 \\ -b & -c \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & -c \\ -c & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -c & -d \\ a_1 & -b \end{vmatrix},$$
$$= \begin{vmatrix} -b & -c \\ a_2 & -d \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -c & a_1 \\ -d & -b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & -b \\ -b & a_2 \end{vmatrix}.$$

d. i.

$$\Delta y : \Delta\eta : \Delta z - \Delta\zeta = a_2 a_3 - cd \; : \; c^2 + ba_3 \; : \; bd + a_2 c,$$
$$= dc + ba_3 \; : \; a_1 a_3 + c^2 \; : \; bc + a_1 d,$$
$$= bc + ca_2 \; : \; bc + a_1 c \; : \; a_1 a_2 - b^2.$$

Die Ausführung dieser Determinanten giebt:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta z - \Delta\zeta}{z - \zeta}, \quad \text{(f.)}$$

ein Resultat, das unserer gemachten Annahme entspricht, denn, wenn l_1 verschwinden soll, so können die Strahlen auf ihrem kurzen Weg durch das Prisma als beinahe parallel angesehen werden, was jene Gleichungen zwischen Δy, y, $\Delta\eta$, η, $\Delta z - \Delta\zeta$, $z - \zeta$ ausdrücken.

Wir haben also nun $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ ausgedrückt durch Δy und Δz und müssen demnach aus den allgemeinen Gleichungen für die Bestimmung des Brennpunktes (a.) bis (d.) noch zwei Gleichungen suchen zur Berechnung von

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} \text{ und } \frac{l_2}{l_0},$$

in denen l_1 nicht enthalten ist.

Wir addiren die beiden Gleichungen (b.) und (d.) und erhalten

$$-\frac{n^2}{l_0}\cos m \cos\nu\,\Delta y + \frac{n^2}{l_2}\cos\mu\cos\nu\,\Delta\eta + \frac{1}{l_0}(1 - n^2\cos^2\nu)\,\Delta z$$
$$+ \frac{1}{l_2}(1 - n^2\cos^2\nu)\,\Delta\zeta = 0 \qquad \text{(g.)}$$

oder nach Einsetzung der Werthe für die cos.

$$-\frac{(y-b)(z-c)}{l_0^3}\Delta y + \frac{(\eta-\beta)(\gamma-\zeta)}{l_2^3}\Delta\eta + \frac{(l_0^2-(z-c)^2)}{l_0^3}\Delta z$$
$$+\frac{(l_2^2-(\zeta-\gamma)^2)}{l_2^3}\Delta\zeta = 0.$$

Eine zweite Gleichung finden wir, wenn wir die (a.) (b.) (c.) beziehungsweise mit y, $z-\zeta$, η multipliciren und die erhaltenen Producte addiren. Statt der Grössen y, $z-\zeta$, η nehmen wir deren Werthe ausgedrückt durch unsere cos., nämlich

$$y = \frac{l_1}{\sin^2\varphi}(\cos m + \cos\mu\cos\varphi),$$
$$z - \zeta = l_1\cos\nu,$$
$$\eta = \frac{l_1}{\sin^2\varphi}(\cos\mu + \cos m\cos\varphi).$$

Die resultirende Gleichung ist

$$\frac{y}{l_0}\left\{(1-n^2\cos^2 m)\,\Delta y - n^2\cos m\cos\nu\,\Delta z\right\}$$
$$+\frac{z-\zeta}{l_0}\left\{-n^2\cos m\cos\nu\,\Delta y + (1-n^2\cos^2\nu)\,\Delta z\right\}$$
$$+\frac{\eta}{l_2}\left\{(1-n^2\cos^2\mu)\,\Delta\eta + n^2\cos\mu\cos\nu\,\Delta\zeta\right\} = 0, \qquad \text{(h.)}$$

oder nach Einsetzung der Werthe für die cos.

$$\frac{1}{l_0^3}\left[y l_0^2 - (y-b)^2 y - (y-b)(z-c)(z-\zeta)\right]\Delta y$$
$$+\frac{1}{l_2^3}\left[\eta l_2^2 - \eta(\eta-\beta)^2\right]\Delta\eta$$
$$+\frac{1}{l_0^3}\left[(z-\zeta)\,l_0^2 - (y-b)(z-c)\,y - (z-c)^2(z-\zeta)\right]\Delta z$$
$$+\frac{1}{l_2^3}\left[(z-\zeta)\,l_2^2 + (\eta-\beta)(\gamma-\zeta)\,\eta - (\zeta-\gamma)^2(z-\zeta)\right]\Delta\zeta = 0.$$

Diese beiden Gleichungen (g.) und (h.), wenn in ihnen die aus (f.) durch Δy und Δz bestimmten Werthe von $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ eingesetzt werden, geben dann die noch unbekannten Verhältnisse $\frac{\Delta z}{\Delta y}$ und $\frac{l_2}{l_0}$.

2. Anwendung der Formeln der vorigen Nummer auf specielle Fälle.

1) Es mögen homocentrische Strahlen von dem Punkte a, b, c nach dem Prisma gehen. Unter welchen Bedingungen werden die Strahlen homocentrisch bleiben und wo ist ihr Vereinigungspunkt?

Da nur solche Strahlen berücksichtigt werden, die sich schneiden sollen, so können wir irgend welche Werthe von Δy und Δz nehmen und es müssen doch die Bedingungsgleichungen der vorigen Nummer erfüllt werden. Wir können demnach jede dieser Grössen für sich gleich Null setzen und darnach die Bedingungen suchen.

a) Setzen wir $\Delta y = 0$, betrachten wir also nur die benachbarten Strahlen in der xy-Ebene, d. h. in der Ebene senkrecht zur brechenden Kante des Prismas, so reduciren sich die Gleichungen, wenn noch in Folge der Gleichung (f.) $\Delta\eta = 0$ und $\Delta z = \Delta\zeta$ gesetzt wird.

Aus (g.) wird $\left(\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_2}\right)(1 - n^2 \cos^2 \nu) = 0.$ (i.)

„ (h.) „

$$-yn^2 \cos m \cos \nu + (z - \zeta)(1 - n^2 \cos^2 \nu) - \eta n^2 \cos \mu \cos \nu = 0. \quad \text{(k.)}$$

Die Gleichung (i.) ist einmal erfüllt, wenn

$$(1 - n^2 \cos^2 \nu) = 0,$$

oder nach Einsetzung des Werthes von $\cos \nu$, wenn

$$1 - \left(\frac{c - z}{l_0}\right)^2 = 0,$$

d. i. wenn $c - z = l_0$ ist. Dies kann aber nur gelten, wenn der Ausgangspunkt der homocentrischen Strahlen in der ersten Ebene des Prismas liegt, also die brechende Ebene streift. Von solchen Strahlen muss hier abgesehen werden, also kann (i.) nur genügt werden durch

$$l_0 = - l_2.$$

Wird nun in (k.) gesetzt $z - \zeta = l_1 \cos \nu$ nach 1., so wird diese Gleichung mit Berücksichtigung von (f.)

$$(1 - n^2) \cos \nu \sin^2 \varphi = 0.$$

Dieser Bedingung kann nur genügt werden durch $\cos \nu = 0$, also ist

$$c = z = \zeta = \gamma.$$

b) Setzen wir $\Delta z = 0$, betrachten wir also nur die benachbarten Strahlen in der xz-Ebene, also in der Ebene parallel der brechenden Kante. Benutzen wir dann die schon gefundene Bedingung $l_0 = - l_2$, so resultirt, wenn wir die Einsetzung in (g.) vornehmen, wiederum die Bedingung $\cos \nu = 0$.

Setzen wir dann diese erhaltenen Werthe $l_0 = - l_2$, $\cos \nu = 0$, also $\sin^2 \nu = 1$, $c = z = \zeta = \gamma$ neben $\Delta z = 0$ in (h.) ein, so finden wir nach einiger Transformation unter Berücksichtigung der Gleichung (f.), dass sie nur gelten kann, wenn $\cos^2 m = \cos^2 \mu$ oder $y = b$ ist.

Das Resultat dieser Untersuchung kann man also, wenn man die in § 300, 2. aufgestellten Bedingungen über die Minimalablenkung benutzt,

folgendermassen aussprechen: Alle Strahlen, die von einem Punkte (a, b, c) ausgehen, bleiben homocentrisch, wenn sie so durch das Prisma gehen, dass die Ablenkung des Strahles von seinem ursprünglichen Wege ein Min. ist, und das entstehende Bild ist virtuell auf der Seite des Prismas, auf der der leuchtende Punkt liegt, und zwar ebenso weit entfernt, aber in anderer Richtung.

2) Wo wird, wenn von einer leuchtenden Linie, die parallel der brechenden Kante ist, Strahlen ausgehen, ein Bild dieser Linie zu finden sein?

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass Abweichungen der Strahlen in der Richtung der z in Bezug auf die Deutlichkeit des Bildes der Linie nichts schaden. Sollen also nur solche Abweichungen vorkommen, so müssen wir $\Delta y = 0$ setzen. Wenn wir nun dies in die Gleichungen (g.) und (h.) einführen, so erhalten wir nach der Untersuchung unter a)

1) $\left(\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_2}\right)(1 - n^2 \cos^2 \nu) = 0$ und daraus $l_0 = -l_2$,

2) $(1 - n^2) \cos \nu \sin^2 \varphi = 0$ und daraus $\cos \nu = 0$ oder $c = z = \zeta = \gamma$.

Beide Bedingungen gleichzeitig benutzt geben dann dasselbe Resultat wie oben, so dass also beim Min. der Ablenkung eine Vereinigung der Strahlen existirt.

Die zweite eben angegebene Bedingung zeigt aber, dass es noch eine Convergenzebene giebt senkrecht zur brechenden Kante, d. h. für $\Delta z = 0$, suchen wir daher für diese Ebene die Vereinigungsweite der auffallenden Strahlen. Für alle diese Strahlen ist also $\cos \nu = 0$ $\Delta z = 0$ und folglich nach (g.) auch $\Delta \zeta = 0$.

Durch Einsetzung dieser Werthe in (h.) mit Benutzung von (f.) erhalten wir.

$$\frac{y^2}{l_0}(1 - n^2 \cos^2 m) + \frac{\eta^2}{l_2}(1 - n^2 \cos^2 \mu) = 0,$$

oder

$$\frac{y^2}{l_0}\left(1 - \frac{(b-y)^2}{l_0^2}\right) + \frac{\eta^2}{l_2}\left(1 - \frac{(\beta - \eta)^2}{l_2^2}\right) = 0.$$

Bedenken wir nun, dass Fig. 31, S. 289 nach dem Sinussatz im $\triangle tt^1B$, wenn $B = \varphi$ gesetzt wird,

$$\cos \beta = \frac{\eta}{l_1} \sin \varphi. \qquad \cos \beta' = \frac{y}{l_1} \sin \varphi.$$

$$\sin \alpha = n \sin \beta \qquad \sin \alpha' = n \sin \beta'$$

$$= n\sqrt{1 - \frac{\eta^2 \sin^2 \varphi}{l_1^2}} \qquad = n\sqrt{1 - \frac{y^2 \sin^2 \varphi}{l_1^2}},$$

$$= n\frac{y - \eta \cos \varphi}{l_1} = \frac{y - b}{l_0} \qquad = n\frac{\eta - y \cos \varphi}{l_1} = \frac{\eta - \beta}{l_2}$$

ist, so wird unsere Bedingung nach Einsetzung der hieraus sich ergebenden Werthe von η, y, $b - y$, $\beta - \eta$

$$\frac{1}{l_0}(\cos^2\beta'\cos^2\alpha)+\frac{1}{l_2}(\cos^2\beta\cos^2\alpha')=0$$

oder

$$\frac{l_2}{l_0}=-\frac{\cos^2\beta\cos^2\alpha'}{\cos^2\beta'\cos^2\alpha}.$$

Die Entfernung des Bildes einer der brechenden Kante parallelen Lichtlinie vom Prisma ist also grösser als die Entfernung des Objects, wenn der Einfallswinkel an der ersten Fläche des Prismas, auf welches die Lichtstrahlen fallen, grösser ist als beim Minimum der Ablenkung. Die Entfernung des Bildes ist dagegen kleiner als die des Objects, wenn jener Einfallswinkel kleiner ist.

Will man also eine Lichtlinie durch ein Prisma mit blossem Auge oder mit einem Fernrohr beobachten, so muss man für das Min. der Ablenkung Auge oder Fernrohr für die Entfernung des wirklichen Objects einrichten. Wenn man aber das Prisma dann um eine der brechenden Kante parallele Axe dreht, muss man auch die Einrichtung des Auges oder Fernrohrs passend abändern.

3. Scheinbare Breite der prismatischen Bilder.

Nach den Bezeichnungen § 301 Fig. 31 ist

$$\sin\alpha=n\sin\beta,\quad \sin\alpha'=n\sin\beta',\quad \beta+\beta'=B=\varphi.$$

Ist der Spalt sehr weit entfernt und der sehr kleine Gesichtswinkel, unter dem er vom Orte des Prismas aus gesehen wird $d\alpha$, so dass also die Randstrahlen einfallen unter dem Winkel α und $\alpha+d\alpha$, so gilt auch

$$\sin(\alpha+d\alpha)=n\sin(\beta+d\beta),$$
$$\sin(\alpha'+d\alpha')=n\sin(\beta'+d\beta'),$$
$$\beta+d\beta+\beta'+d\beta'=\varphi,$$

mithin für sehr kleine $d\alpha$

$$\cos\alpha\,d\alpha=n\cos\beta\,d\beta,\quad \cos\alpha'\,d\alpha'=n\cos\beta'\,d\beta',\quad d\beta+d\beta'=0.$$

Daraus ergiebt sich durch Elimination von $d\beta$ und $d\beta'$:

$$d\alpha'=-\frac{\cos\alpha\ \cos\beta'}{\cos\alpha'\cos\beta}\,d\alpha,$$

wo nun $d\alpha'$ der gesuchte Gesichtswinkel ist, unter dem der Spalt erscheint, also die Breite des Bildes.

1) Für die Minimalablenkung ist $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, also $d\alpha'=-d\alpha$, d. h. die scheinbare Grösse des Spaltes bleibt unverändert.

2) Für das Maximum $\alpha=90^\circ$ ist, da dann die anderen Winkel spitze bleiben, so dass deren cos. nicht Null werden können, $d\alpha'=0$. Diese Grenze ist aber nie vollkommen zu erreichen; denn $\alpha=90^\circ$ heisst die eintretenden Strahlen streifen das Prisma.

3) Für das Maximum $\alpha'=90^\circ$ ist $d\alpha'=-\infty$. In Bezug auf dieses Resultat gilt dieselbe Bemerkung wie zu 2); denn $\alpha'=90^\circ$ heisst der austretende Strahl streift das Prisma.

4) Da nach der vorigen Nummer $\frac{l_0}{l_2} = -\frac{\cos^2\beta' \cos^2\alpha}{\cos^2\beta \cos^2\alpha'}$ ist, so ergiebt sich der allgemeine Ausdruck $d\alpha' = \sqrt{\frac{l_0}{l_2}} \cdot d\alpha$.

4. Reinheit des Spectrums.

Ein Spectrum wird um so reiner sein, je weniger verschiedenfarbig die Strahlen sind, welche von einer Stelle desselben in die Augen gelangen, d. h. je weniger verschieden die Brechungsexponenten derselben sind. Nehmen wir nun an, es treffen gleichzeitig das Auge von einer Stelle des Spectrums, also für ein bestimmtes α' Strahlen, deren Brechungsexponenten liegen zwischen n und n + dn, so wird das Spectrum um so reiner je kleiner dn ist, so dass also dn als Werth der Unreinheit betrachtet werden kann. Wir haben demnach für die betreffenden Strahlen folgende Gleichungen

$$\sin\alpha = n \sin\beta,$$
$$\sin\alpha' = n \sin\beta',$$
$$\beta + \beta' = \varphi. \quad \text{und}$$

für die Strahlen, deren Brechungsexponent n + dn ist, ändert sich auch α, β, β', so dass dafür gilt

$$\sin(\alpha + d\alpha) = (n + dn)\sin(\beta + d\beta),$$
$$\sin\alpha' = (n + dn)\sin(\beta' + d\beta'),$$
$$(\beta + d\beta) + (\beta' + d\beta') = \varphi.$$

Die Differenz dieser Gleichungen giebt bei kleinem dn

$$\cos\alpha\, d\alpha = dn \sin\beta + d\beta\, n\cos\beta,$$
$$0 = dn\sin\beta' + d\beta'\, n\cos\beta',$$
$$d\beta + d\beta' = 0.$$

Daraus ergiebt sich durch Elimination von $d\beta$ und $d\beta'$

$$\cos\alpha\cos\beta'\, d\alpha = (\sin\beta\cos\beta' + \cos\beta\sin\beta')\, dn,$$
$$= \sin\varphi\, dn, \text{ oder}$$
$$dn = \frac{\cos\alpha\cos\beta'}{\sin\varphi}\, d\alpha,$$

wo $d\alpha$, wie in 3., die scheinbare Breite des Spaltes vom Prisma aus gesehen bedeutet.

Die Reinheit des Spectrums wird also vergrössert, d. h. dn verkleinert, wenn $d\alpha$, also die Breite des Spaltes, möglichst verkleinert wird. $\cos\alpha$ zu verkleinern ist unpraktisch; denn bei sehr schiefer Incidenz geht viel Licht wegen der zunehmenden Reflexion verloren.

5. Helligkeit des Spectrums.

Bedeutet h die Helligkeit des Spaltes für irgend eine Farbe, also für eine bestimmte Wellenlänge λ oder einen bestimmten Brechungsexponenten n, so wird die Helligkeit im Spectrum h_1 um so geringer je grösser die Fläche ist, auf die sich die Strahlen verbreiten, wenn von dem Ver-

lust durch Reflexion und Absorption abgesehen wird. Es wird also nach den in den vorigen Nummern eingeführten Bezeichnungen gelten

$$h : h_1 = d\alpha' : d\alpha \quad \text{oder} \quad h_1 = h \frac{d\alpha}{d\alpha'},$$

also nach 3.

$$h_1 = h \cdot \frac{\cos\alpha' \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta'}.$$

Nun aber wird die Helligkeit einer Stelle nicht hervorgebracht von Strahlen derselben Wellenlänge, sondern von solchen, deren Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen. Wir machen nun weiter die Annahme, was mit der Erfahrung wohl übereinstimmt, dass die Helligkeit der Farben, deren Wellenlängenunterschied sehr gering ist, nahezu derselbe ist, und setzen H die Gesammthelligkeit, so erhalten wir

$$H = \int_{\lambda}^{\lambda + d\lambda} h_1 d\lambda = h_1 d\lambda = h_1 \frac{d\lambda}{dn} dn.$$

Setzen wir hier den in 4. berechneten Werth von dn und den obigen Werth h_1 ein, so ist

$$H = h \cdot \frac{\cos\alpha' \cos\beta}{\sin\varphi} d\alpha \frac{d\lambda}{dn}.$$

In diesen Ausdruck führen wir nun den Werth $\frac{d\alpha'}{d\lambda}$ ein, wo $d\alpha'$ der Gesichtswinkel ist, unter dem eine geometrische Lichtlinie statt des Spaltes erscheint, wenn die Wellenlängen der gebrochenen Strahlen liegen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$. Wir bezeichnen dann die scheinbare Länge des betreffenden Theiles des Spectrums $\frac{d\alpha'}{d\lambda}$ mit l, die sich wie folgt bestimmt.

Es ist $\frac{d\alpha'}{dn} = \frac{d\alpha'}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dn} = l \frac{d\lambda}{dn}$.

Da nun aber $\frac{d\alpha'}{dn} = \frac{d\alpha'}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dn}$ oder nach 3. und 4.

$$= \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha' \cos\beta}, \quad \text{so ist} \quad \frac{d\lambda}{dn} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha' \cos\beta} \cdot \frac{1}{l}.$$

Es ist also endlich

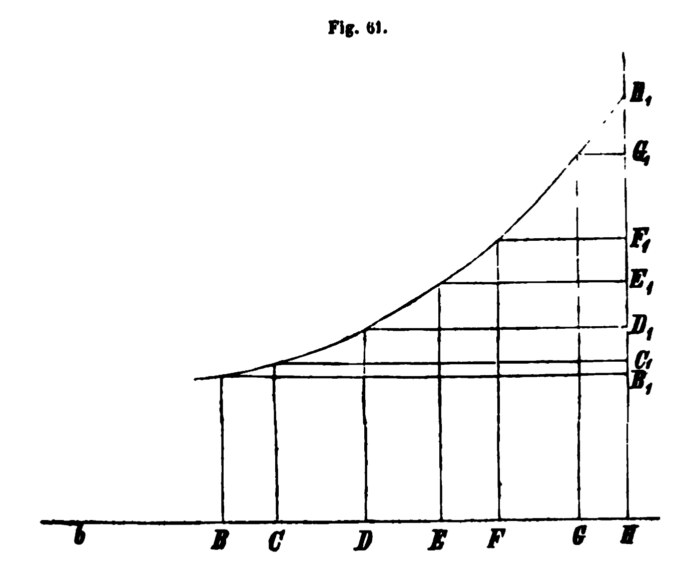
$$H = h \frac{d\alpha}{l}.$$

Die Helligkeit des Spectrums ist demnach proportional der Helligkeit der betreffenden Farbe, der scheinbaren Breite des Spaltes und umgekehrt proportional der scheinbaren Länge des betreffenden Theils des Spectrums.

Anordnung der Strahlen verschiedener Wellenlänge bei der Dispersion. (§ 313.)

Nach § 311 und § 331 ist $d\alpha' = \frac{\sin\varphi}{\cos\beta \cdot \cos\alpha'}\, dn$ und es ist daraus gefolgert worden, dass die Differenzen der Ablenkung der verschiedenfarbigen Strahlen nahezu proportional den Differenzen der Brechungsexponenten sind und dass man dann nach Construction der Dispersionscurve sich eine Anschauung über die Vertheilung der Farben im Spectrum machen kann. Zur Erläuterung der Bemerkung im Lehrbuch für das gewöhnliche Sonnenspectrum benutzen wir die Construction, wie sie ausgeführt ist von Helmholtz Physio. Opt. § 19, indem wir die einfache Formel von Cauchy zu Grunde legen. Die Breite des dunkeln Wärmespectrums ist jedenfalls eine beschränkte, da bei zunehmender Wellenlänge die Brechung sich einem Minimum nähert, welches nicht überschritten werden kann und bei dem die Dispersion aufhört. Als Abscissen sind an der gezeichneten Figur (Fig. 61) wie § 309 4. von einem Punkte b an aufgetragen

Fig. 61.



die verschiedenen Wellenlängen und als Ordinaten die Brechungsverhältnisse n für ein von Frauenhofer benutztes Flintglasprisma. Die Buchstaben B bis H entsprechen den Buchstaben der Frauenhoferschen Linien. Die Grundlinie Hb ist der Wellenlänge proportional, zu der gehört $n = 1{,}6070$, welches für diese Glasart das Minimum ist. Der Verticalen in H nähern sich bei steigender Wellenlänge die n asymptotisch. Die hier zur Construction genommenen Werthe sind von Baden Powell (Pogg. Ann. 37.) nach einer Interpolationsformel berechnet, die nahe genug mit den theoretisch abgeleiteten Formeln von Cauchy übereinstimmt.

Die verschiedenen n sind für die betreffenden Strahlen die folgenden:

B	C	D	E	F	G	H
1,6277	1,6297	1,6350	1,6420	1,6483	1,6603	1,6711.

Nach der Erklärung der Figuren § 331 sind dann die Punkte H_1, G_1, ... B_1 die Stellen der Frauenhoferschen Linien in dem erhaltenen Spectrum.

An der Figur wird deutlich, wie die Strahlen des blauen Endes $F_1 G_1 H_1$ auseinandergezogen, die des rothen Endes $B_1 C_1 D_1$ aneinandergedrängt sind. Dieses Zusammendrängen der Strahlen in dem Brechungsspectrum muss natürlich zunehmen, je mehr man sich dem Raum der dunkeln Wärmestrahlen nähert. Am blauen Ende, wo das Spectrum gedehnt ist, wird dabei die Zahl der sichtbaren dunkeln Linien grösser und weil die gleiche Quantität Licht oder Wärme über einen grösseren Raum verbreitet ist, werden Helligkeit und Erwärmung geringer. Das Umgekehrte findet statt am rothen Ende.

Ausführlicher ist die Lage der Strahlen verschiedener Wellenlängen in dem Spectrum erörtert in § 331, wo dieser analoge Figuren für andere Dispersion gezeichnet sind.

Achromatismus. (§ 314.)

Achromatische Linsen.

Die zu lösende Aufgabe heisst: Es soll ein Linsensystem hergestellt werden, welches so beschaffen ist, dass alle verschieden gefärbten Lichtstrahlen eines im gewöhnlichen Lichte leuchtenden Punktes wieder in einem Punkte vereinigt werden, sodass also ein farbloser Brennpunkt vorhanden ist.

Wir gehen aus von der allgemeinen Gleichung

$$\frac{f_1}{b} + \frac{f_2}{d} = 1,$$

wo f_1 und f_2 die in § 304 gefundenen Brennweiten des Systemes bedeuten. Nehmen wir nun den einfachsten Fall, also eine Combination von zwei Linsen, die unmittelbar aneinander liegen und auf deren beiden Seiten dasselbe Mittel ist. Demnach müssen wir zunächst in § 304, 3. die Entfernung der beiden Systeme $a_1' \alpha_1 = \delta = 0$ setzen. Ferner ist nach § 304, 4. 5. $F_1 = F_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$, $f_1 = f_2 = f$, wo nun aber der dort gebrauchte Werth δ nicht verschwindet, da er die Dicke der Linsen bezeichnet. Die obige allgemeine Formel wird dann

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d} \text{ oder, da } f = \frac{\varphi_1 F_1}{\varphi_1 + F_1} \text{ d. i. } \frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{\varphi} \text{ ist,}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{d}.$$

Unterscheiden wir durch die unten angefügten Indices r oder v die Grössen, je nachdem sie sich auf die rothen oder violetten Strahlen beziehen, so ist

$$\frac{1}{b_r} = \frac{1}{F_{1r}} + \frac{1}{\varphi_{1r}} - \frac{1}{d}; \quad \frac{1}{b_v} = \frac{1}{F_{1v}} + \frac{1}{\varphi_{1v}} \frac{1}{d}.$$

Unsere Aufgabe liefert die Bedingungsgleichung $\frac{1}{b_r} = \frac{1}{b_v}$, also muss für ein achromatisches Linsensystem gelten

$$\frac{1}{F_{1r}} + \frac{1}{\varphi_{1r}} = \frac{1}{F_{1v}} + \frac{1}{\varphi_{1v}}.$$

Dieser Gleichung ist genügt, wenn $F_{1r} = -\varphi_{1r}$ und $F_{1v} = -\varphi_{1v}$ ist, dann aber wirkt die Combination nicht mehr als Linse, weil die zweite eine der ersten entgegengesetzte Brennweite hat. Diess dient zur Controle der Gleichung.

Führt man in die Bedingungsgleichung die Werthe aus § 304. 5 ein, so erhält sie, wenn man noch $\frac{n_3}{n_1} = n$ und n' für die zweite Linse setzt, und die Dicken der Linsen mit δ' und δ'_1 bezeichnet, die Form

$$(n_r - 1)\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + \frac{n_r - 1}{n_r r r'}\delta'\right] + (n'_r - 1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} + \frac{n'_r - 1}{n'_r r_1 r'_r}\delta'_1\right] =$$
$$(n_v - 1)\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + \frac{n_v - 1}{n_v r r'}\delta'\right] + (n'_v - 1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} + \frac{n'_v - 1}{n'_v r_1 r'_r}\delta'_1\right].$$

Diese Gleichung enthält eine Menge Grössen, so dass zur vollständigen Bestimmung derselben noch andere willkürliche Bedingungen hinzugenommen werden können. Es möge zunächst verlangt werden, dass die Linsencombination für beide Farben dieselbe Brennweite F habe, dann sind beide Seiten der Gleichung $= \frac{1}{F}$. Ferner ist es vortheilhaft solche Linsen zu nehmen, welche ganz auf einander passen, also zur ersten eine convexconvexe Linse, welche an die zweite concave sich anschliesst, so dass also $r' = r_1$ ist. Setzt man endlich $r = -2r'$ und nimmt die Dicke der Linsen δ' und δ'_1 verschwindend klein, so erhält man statt der obigen Gleichung die beiden

$$(n_r - 1)\left[\frac{1}{r} + \frac{2}{r}\right] + (n_{1r} - 1)\left[-\frac{2}{r} - \frac{1}{r'_1}\right] = \frac{1}{F},$$
$$(n_v - 1)\left[\frac{1}{r} + \frac{2}{r}\right] + (n_{1v} - 1)\left[-\frac{2}{r} - \frac{1}{r'_1}\right] = \frac{1}{F}.$$

Diese zwei Gleichungen enthalten dann, wenn die Stoffe, also damit die verschiedenen n der Linsen, gegeben sind, nur noch die beiden Unbekannten r und r'_1, welche daher dadurch berechnet werden können.

Spectralia. (§ 316.)

Abhängigkeit des Spectrums von der Dichtigkeit.

Bezeichnen wir das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers § 324 für die verschiedenen Farben mit e_1, e_2 .... e_r und das Absorptionsvermögen eines beliebigen Körpers für dieselben Farben mit A_1, A_2 .... A_r, so wird sich die gesammte Lichtmenge, welche dieser Körper bei einer bestimmten Temperatur ausstrahlt, ausdrücken lassen durch

$$S = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + \ldots A_r e_r.$$

Diese Gleichung würde die Art des Spectrums geben für die verschiedenen Temperaturen, wenn man die zugehörigen A und e wüsste.

Es soll nun gefunden werden, wie die A für glühende Körper in Dampfform von der Dichte abhängen. Damit wird sich dann beweisen lassen, dass für glühende Körper in Dampfform das Spectrum ein charakteristisches Merkmal des Stoffes wird.

Wir gehen aus von einer bestimmten Farbe: Nennen wir α die Lichtmenge dieser bestimmten Farbe, welche von der Einheit der Dicke bei einer bestimmten Temperatur absorbirt wird. ε bezeichne dann das Emissionsvermögen dieser Schicht. Die erste Schicht emittirt $\varepsilon_1 = \alpha \cdot e$, die zweite ebensoviel, das von der zweiten Schicht ausgestrahlte Licht geht durch die erste, welche dann $\alpha \varepsilon_1$ absorbirt, also kommt nach Aussen $\varepsilon_2 = (1 - \alpha)\,\varepsilon_1 = \alpha\,(1 - \alpha)\,e$. Von der dritten Schicht strahlt aus $\alpha\varepsilon_1$, davon geht durch die zweite hindurch $(1 - \alpha)\,\varepsilon_1$, davon wird $(1 - \alpha)\,\alpha\,\varepsilon_1$ an der ersten absorbirt, und es tritt also aus

$$(1 - \alpha)\,\varepsilon_1\,(1 - \alpha) = \alpha\,(1 - \alpha)^2\,e = \varepsilon_3 \text{ u. s. f.}$$

$\varepsilon_n = \alpha\,(1 - \alpha)^{n-1}\,e$. Mithin ist das gesammte ausgestrahlte Licht, wenn die Dicke n Schichten hat,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_n = \alpha e \left\{1 + (1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 + \ldots (1 - \alpha)^{n-1}\right\},$$
$$= \left(1 - (1 - \alpha)^n\right) e = E.$$

Jeder der oben angegebenen Coefficienten A hat also die Form

$$A = \left(1 - (1 - \alpha)^n\right),$$

wo dann n die Dicke des ausstrahlenden Körpers bezeichnet und α ein Bruch ist, der $= 0$ werden kann, so dass also $1 - \alpha$ ein ächter Bruch ist, der bis 1 anwachsen kann. Ist nun $1 - \alpha = 1$, so ist $A = 0$ und auch $E = 0$ d. h. das Licht welches der Körper absolut nicht absorbirt, sendet er auch nicht aus. Wenn aber $(1 - \alpha)$ ein ächter Bruch ist, so wird sich bei immer grösser werdendem n das A immer mehr dem Werth 1 und damit E dem e nähern. Es wächst mithin bei zunehmender Dicke das Emissionsvermögen für alle Strahlen und nähert sich immer mehr dem Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers. Was aber hier von der Dicke gesagt ist, lässt sich auch übertragen auf die Dichte; denn die Absorption kann nur abhängen von der Menge der Moleküle, wir können also, wenn d die Dichte bezeichnet, auch schreiben

$E = \left(1 - (1 - \alpha)^d\right) e$, wo sich α auf die Dichte 1 bezieht. Aus dieser Formel folgt also, dass, wenn eine Substanz charakteristische Maxima des Absorptionsvermögens für gewisse Wellenlängen besitzt, diese im Spectrum des von dem glühenden Körper ausgesandten Lichtes nur dann charakteristische Maxima der Lichtstärke, also die Substanz charakterisirende helle Linien liefert, wenn wir dünne Schichten der Substanz zum Leuchten bringen und dafür sorgen, dass in diesen Schichten die betreffende Substanz nur eine geringe Dichtigkeit besitzt.

Zerlegung des Lichtes durch Absorption. (§ 322.)

Der Unterschied der verschiedenartigen Absorption ergiebt sich aus den Rechnungen in § 329.

Absorption des Lichtes. (§ 323.)

Indem wir zunächst auf § 329 verweisen, bleibt hier nur theoretisch zu begründen, dass die Absorption meist durch die tiefere Octave geschieht. Nach den dort aufgestellten Formeln muss also untersucht werden die indirecte Absorption in b) und c), also das Unendlichwerden von

$$N = \frac{b n^2}{2(4 m p^2 - \alpha)} \qquad \text{bei } p = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{m}} \quad \text{und von}$$

$$P = \frac{b A n}{m\left[p - \sqrt{\frac{a}{m}}\right]^2 - a} \qquad \text{bei } p = 2\sqrt{\frac{a}{m}}\,.$$

Setzen wir dazu für N $p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{m}} + \delta$, wo δ eine sehr kleine Grösse vorstellt, deren höhere Potenzen zu vernachlässigen sind. Wir erhalten dann aus N, wenn wir statt der Abkürzung dessen Werth aus § 259 wieder einführen,

$$N = \frac{2 b f_1^2}{9 a^2 \sqrt{a m}\,\delta}\,.$$

Setzen wir bei P statt p die wenig davon verschiedene Grösse

$$p = 2\sqrt{\frac{a}{m}} + \delta, \text{ so ergiebt sich}$$

$$P = \frac{b f_1 A}{6 a \sqrt{a m \delta}}\,.$$

Daraus findet man

$$\frac{P}{N} = \tfrac{3}{4}\,\frac{A}{f_1}\,a = \tfrac{3}{4}\,\frac{\varepsilon A}{f}\,a.$$

Nun ist εA die Amplitude der anfänglichen Schwingung des Atomes und f die der zu absorbirenden Wellenbewegung und als solche sind diese

Grössen im Allgemeinen wenig von einander verschieden, mithin ist $\frac{\varepsilon A}{f}$ eine endliche Grösse.

Nach § 224 ist $a = \frac{4\pi^2}{T^2} = 4\pi^2 n^2$, also a eine für das Licht sehr grosse Zahl, da n liegt zwischen 400 und 800 Billionen. Es muss demnach $\frac{P}{N}$ eine sehr grosse Zahl, also P viel grösser als N sein.

Vergleiche § 331.

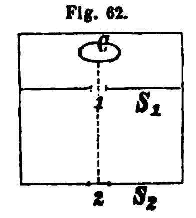
Kirchhoff's Absorptionsgesetz*) und die Frauenhofer'schen Linien. (§ 324.)

1. Vorbereitungen.

Wir setzen voraus, dass Körper denkbar sind, welche bei unendlich kleiner Dicke alle Strahlen (Licht- und Wärmestrahlen) vollkommen absorbiren, also weder reflectiren noch durchlassen. Solche Körper mögen vollkommen schwarz oder kurz schwarz genannt werden.

Für die zu untersuchende Emission und Absorption denken wir uns folgende Anordnung. C (Fig. 62) sei ein Körper, von dem Strahlen ausgehen, derselbe ist in einer schwarzen Hülle, welche auf der einen Seite von einem Schirm S_1, in dem sich eine Oeffnung 1 befindet, begränzt wird. Diese Oeffnung 1 nehmen wir sehr klein aber immer noch gross gegen die Wellenlänge, damit von einer Beugung an den Rändern abgesehen werden kann; und ihre Form sei so, dass sie einen Mittelpunkt hat. Dies ist nöthig, da wir dieselbe später als den Mittelpunkt eines Spiegels betrachten. Dem Schirm S_1 parallel befindet sich ein zweiter Schirm S_2, in dem der Oeffnung 1 gegenüber eine Oeffnung 2 ist, deren Dimensionen auch den für 1 angegebenen Bedingungen unterworfen sind. Diese Oeffnung 2 werde im Allgemeinen durch einen schwarzen Körper geschlossen. Das ganze System soll immer und überall denselben Zustand behalten und durch eine für Strahlung undurchdringliche Hülle, etwa durch eine geschlossene, vollkommen spiegelnde Fläche vor Verlust an Strahlung nach Aussen geschützt sein. Es mögen nun immer die geläufigeren Ausdrücke aus der Wärme hier benutzt werden, so dass wir sagen, das ganze System soll dieselbe Temperatur besitzen und durch eine für Wärme undurchdringliche Hülle vor Wärmeverlust und Wärmegewinn geschützt sein.

Fig. 62.



Emissionsvermögen. Von dem Körper C tritt durch die Oeffnung 1 ein Strahlenbündel. Von diesem betrachte man den Theil, dessen Wellen-

*) Kirchhoff, Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht. Pogg. Ann. 109.

längen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen und zerlege denselben in zwei polarisirte Componenten, deren Schwingungsebenen sind zwei zu einander senkrechte durch den Strahlenbündel gelegte Ebenen a und b. Die Intensität der nach a schwingenden Componente sei $E\,d\lambda$, wo E das Emissionsvermögen des Körpers bedeutet. $\int_0^\infty E\,d\lambda$ ist dann die Gesammtmenge der Strahlen, welche von C durch 1 nach der Oeffnung 2 geht; denn es hat dann λ alle möglichen Werthe von 0 bis ∞. Ist der Körper C ein schwarzer Körper, so sei für diesen das Emissionsvermögen mit e bezeichnet.

Das Absorptionsvermögen ist bezeichnet mit A.

Die Grössen E und A hängen ab von der Natur und Temperatur des Körpers C, von der Gestalt und Lage der Oeffnungen 1 und 2, von der Wellenlänge λ und der Richtung der Ebene a.

2. Untersuchung des Emissionsvermögens eines schwarzen Körpers.

Das Emissionsvermögen e ist für alle schwarzen Körper unveränderlich, ist also unabhängig von der Natur des Körpers und nur eine Funktion der Temperatur, der Wellenlänge, und ist für unsere Combination noch abhängig von der Gestalt und relativen Lage der Oeffnungen 1 und 2.

1. Beweis für den Fall, dass die betreffenden Strahlen, welche durch die Oeffnung 1 gehen, von der Wellenlänge λ sind und in der Ebene a schwingen.

Da Gleichgewicht in dem in 1 beschriebenen Systeme bleiben soll, muss die Summe der Intensitäten der Strahlen, welche den Körper C treffen, die er also als schwarzer Körper absorbirt, gleich sein der Summe der Intensitäten, die er aussendet. Nun stelle man sich vor, dass die Fläche 2 entfernt und die frei gemachte Oeffnung verschlossen werde durch ein unmittelbar dahinter gesetztes Stück einer vollkommen spiegelnden Kugelfläche, die ihren Mittelpunkt in dem Mittelpunkte der Oeffnung 1 hat. Auch so wird das Gleichgewicht der Temperatur bestehen, also müssen auch noch die vom Körper C ausgehenden Strahlen gleich denen sein, die er empfängt. Der Körper sendet aber jetzt dieselben Strahlen aus wie früher, also müssen ihn auch dieselben wie vorhin zum Absorbiren treffen. Die ihn jetzt treffenden Strahlen sind aber dieselben welche er gegen 2 durch 1 sendet. Es müssen demnach die von C durch 1 gegen 2 gesendeten Strahlen dieselben sein, als diejenigen welche die Fläche 2 bei derselben Temperatur durch die Oeffnung 1 entsendet, es ist demnach die Intensität der von C entsendeten Strahlen unabhängig von der Gestalt und weiteren Beschaffenheit des Körpers, wenn wir nur eben die Wellenlänge dieselbe sein lassen und eine bestimmte Schwingungsrichtung berücksichtigen.

2. Beweis unter Berücksichtigung der Schwingungsrichtung (Fig. siehe nächste Seite). Um dies zu erörtern setzten wir zwischen 1 und 2 eine kleine

Platte P, die die Farben dünner Plättchen zeigt und deren Ausstrahlung und Absorption, die wegen der geringen Dicke und auch wegen ihrer substantiellen Beschaffenheit nur gering sein kann, unberücksichtigt bleibe.

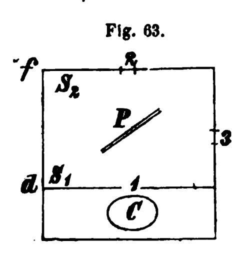


Fig. 63.

Die Richtung der Platte sei so, dass der durch 1 tretende Strahlenbündel sie unter dem Polarisationswinkel trifft. Die Einfallsebene sei entweder die Ebene a oder b. Es sei ferner die Wand, welche die Schirme S_1 und S_2 mit einander verbindet so eingerichtet, dass sie das Spiegelbild von 2 enthält. An dem Orte dieses Spiegelbildes denke man sich eine Oeffnung 3. Es seien nun die Oeffnungen 2 und 3 erstens durch eine schwarze Fläche geschlossen und zweitens sei statt 3 ein vollkommener Hohlspiegel angebracht, der seinen Mittelpunkt an dem Orte des Spiegelbildes hat, das die Platte P von dem Mittelpunkt der Oeffnung 1 entwirft. Da nun jetzt immer wieder Temperaturgleichgewicht bleiben soll, so muss der Körper ebensoviel Wärme ausstrahlen als er empfängt. Die gesammte Ausstrahlung ist gegeben durch $\int_0^\infty e\,d\lambda$, und diese muss dieselbe bleiben, wenn 3 durch die schwarze Fläche geschlossen ist oder statt derselben der Hohlspiegel angebracht wird. Es ist mithin die Intensität dieselbe, welche dem Körper C durch Anbringung des Spiegels in 3 wegen Entfernung der schwarzen Fläche entzogen wird, und diejenige, welche dem Körper dann durch den Spiegel gegeben wird. Die durch Entfernung der schwarzen Fläche 3 entzogene Wärme d. h. die Wärme, die von 3 ausgegangen an P reflectirt und polarisirt worden ist, bezeichnen wir mit Q, so dass ist $Q = \int_0^\infty e\,r\,d\lambda$, wo r einen von der Beschaffenheit der Platte und der Wellenlänge abhängigen Schwächungscoefficienten bedeutet. Die Summe der Intensitäten der Strahlen, die dem Körper C bei Anbringung des Hohlspiegels zugeführt wird, setzt sich aus zwei Theilen zusammen. Von fd kommt erstens eine gewisse Wärme durch P nach dem Hohlspiegel 3, wird dort reflectirt, kommt nach P und wird wiederum reflectirt und gelangt dann durch 1 zu C. Diese Wärmemenge bezeichne man durch R. Der zweite Theil, der den Körper C treffenden Wärme, rührt von C her, indem die Strahlen von P eine Reflexion erleiden, nach dem vollkommenen Spiegel gelangen, dann reflectirt werden und so wieder an P ankommen, von wo sie dann nach einer abermaligen Reflexion durch 1 nach C gelangen. Dieses Quantum ist wegen der zweimaligen Reflexion an P $= \int_0^\infty e\,r^2\,d\lambda$. Es muss also, da in beiden Fällen der Zustand derselbe bleibt, folgende Gleichung bestehen

$$\int_0^\infty e\,r^2\,d\lambda + R = Q\,.$$

Denkt man sich nun statt C einen anderen schwarzen Körper von derselben Temperatur, dessen Emissionsvermögen e' ist, so muss für diesen auch gelten

$$\int_0^\infty e' r^2 \, d\lambda + R = Q.$$

Durch Elimination von R und Q folgt dann

$$\int_0^\infty (e - e') r^2 \, d\lambda = 0.$$

Um die Bedingung zu finden, welche diese Gleichung enthält, substituiren wir den Schwächungscoefficienten aus § 369, 2. Mithin können wir setzen

$$r = \varrho \sin^2 2\pi \frac{\varDelta \cos r}{\lambda},$$

wo ϱ ein ächter Bruch ist.

Es muss also sein

$$\int_0^\infty (e - e') \, \varrho^2 \sin^4 2\pi \frac{\varDelta \cos r}{\lambda} \, d\lambda = 0.$$

Welche Beziehung zwischen e und e' sich hieraus ergiebt, lässt sich, wie folgt, finden.

Man setze für $\sin^4 2\pi \frac{\varDelta \cos r}{\lambda}$ den ihm gleichen Ausdruck

$$\frac{1}{8}\left(\cos 8\pi \frac{\varDelta \cos r}{\lambda} - 4 \cos 4\pi \frac{\varDelta \cos r}{\lambda} + 3\right).$$

Da das obige Integral 0 ist, so muss es auch zwischen denselben Grenzen verschwinden, wenn wir in dem Ausdruck für $\sin^4 2\pi \frac{\varDelta \cos r}{\lambda}$ die Grösse $2\pi \varDelta \cos r$ als veränderlich betrachten und zweimal darnach differenziren. Dies giebt dann die Gleichung

$$\int_0^\infty (e - e') \frac{\varrho^2}{\lambda^2} \, 2 \left(\cos 8\pi \frac{\varDelta \cos r}{\lambda} - \cos 4\pi \frac{\varDelta \cos r}{\lambda}\right) d\lambda = 0.$$

Schreiben wir nun zur Abkürzung

$$2\pi \varDelta \cos r = p \text{ und } \frac{2}{\lambda} = \alpha, \text{ also}$$

$$\frac{2}{\lambda^2} \, d\lambda = d\alpha \text{ und } (e - e') \, \varrho^2 = f(\alpha),$$

so erhält unsere Bedingung die Form

$$\int_0^\infty f(\alpha) (\cos 2p\alpha - \cos p\alpha) \, d\alpha = 0.$$

Nun ist aber

$$\int_0^\infty f(\alpha) \cos 2p\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos p\alpha \, d\alpha,$$

was man leicht erhält, wenn man statt der Variabeln α schreibt $\frac{\alpha}{2}$, wodurch die Grenzen nicht geändert werden. Unsere Bedingung giebt

$$\int_0^\infty \left(f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2 f(\alpha) \right) \cos p\alpha \, d\alpha = 0.$$

Nach dem Fourier'schen Satz ist aber, wenn man diese Gleichung mit $\cos xp \, dp$ multiplicirt, wo x eine willkürliche Grösse ist, und integrirt von 0 bis ∞,

$$2 \int_0^\infty \cos px \, dx \int_0^\infty f(\alpha) \cos p\alpha \, d\alpha = \pi f(\alpha),$$

$$\int_0^\infty \cos px \, dx \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos p\alpha \, d\alpha = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Mithin kann unsere Bedingung nur gelten, wenn ist

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 f(\alpha).$$

Dies ist aber erreicht erstens, wenn bei sich der 0 näherndem $\alpha f(\alpha)$ unendlich gross wird; denn es folgt aus der obigen Gleichung

$$f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 2^n f(\alpha).$$

Wenn sich aber α der 0 nähert, so wird $\lambda = \frac{2}{\alpha}$ unendlich gross und da weder ϱ als ächter Bruch, noch e und e' unendlich werden können, so kann $f(\alpha) = (e - e') \varrho^2$ nicht unendlich werden.

Der obigen Gleichung ist aber zweitens noch genügt, wenn $f(\alpha)$ für alle Werthe für α verschwindet. Dies ist aber nur erreicht, wenn $e = e'$ wird, d. h. das Emissionsvermögen aller schwarzen Körper ist dasselbe für bestimmte λ und dieselbe Temperatur, also ist unser e nur eine Function von λ, der Temperatur, der Grösse der Oeffnungen 1 und 2 und deren relativer Lage.

Dieselben Betrachtungen lassen sich machen, wenn wir statt des zweiten Körpers den ersten lassen, ihn aber drehen. Da auch dann $e = e'$ sein muss, so kann überhaupt ein schwarzer Körper nicht polarisirte Strahlen aussenden, denn es müsste sonst bei der Drehung ein Unterschied stattfinden.

Die Abhängigkeit der Grösse e von den Grössen 1 und 2 und deren relativer Lage ist gegeben durch § 284. Bezeichnen nämlich ω_1 und ω_2 die Projectionen der Oeffnungen 1 und 2 auf Ebenen, die senkrecht auf der

Axe des betreffenden Strahlenbündels stehen, und s die Entfernung der Oeffnungen, so ist $e = I\,\frac{\omega_1 \omega_2}{s^2}$, wo nun I nur eine Function der Wellenlänge und der Temperatur bedeutet.

Dieser Ausdruck für e zeigt, dass der Werth von e derselbe ist, wenn man die Oeffnungen 1 und 2 vertauscht.

Aus der obigen Gleichung ergiebt sich auch noch

$$R = \int_0^\infty e r\, d\lambda - \int_0^\infty e r^2\, d\lambda = \int_0^\infty e r (1 - r)\, d\lambda.$$

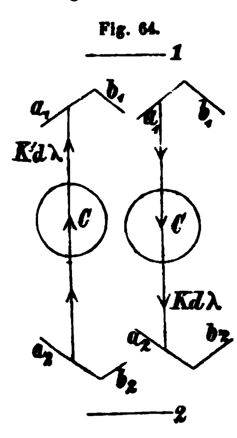
3. Intensitäten der Strahlen zwischen zwei Flächen.

In der vorigen Nummer ist bewiesen worden, dass die Emission unabhängig ist von der Gestalt des Körpers C, es kann demnach für denselben eine Fläche gesetzt werden, welche die Oeffnung 1 gerade ausfüllt. Diese Fläche soll im Folgenden 1 genannt werden. Es können dann die Schirme S_1 und S_2 ganz entfernt werden, wenn das Strahlenbündel, auf das sich e bezieht, als dasjenige definirt wird, das von der Fläche 1 auf die Fläche 2 fällt, und die Oeffnung 2 gerade ausfüllt.

Nach dieser Bemerkung kann nun der folgende allgemeine Satz, der die Folgerung von Nummer 2., dass 1 mit 2 vertauscht werden kann, noch verallgemeinert werden.

Satz: Man denke sich zwischen die Flächen 1, 2 beliebige Körper, welche die Strahlen, die jene einander zusenden, auf beliebige Weise brechen, reflectiren und absorbiren. Von dem Strahlenbündel, welches von 1 nach 2 gelangt, betrachte man den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen und zerlege diesen in zwei Componenten, die in zwei beliebigen auf einander senkrechten Ebenen a_1 und b_1 schwingen. Was von der ersten Componente in 2 ankommt, zerlege man in zwei Componenten, deren Schwingungen in irgend zwei anderen senkrechten Ebenen a_2 und b_2 stattfinden. Die Intensität der nach a_2 schwingenden Componente sei $K\,d\lambda$. Umgekehrt von dem Strahlenbündel, welches von 2 nach 1 geht, betrachte man den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, zerlege diesen nach a_2 und b_2. Was von der ersten Componente in 1 ankommt, zerlegt man wieder in zwei Componenten nach a_1 und b_1. Die Intensität der nach a_1 polarisirten Componente sei $K' d\lambda$. Dann ist $K' = K$.

Fig. 64.



Der Satz soll durch beistehende Fig. 64 veranschaulicht werden.

1) Beweis für den Fall, dass der zwischenliegende Körper C die Strahlen nicht schwächt, dass also jede Brechung und Reflexion ohne Verlust ge-

schieht und dass überhaupt keine Absorption vorkommt. Durch den Mittelpunkt von 1 lege man eine Ebene senkrecht zur Axe des austretenden oder ankommenden Strahles, denke sich in dieser ein rechtwinkliges Coordinatensystem und x_1, y_1 seien die Coordinaten eines Punktes derselben. In der Entfernung 1, die gross ist gegen die x_1, y_1 und die anderen x, y, welche weiter vorkommen, denke man sich eine der ersten parallelen Ebene und in dieser ein Coordinatensystem, das dem ersten parallel ist. x_3, y_3 seien die Coordinaten eines Punktes dieser Ebene. Aehnlich lege man durch den Mittelpunkt von 2 eine Ebene senkrecht zur Axe des austretenden oder auffallenden Strahlenbündels und führe in dieser ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt ist. x_2, y_2 seien die Coordinaten eines Punktes der Ebene. In der Entfernung gleich 1 von dieser nehmen wir eine vierte Ebene und in dieser ein Coordinatensystem, dessen Axen den Axen x_2, y_2 parallel sind und dessen Anfangspunkt in der Axe des Strahlenbündels liegt. x_4, y_4 seien die Coordinaten eines Punktes dieser vierten Ebene.

Von x_1, y_1 gehe ein Strahl nach x_2, y_2 und gebrauche dazu die Zeit T, wo $T = f(x_1, y_1, x_2, y_2)$ ist. Wenn nun der betreffende Strahl durch x_3, y_3 und x_4, y_4 geht, so wird die Zeit, welche der Strahl braucht, um von x_3, y_3 zu x_4, y_4 zu gelangen, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raum $= 1$ gesetzt ist, gleich sein

$$= T - \sqrt{1 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} - \sqrt{1 + (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2}.$$

Gesetzt (x_3, y_3), (x_4, y_4) wären gegeben und die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) gesucht. Nach § 298, S. 280 muss entweder die optische Länge ein Grenzwerth oder die verbrauchte Zeit ein Min. sein. Da nach unserer Annahme die acht Coordinaten x und y unendlich klein sind, so giebt dies folgende Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial T}{\partial x_1} - (x_1 - x_3), \quad 0 = \frac{\partial T}{\partial x_2} - (x_2 - x_4),$$

$$0 = \frac{\partial T}{\partial y_1} - (y_1 - y_3), \quad 0 = \frac{\partial T}{\partial y_2} - (y_2 - y_4).$$

Die Flächenelemente $dx_1\,dy_1$, $dx_2\,dy_2$, $dx_3\,dy_3$ und $dx_4\,dy_4$ sind unendlich klein gegen die unendlich kleinen 1 und 2. Die Intensität der Strahlen von der bezeichneten Wellenlänge und der gewählten Polarisationsrichtung, die von $dx_1\,dy_1$ kommend durch $dx_3\,dy_3$ gehen, ist nach 2., weil deren Entfernung 1 gesetzt ist,

$$d\lambda\, I\, dx_1\, dy_1\, dx_3\, dy_3.$$

Nach der gemachten Voraussetzung gelangt die Strahlenmenge ungeschwächt auf die Fläche 2 und bildet ein Element von $K d\lambda$. Mithin ist K das gehörig begrenzte Integral

$$I \iiiint dx_1\, dy_1\, dx_3\, dy_3.$$

Hier ist die Integration nach x_3 und y_3 über diejenigen Werthe auszudehnen, welche diese Grössen nach den für sie aufgestellten Gleichungen erhalten, während x_1 und y_1 constant bleiben aber x_2, und y_2 alle Werthe annehmen, die den Punkten der Projection der Fläche 2 auf die Ebene der x_2, y_2 entsprechen. Die Integration ist dann nach x_1, y_1 über die Projection der Fläche 1 auszuführen. Da also x_3 und y_3 Function von x_2, y_2 sind, so ist

$$\iint dx_3\, dy_3 = \iint \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial y_3}{\partial y_2} - \frac{\partial x_3}{\partial y_2}\frac{\partial y_3}{\partial x_2}\right) dx_2\, dy_2$$

mit den angegebenen Grenzen, oder nach den Gleichungen für x_3, y_3

$$\iint dx_3\, dy_3 = \iint \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial y_2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial y_1}\right) dx_2\, dy_2,$$

wo die Integration über die Projection der Fläche 2 auszudehnen ist. Hiernach ist

$$K = I \iiiint \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial y_2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial y_1}\right) dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2,$$

wo die Integration über die Projectionen der Flächen 1 und 2 zu nehmen ist.

Behandelt man die mit K′ bezeichnete Grösse ebenso und bedenkt, dass ein Strahl dieselbe Zeit gebraucht, um denselben Weg zurückzulegen, gleichgiltig in welcher Richtung, so findet man für K′ denselben Ausdruck, der für K gefunden ist.

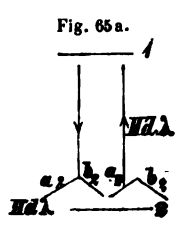
2) Beweis unter der Voraussetzung, dass eine Schwächung stattfinden kann.

Dieser Beweis stützt sich auf einen von Helmholtz (Physiol. Opt. S. 169) gegebenen Satz, welcher mit der von Kirchhoff vorgenommenen geringen Bezeichnungsänderung folgendermassen lautet: „Ein Lichtstrahl gelange nach beliebig vielen Brechungen, Reflexionen u. s. w. von dem Punkte 1 nach dem Punkte 2. In 1 lege man durch seine Richtung zwei beliebige auf einander senkrechte Ebenen a_1 und b_1, nach denen seine Schwingungen zerlegt gedacht werden. Zwei eben solche Ebenen a_2 und b_2 werden durch den Strahl in 2 gelegt. Alsdann lässt sich Folgendes beweisen: Wenn die Quantität i nach der Ebene a_1 polarisirten Lichts von 1 in der Richtung des besprochenen Strahles ausgeht und davon die Quantität k nach der Ebene a_2 polarisirten Lichts in 2 ankommt, so wird rückwärts, wenn die Quantität i nach a_2 polarisirten Lichts von 2 ausgeht, dieselbe Quantität k nach a_2 polarisirten Lichts in 1 ankommen". Dieser Satz folgt mit Nothwendigkeit daraus, dass jeder Lichtstrahl derselben Wellenlänge beim Hingehen von einem Punkte zu einem andern dieselben Veränderungen erleidet, als einer, der vom Treffpunkte ausgeht und zum Anfang des ersten Strahles auf demselben Wege gelangt. Es wird demnach unter das obige Integral, wenn ein Körper dazwischen liegt, für den Hin- und Hergang nur ein constanter Factor $\gamma = \frac{k}{i}$ hinzukommen.

Eine Ausnahme erfährt die allgemeine Giltigkeit des obigen Satzes' wenn eine Drehung der Polarisationsebene stattfindet, die nicht im Material des Körpers begründet ist, also z. B. eine Drehung durch magnetische Kräfte. Fluorescenz kann keine Ausnahme bewirken, da es sich hier nur handelt um Lichtstrahlen derselben Wellenlänge.

Der obige Satz lässt sich weiter verallgemeinern.

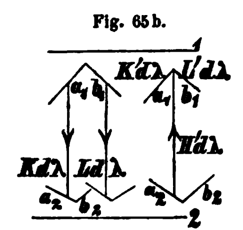
Fig. 65 a.



Von dem Strahlenbündel, welches von 1 nach 2 geht, betrachte man bei 2 den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, zerlege diesen in zwei Componenten, die nach a_2 und b_2 polarisirt sind, und nenne die Intensität der ersten Componente $H d\lambda$. Umgekehrt von dem Strahlenbündel, welches von 2 nach 1 geht, betrachte man bei 2 den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, und zerlege diesen in 2 Componenten, die nach a_2 und b_2 polarisirt sind. Was von der ersten Componente in 1 ankommt ist $H' d\lambda$. Dann ist $H = H'$.

Beistehende Figur 65 [a] veranschaulicht den Satz.

Fig. 65 b.



Der Beweis ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satz, indem man das $H d\lambda$ aus zwei Theilen bestehen lässt, wie es die Fig. 65 [b] andeutet, wo also K dieselbe Bedeutung hat wie oben, aber L hervorgeht aus den nach b_1 polarisirten Theil, so dass also $H = K + L$ ist; denn senkrecht polarisirte Strahlen interferiren nicht. Das $H' d\lambda$ zerlegt sich nach $K' d\lambda$ und $L' d\lambda$. Nun ist $H' = K' + L'$, da auch hier keine Interferenz stattfinden kann. Nach dem vorigen Satz ist aber $K' = K$ und $L' = L$, mithin $H = H'$.

Aus diesem Satze ergiebt sich, wenn wir bei der in 1. zu Grunde gelegten Anordnung den schwarzen Körper durch irgend einen ersetzen, der absorbirt und durch Brechungen und Reflexionen nach verschiedenen Richtungen zerstreut, und wenn wir, wie immer, nur Strahlen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ betrachten, die Gleichheit der folgenden Intensitäten. Von dem Strahlenbündel von 2 nach 1 betrachte man den Theil der beiden zu einander senkrechten Componenten nach der Ebene a und nenne $M' d\lambda$ das, was der Absorption durch C entgeht, also die schwarze Hülle trifft, in die der Körper eingeschlossen ist. Von den Strahlen, welche die Theile dieser Hülle dem Körper C zusenden, fallen gewisse durch die Oeffnung 1 auf die Fläche 2; durch die Vermittelung des Körpers C wird so ein Strahlenbündel erzeugt, welches durch die Oeffnung 1 nach 2 geht. Die Componente dieses nach a habe die Intensität $M d\lambda$, dann ist $M = M'$.

4. Beweis des allgemeinen Gesetzes.

Der Körper C in der Anordnung zu 2. sei nicht ein schwarzer. Da auch dann noch Gleichgewicht vorhanden ist, so muss die lebendige Kraft,

die durch Entfernung der schwarzen Fläche 3 dem Körper C entzogen wird, der lebendigen Kraft gleich sein, die diesem durch Anbringung des Hohlspiegels zugeführt wird. Die lebendige Kraft, die dem Körper durch Entfernung von 3 entzogen wird, ist

$$= \int_0^\infty e\, r\, A\, d\lambda.$$

Die lebendige Kraft, die dem Körper durch Anbringung des Hohlspiegels zugeführt wird, besteht aus mehreren Theilen.

1) Strahlen, welche der Körper selbst aussendet und nach einer zweimaligen Reflexion an P zurückkommen. Deren lebendige Kraft ist

$$= \int_0^\infty E\, r^2\, A\, d\lambda.$$

2) Strahlen, die von der dem Hohlspiegel gegenüberliegenden Fläche durch P gehen, den Spiegel treffen und einmal reflectirt werden. Davon kommt die Grösse, welche der in 2. mit R bezeichneten entspricht, also ist sie

$$= \int_0^\infty e\, r\, (1 - r)\, A\, d\lambda.$$

3) Strahlen, die von verschiedenen Punkten der schwarzen Hülle, die den Körper C umgeben, ausgehen, den Körper C treffen, durch ihn reflectirt, und gebrochen werden, so dass sie durch die Oeffnung 1 nach 2 hingeworfen werden, aber an P eine Reflexion erfahren, nach dem Spiegel gehen und zurückkommen. Deren lebendige Kraft ist

$$= \int_0^\infty M\, r^2\, A\, d\lambda.$$

Nun ist aber $M = M'$ und $M' = e\,(1 - A)$, mithin ist dieser letzte Theil

$$= \int_0^\infty e\,(1 - A)\, r^2\, A\, d\lambda.$$

Die Gleichsetzung dieser beiden Wärmemengen führt zur Gleichung

$$\int_0^\infty e\, r\, A\, d\lambda = \int_0^\infty E\, r^2\, A\, d\lambda + \int_0^\infty e\, r\,(1 - r)\, A\, d\lambda + \int_0^\infty (1 - A)\, e\, r^2\, A\, d\lambda,$$

oder

$$\int_0^\infty (E\, A\, r^2 + e\, r\, A - e\, r^2\, A + e\, r^2\, A - e\, r^2\, A^2 - e\, r\, A)\, d\lambda =$$

$$\int_0^\infty (E - Ae)\, A r^2\, d\lambda = 0.$$

Hieraus kann nun ähnlich wie der Schluss in 1. gezogen ist, gefolgert werden $E = Ae$, oder $\frac{E}{A} = e = I\,\frac{\omega_1\, \omega_2}{s^2}$.

Ausser dieser Absorption, welche von Lommel die directe genannt worden ist, haben wir noch eine indirecte zu betrachten. Dazu siehe § 329.

5. Absorptionsspectrum. Fraunhofer'sche Linien.

Wir nehmen, um die Erörterung durch bestimmte Fälle deutlicher zu machen, leuchtenden Natrium- oder Lithiumdampf. Beide Dampfarten zeigen beinahe homogenes Licht. Da nun $E = Ae$ ist, das e für eine bestimmte Temperatur einen bestimmten Werth hat und E für diese bestimmte Farbe gross ist, so muss auch A für diese Farbe gross sein. Setze man $A = \frac{E}{e} = \frac{1}{n}$, wo n nur wenig grösser als 1 genommen werden kann. Die Intensität des von dem Dampf ausgehenden Lichtes sei i. Hinter diesem leuchtenden Dampf befinde sich ein dasselbe Licht emittirender Körper und zwar sei die Intensität des von diesem ausgehenden Lichtes I. I' werde von der Gesammtintensität I durch den Dampf absorbirt, also $A = \frac{1}{n} = \frac{I'}{I}$.

Ist nun $I = xi$, so ist also $I' = \frac{1}{n} xi$.

Es ist mithin eine Stelle hinter der Natriumflamme erleuchtet durch die Intensität

$$i + \left(xi - \frac{1}{n} xi\right) = i\left(1 + \frac{n-1}{n} x\right).$$

Wir erhalten demnach eine Verstärkung der Beleuchtung durch die dazwischen gestellte Natriumflamme, oder es tritt keine Veränderung ein, oder es findet eine Verminderung statt, je nachdem

$$i\left(1 + \frac{n-1}{n} x\right) \gtreqless xi \text{ d. h. } n \gtreqless x \text{ ist.}$$

Für Sonnenlicht ist also $x > n$ im Vergleich mit dem von der Sonnenatmosphäre ausgehenden Lichte.

Für eine Lithiumflamme sind mit Hülfe von Sonnenlicht alle drei Fälle durch das Experiment zu bestätigen, indem man dem Spalt für das eintretende Sonnenlicht verschiedene Dimensionen giebt.

Aus der entwickelten Formel kann noch leicht gefunden werden, dass, da nach § 317 alle festen Körper beim Anfang der Gluth rothe Strahlen aussenden, alle bei derselben Temperatur anfangen müssen zu glühen.

Die Körperfarben. (§ 326.)

Abhängigkeit der Absorption von der Dicke der Schicht und der Farbe.

Fällt auf die Grenzfläche eines Körpers die Lichtmenge M einer bestimmten Farbe, so wird ein Theil derselben in der Schicht von der Dicke 1

absorbirt. Ist x ein ächter Bruch, so können wir dann die die Schicht 1 verlassende Quantität Licht bezeichnen mit Mx und demnach ist die absorbirte Menge $M - Mx = M(1 - x)$. In der zweiten Schicht wird abermals derselbe Theil von der eintretenden Lichtmenge zurückgehalten, es tritt demnach aus Mx^2 und absorbirt wird nun im Ganzen $M - Mx^2 = M(1 - x^2)$ u. s. f. Die Lichtquantität, welche durch n solche Schichten hindurchgeht, ist demnach Mx^n und die absorbirte Quantität $M(1 - x^n)$. Es nimmt mithin die durch einen Körper hindurchgehende Lichtmenge in einer geometrischen Progression ab, wenn die Dicken der Schichten in arithmetischer Progression zunehmen.

Dieser Werth x, ein Schwächungscoefficient, ist abhängig von der materiellen Beschaffenheit des Körpers und ist für verschiedene Farben verschieden. Wird demnach ein Körper von einer Quantität Licht M getroffen, welches aus gewissen Mengen verschiedenfarbigen Lichtes zusammengesetzt ist, so dass wir schreiben könnnen $M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots M_r$, und bezeichnen wir dem entsprechend die zugehörigen Schwächungscoefficienten mit $x_1, x_2, \ldots x_r$ und die Dicke der Schicht mit n, so ist das durchgelassene Licht darstellbar durch

$$M_1 x_1^n + M_2 x_2^n + M_3 x_3^n + \ldots . M_r x_r^n.$$

Die resultirende Lichtmenge giebt dann die Farbe des durchgelassenen Lichtes.

Es hängt demnach dessen Farbe ab von der Art der auffallenden Lichtmenge M, von den Werthen x und von der Dicke der Schicht.

Sind für einen Körper alle x einander gleich, so ist das durchgelassene Licht

$$(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots . M_r)\, x^n = Mx^n,$$

also von derselben Farbe wie das auffallende Licht, nur ist die Quantität in dem Verhältniss von $1 : x^n$ verringert. Ist für eine Farbe x ein sehr geringer Werth, so ist der Exponent von x nicht wesentlich und es wird in geringer Dicke das Licht dieser bestimmten Farbe schon entfernt.

Im Allgemeinen werden die x^n, je grösser n ist, immer verschiedener, es wird demnach ein Körper mit zunehmender Dicke eine immer verschiedenere Farbe zeigen.

Besonders interessant ist der Fall, wenn es zwei von einander verschiedene Maxima von x giebt; denken wir z. B., es wären für einen Körper die x für alle Farben verschwindend klein, ausser für roth und grün (Ein Auszug von Blattgrün durch Alkohol) und die betreffenden x seien bezeichnet durch x_r und x_g. Sei nun $x_r > x_g$, so wird also die Menge des durchgehenden Lichtes sein

$$M_r x_r^n + M_g x_g^n.$$

Bedenken wir ferner, dass nach Fraunhofer im weissen Licht $M_g > M_r$ ist, so kann, wenn n klein ist, $M_g x_g^n > M_r x_r^n$ sein. Dann wird das durchgelassene Licht einen grünen Eindruck machen. Wenn aber n gross ist, so wird x_r^n viel grösser als x_g^n, also kann es vorkommen, dass

$M_r x_r^n > M_g x_g^n$ ist. Dann erscheint das durchgelassene Licht mehr roth als grün, und bei noch grösseren Dicken wird das Grün endlich gegen das Roth fast ganz verschwinden.

Ueber die Absorption vergleiche noch § 331.

Fluorescenz. (§ 329.)

Mathematische Begründung der Theorie von Lommel.*)

Die Kraft, welche das Atom, dessen Masse m ist, in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, sei, wenn x die Elongation bedeutet, durch $a x + b x^2$ bezeichnet. Ausser der elastischen Kraft wirke eine Aetherwelle, die auf die Atome einen periodisch veränderlichen Druck $f \sin(pt)$ ausübt. Die Differentialgleichung der Bewegung des Atomes ist dann

$$-m \frac{d^2 x}{d t^2} = a x + b x^2 + f \sin pt.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung findet man nach § 259. Wenn nun hier die eigene Schwingung beibehalten wird, so ergiebt sich mit den dort eingeführten Bezeichnungen

$$x_1 = A \sin\left(t\sqrt{\frac{a}{m}} + h\right) + u \sin pt.$$

Nach einiger Umformung findet man dann

$$a x_2 + m\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -b\left\{\tfrac{1}{2}(A^2+u^2) - \tfrac{1}{2}A^2\cos\left(2t\sqrt{\frac{a}{m}}+2h\right) - \tfrac{1}{2}u^2\cos(2pt)\right.$$
$$\left. + A u \cos\left(\left[p - \sqrt{\frac{a}{m}}\right]t - h\right) - A u \cos\left(\left[p + \sqrt{\frac{a}{m}}\right]t + h\right)\right\}.$$

Deren Integral ist

$$x_2 = -\frac{b}{2a}(A^2+u^2) + A\sin\left(t\sqrt{\frac{a}{m}}+h\right) - \frac{bA^2}{6a}\cos\left(2t\sqrt{\frac{a}{m}}+2h\right)$$
$$-\frac{b u^2}{2(4 m p^2 - a)}\cos 2pt + \frac{b A u}{m\left[p-\sqrt{\frac{a}{m}}\right]^2 - a}\cos\left(\left[p-\sqrt{\frac{a}{m}}\right]t-h\right)$$
$$-\frac{b A u}{m\left[p+\sqrt{\frac{a}{m}}\right]^2 - a}\cos\left(\left[p+\sqrt{\frac{a}{m}}\right]t+h\right)$$

oder mit abgekürzter Bezeichnung

---

*) Pogg. Ann. 143. Ueber Fluorescenz. Die Resultate neuerer Forschung von Hagenbach Pogg. 146 (vergleiche die Bemerkung im Lehrbuch S. 363) sind von Lommel, Pogg. Ann. 159, erörtert.

$$= -\frac{b}{2a}(A^2+u^2) + A\sin\left(t\sqrt{\frac{a}{m}}+h\right) - M\cos\left(2t\sqrt{\frac{a}{m}}+2h\right)$$

$$-N\cos 2pt + P\cos\left(\left[p-\sqrt{\frac{a}{m}}\right]t-h\right) - Q\cos\left(\left[p+\sqrt{\frac{a}{m}}\right]t+h\right),$$

Wenn mit x_2 abgebrochen wird, also genommen wird $x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2$, so sind folgende Amplituden mit den ihnen zugehörigen Schwingungszahlen zu berücksichtigen:

1) A, $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{m}}$, 2) u, $\frac{1}{2\pi}p$, 3) M, $\frac{1}{2\pi}2\sqrt{\frac{a}{m}}$, 4) N, $\frac{1}{2\pi}2p$, 5) P, $\frac{1}{2\pi}\left[p-\sqrt{\frac{a}{m}}\right]$

6) Q. $\frac{1}{2\pi}\left[p+\sqrt{\frac{a}{m}}\right]$.

Von diesen gehört 1) zu dem Eigenton des Körpers, 2) zu der ankommenden Welle. Wenn nun diese Schwingungszahlen in keiner besonderen Beziehung zu einander stehen, so werden die letzteren Amplituden klein bleiben im Vergleich zur Amplitude der Eigenschwingung und diese wird keinen wesentlichen Zuwachs erhalten. Die Welle geht wenig geschwächt weiter.

a) Angenommen $\sqrt{\frac{a}{m}} = p$, d. h. die Schwingungszahl der ankommenden Welle ist gleich der der Eigenschwingung, dann ist $u = \infty$, $N = \infty$, $P = \infty$, $Q = \infty$. Das heisst, wenn die eintreffende Welle mit der Eigenschwingung im Einklang ist, wird die Amplitude der Eigenschwingung über alle Grenzen hinaus gesteigert, was in Wirklichkeit nur bis zum Zerreissen des Molekularverbandes (chemische Wirkung) gehen kann. Die Welle ist verbraucht, dies ist das Princip der directen Absorption, nach der ein schwingendes Körpertheilchen eine dasselbe treffende Welle absorbirt, wenn diese im Einklang schwingt mit einer der Eigenschwingungen des Theilchens.

b) $p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{m}}$, d. h. die Schwingungszahl der eintretenden Welle ist die Hälfte von der der Eigenschwingung. Hier wird $N = \infty$. Dann wird also die eintretende Welle absorbirt, verstärkt aber die Eigenschwingung; denn es ist die zu N gehörige Schwingungszahl $\frac{1}{2\pi}2p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{m}}$.

c) $p = 2\sqrt{\frac{a}{m}}$, d. h. die Schwingungszahl der eintretenden Welle ist das Doppelte der der Eigenschwingung. Dann wird $P = \infty$, also tritt wiederum Absorption ein. Da nun die Schwingungszahl zu P, ist

$$\frac{1}{2\pi}\left[p-\sqrt{\frac{a}{m}}\right] = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{m}},$$

also gleich der der Eigenschwingung, so wird auch durch diese Absorption die eigene Schwingung verstärkt.

Die Absorption unter b) und c) ist das, was indirecte Absorption genannt ist, nach der ein schwingendes Körpertheilchen absorbirt eine dasselbe treffende Wellenbewegung, wenn diese eine Octave höher oder tiefer schwingt als eine der Eigenschwingungen des Theilchens.

Die Fluorescenz durch Differenzfarben ist gegeben durch die Ausdrücke für x_1 und x_2 § 259. Die Bewegung des Aetheratomes für die Differenzfarbe $\left(\frac{p-q}{2\pi}\right)$ und die Summationsfarbe $\left(\frac{p+q}{2\pi}\right)$ ist objectiv vorhanden, muss sich demnach auch in den umgebenden freien Aether fortpflanzen.

Die anomale Dispersion. (§ 331.)

1. Sellmeier's*) Theorie.

Da durch die im Obigen (§ 309) gegebene Erklärung der Dispersion, die Beobachtungen der anomalen Dispersion und deren Abhängigkeit von der Absorption unerklärt bleiben, so sollen im Folgenden die noch angestellten Versuche einer Erklärung dieser Erscheinung angegeben werden. Wir beginnen mit der von Sellmeier aufgestellten Theorie.

Obgleich die Aberration darauf führt, anzunehmen, dass jeder Körper in Folge seiner Fortschreitung im Raume von dem Aether durchflossen wird, so soll doch vorläufig von diesem Umstande ganz abgesehen, also vorausgesetzt werden, dass der Aether in den Körpern relativ ruhend ist.

Da nun in einem Körper jedenfalls die Massentheilchen und die Aethermoleküle einen gegenseitigen Einfluss aufeinander ausüben, so muss, wenn die letzteren durch einen den Körper treffenden Lichtstrahl in Bewegung gesetzt werden, auch eine Bewegung der ponderabeln Körpertheilchen entstehen; denn durch eine Veränderung in der Lage der Aethertheilchen ist die Lage des Gleichgewichtsortes für die Massentheilchen verschoben. Diese durch einen Lichtstrahl hervorgerufene Bewegung der Körpertheilchen übt dann wieder eine Rückwirkung auf die Aetherschwingungen aus.

Denkt man sich also die Aethertheilchen verschoben, wie es auf einem Lichtstrahl in einem bestimmten Momente der Fall ist, und dann in dieser Lage festgehalten, so müssen die Körpertheilchen, da das frühere Gleichgewicht gestört ist, ebenfalls in Bewegung gerathen, bis sie schliesslich an

*) Ueber die durch die Aetherschwingungen erregten Mitschwingungen der Körpertheilchen und deren Rückwirkung auf die ersteren, besonders zur Erklärung der Dispersion und ihrer Anomalien. Pogg. Ann. CXLIII, p. 272—281. CXLV, p. 399—421. 520—549. CXVII, p. 386.

einem Orte, dem neuen Gleichgewichtsorte, zur Ruhe kommen. Sind darauf die Aethertheilchen, wie es in dem um eine halbe Schwingungsdauer späteren Momente der Fall ist, nach der entgegengesetzten Richtung verschoben, so ist dasselbe auch mit den Gleichgewichtsörtern der Körpertheilchen der Fall. In einem Körper sind demnach die Schwingungen des Aethers stets verbunden mit gleichzeitigen Schwingungen der momentanen Gleichgewichtsörter der Körpertheilchen.

2. Schwingungsgleichungen der Körpertheilchen.

Bezeichne m' die Masse eines Körpertheilchens und m die eines anderen Körper- oder Aethertheilchens, ferner ξ', η', ζ' (ξ, η, ζ) die Verschiebungen von m' (m). Es ist demnach das, was $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ in § 279 bezeichnet ist, hier $\xi - \xi', \eta - \eta', \zeta - \zeta'$.

Denken wir uns zuerst das Theilchen m in Ruhe und m' verschoben, so sind nach § 279. 2, wenn wir bedenken, dass dann das dort gesetzte $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ unserer Bezeichnung zu Folge, zu ersetzen ist durch $-\xi', -\eta', -\zeta'$, da $\xi = \eta = \zeta = 0$ ist, die nach den Coordinatenaxen auf m' wirkenden Kräfte X, Y, Z bestimmt durch

$$-X = L\xi' + R\eta' + Q\zeta',$$
$$-Y = M\eta' + P\zeta' + R\xi',$$
$$-Z = N\zeta' + Q\xi' + P\eta'.$$

Wir wählen jetzt zur Vereinfachung die noch durch nichts bestimmte Lage unseres Coordinatensystems so, dass dessen Axen mit den Hauptaxen der Fläche (8.) § 279. 4. zusammenfallen. Dann ist

$$P = Q = R = 0,$$

mithin
$$X = -L\xi', \quad Y = -M\eta', \quad Z = -N\zeta'.$$

Diese Gleichungen sagen, dass, wenn ein in irgend einer Richtung verschobenes Körpertheilchen frei gelassen wird, während alle anderen Theilchen als an ihrem Ruheorte verharrend gedacht werden, dasselbe Schwingungen ausführt, weil der Gleichgewichtszustand jedenfalls ein stabiler ist, parallel jeder der drei Axen, so dass jede unabhängig ist von denen, welche den anderen beiden Axen parallel sind. Setzt man dann

$$L = \frac{4\pi^2}{\delta'^2}, \quad M = \frac{4\pi^2}{\delta''^2}, \quad N = \frac{4\pi^2}{\delta'''^2},$$

so sind $\delta', \delta'', \delta'''$ die drei Schwingungsdauern des Körpertheilchens. Diese Grössen sollen die eigenthümlichen Schwingungsdauern genannt werden.

Nehmen wir jetzt weiter an, dass nicht blos das Theilchen m', sondern auch die andern Körper- und Aethertheilchen irgendwie und zwar jedes beliebig verschoben seien, so fällt der Gleichgewichtsort von m' im Allgemeinen nicht mehr mit dessen Ruheorte zusammen, sondern ist

ebenfalls verschoben. Seien die Verschiebungen des Gleichgewichtsortes $\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0$, und die des Theilches m' ξ', η', ζ', so kann man setzen

$$\Delta\xi = (\xi - \xi'_0) - (\xi' - \xi'_0),$$
$$\Delta\eta = (\eta - \eta'_0) - (\eta' - \eta'_0),$$
$$\Delta\zeta = (\zeta - \zeta'_0) - (\zeta' - \zeta'_0).$$

Damit erhalten wir für X nach § 279. 1, (2) folgende Gleichung:

$$X = \left\{\left[\Sigma m f(r) + \Sigma m f'(r)\frac{x'^2}{r}\right](\xi - \xi'_0) + \Sigma m \frac{f'(r)}{r}\left[(x'y'(\eta - \eta'_0) + x'z'(\zeta - \zeta'_0)\right]\right\} - \left\{\left[\Sigma m f(r) + \Sigma m r f'(r)\frac{x'^2}{r}\right](\xi' - \xi'_0) + \Sigma m\frac{f'(r)}{r}\left[x'y'(\eta' - \eta'_0) + x'z'(\zeta' - \zeta'_0)\right]\right\}.$$

Setzt man hierin $\xi' = \xi'_0$, $\eta' = \eta'_0$, $\zeta' = \zeta'_0$, so verschwindet das ganze zweite Glied. Da aber in diesem Falle das Theilchen m' in seinem momentanen Gleichgewichtsorte ist, so ist auch $X = 0$, folglich ist auch das erste Glied gleich Null. Da dieses aber die Verschiebung von m' nicht enthält, so muss dieses überhaupt verschwinden, was auch ξ', η', ζ' für Werthe haben mag, also ist ganz allgemein

$$X = \left[\Sigma m f(r) + \Sigma m f'(r)\frac{x'^2}{r}\right](\xi' - \xi'_0) + \Sigma m\frac{f'(r)}{r}\left[x'y'(\eta' - \eta'_0) + x'z'(\zeta' - \zeta'_0)\right].$$

Dies ist dann dieselbe Form wie die der vorhin aus § 279 benutzte Gleichung, wir können demnach mit Hülfe derselben Bemerkungen wie oben erhalten, wenn wir nun die X, Y, Z den Trägheitskräften gleichsetzen,

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\delta'^2}(\xi' - \xi'_0),$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\delta''^2}(\eta' - \eta'_0),$$
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\delta'''^2}(\zeta' - \zeta'_0).$$

Im Folgenden sollen nun zur Vereinfachung die oberen Indices wegbleiben und auch immer nur eine von den drei Gleichungen aufgeführt werden, da die für die anderen Axen sich durch einfache Vertauschung der ξ in η und ζ und des entsprechenden δ ergeben.

Nehmen wir an, dass die Bewegung des Gleichgewichtsortes dargestellt werde nach den bekannten Bezeichnungen durch

$$\xi_0 = a_0 \sin 2\pi\left(\frac{t + \alpha}{T}\right), \quad (1.)$$

so ist also die Differentialgleichung der gesuchten Bewegung des Massentheilchens m

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\delta^2}\left[\xi - a_0 \sin 2\pi \frac{t+\alpha}{T}\right]$$

venn die Schwingungsdauer T mit der eigenthümlichen Schwingungs-
zusammenfällt,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\delta^2}\left[\xi - a_0 \sin 2\pi \frac{t+\alpha}{\delta}\right].$$

Integration dieser Gleichungen finden wir

$$\xi = \frac{T_2}{T^2 - \delta^2}\, a_0 \sin 2\pi \frac{t+\alpha}{T} + b \sin 2\pi \frac{t+\beta}{\delta}, \quad (2.)$$

$$\xi = -\pi \frac{t}{\delta}\quad a_0 \cos 2\pi \frac{t+\alpha}{\delta} + b \sin 2\pi \frac{t+\beta}{\delta}, \quad (3.)$$

nd β die beiden willkürlichen Constanten sind.

beiden Fällen setzen sich demnach die Schwingungen der Körper-
n aus zwei Theilen zusammen, von denen der jedesmal zuerst
e Ausdruck unabhängig von den noch willkürlichen Constanten also
fangszustand ist. Die dadurch bestimmten Schwingungen müssen
mer vorhanden sein, wenn der Gleichgewichtsort des Körper-
ns in der durch (1) gegebenen Weise oscillirt; wir nennen sie
die wesentlichen Schwingungen. Das zweite Glied stellt
gungen dar, welche nach Phase und Amplitude vom Anfangs-
abhängen. Diese Schwingungen werden unwesentliche
.

angenommenen Schwingungen der Gleichgewichts-
der Körpertheilchen werden durch Lichtschwin-
gungen hervorgebracht.

Beweis dieses Satzes zerfällt in zwei Theile, je nachdem nur die
enen benachbarten Aethertheilchen oder dazu die verschobenen
eilchen den Gleichgewichtsort eines Körpertheilchens verändern.

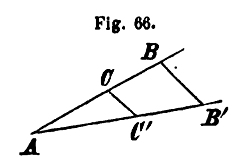
Die Verschiebungen seien bewirkt durch die der benachbarten
eilchen.

Bezug darauf nehmen wir an, dass wegen der grossen Spannung,
ch der Aether befindet, durch die Wirkung eines Körpertheilchens
der ihm benachbarten Aethertheilchen zu den anderen Aether-
nicht merklich geändert werde. Darnach werden die Aether-
, welche in der Ruhelage auf einer dem Lichtstrahl parallelen
gen, während der Lichtbewegung nicht merklich von einer
abweichen. Es ist demnach die Bewegung des Aethers für einen
larisirten Lichtstrahl bei jeder beliebigen Bewegung des Körper-
s ausgedrückt durch

$$\varrho' = \alpha' \sin 2\pi \frac{t+\alpha'}{T}.$$

Denken wir uns nun (Fig. 66) alle Körpertheilchen in ihrer Ruhelage verharrend und den Gleichgewichtsort eines Körpertheilchens m, wenn der Aether ganz unwirksam wäre in A sich befindend. Ist aber nur der Aether wirkend, so möge der Gleichgewichtsort von m in B sich befinden, so lange der Aether in Ruhe ist, dagegen in B′, wenn die Aethertheilchen verschoben sind. Unter beiderseitigem Einfluss wird also bei ruhendem Aether der Gleichgewichtsort von m zwischen A und B etwa in C auf der Geraden AB liegen, und bei verschobenem Aether in C′ auf AB′. Da in jedem dieser Fälle der Gleichgewichtszustand stabil ist, so wird m nach seinem Gleichgewichtsort hinstreben. Bei ruhendem [verschobenem] Aether strebe m von C [C′] aus mit der Kraft m k CA [m k′ C′A] dem Punkte A und mit der Kraft m k_1 CB [m k_1' C′B′] dem Punkte B [B′] zu. Da nun C und C′ die Gleichgewichtsörter sind, so ist

Fig. 66.



$$m k CA [m k' C'A] = m k_1 CB \; [m k_1' C'B'] \text{ also}$$
$$CA : CB = k_1 : k \text{ und}$$
$$C'A : C'B' = k_1' : k',$$

wo die Accente andeuten, dass die Kräfte nach den verschiedenen Richtungen verschieden sein können.

Wenn nun die Verschiebungen der Aether- und Körpertheilchen sehr klein sind im Vergleich zu ihren Abständen, so muss, da AB und AB′ von der Ordnung dieser Abstände sind, BB′ sehr klein sein gegen AB und AB′, also ist auch der Winkel BAB′ sehr klein. Man kann dann ohne merklichen Fehler $k = k'$, $k_1 = k_1'$ setzen. Dann ist aber, wenn wir die Verschiebung des Aethers durch die Gerade BB′ vorstellen, BB′ ∥ CC′, also erfolgt die durch den Aether allein bewirkte Verschiebung des Gleichgewichtsortes von m, d. i. CC′ mit der Aetherverschiebung in gleicher Richtung und ist derselben proportional. Wir können demnach schreiben

$$\xi_0 = C\varrho' = C a' \sin 2\pi \frac{t + \alpha'}{T},$$

wo C eine Constante ist.

Damit ist also bewiesen, dass wenn die Körpertheilchen in Ruhe wären, durch die Verschiebung der Aethertheilchen eine Verschiebung der Gleichgewichtsorte eintritt, die bestimmt ist durch eine Gleichung von der Form (1.)

2) Es mögen nun auch die Körpertheilchen frei und durch den Lichtstrahl in Bewegung gesetzt sein und den Gleichgewichtsort weiter verschieben.

Bei dieser Betrachtung nehmen wir voraus, was in der folgenden Nummer bewiesen werden soll, dass die Amplitude a_0 der (1) mit der Zeit veränderlich, und nicht, wie es bei der Integration angenommen ist, constant ist. Zugleich soll dann aber dargethan werden, dass eben desswegen die unwesentlichen Schwingungen nicht zu berücksichtigen sind.

Unser jetzt zu führender Beweis zerfällt wiederum in zwei Theile

a) die eigenthümlichen Schwingungsdauern der Körpertheilchen stimmen nicht mit der Oscillationsdauer des Aethers überein, es giebt also keine Absorption.

Wir haben demnach die Gleichungen

$$\xi_0 = a_0 \sin 2\pi \frac{t+\alpha}{T}, \quad \xi = \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} \xi_0 .$$

Nach dem obigen Beweis ist nun für die durch den Aether bewirkte Verschiebung $\xi_0 = C\varrho'$, mithin

$$\xi = \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} C\varrho' .$$

Alle anderen Körpertheilchen müssen nun ähnlich darzustellende Verschiebungen erleiden und zwar jede parallel den Hauptaxen ihres Ellipsoides. Das Theilchen m_1 z. B. die Verschiebungen

$$\frac{T^2}{T^2 - \delta_1'^2} C_1 \varrho', \quad \frac{T^2}{T^2 - \delta_1''^2} C_1' \varrho', \quad \frac{T^2}{T^2 - \delta_1'''^2} C_1'' \varrho' .$$

Alle diese Verschiebungen sind also proportional den Aetherverschiebungen, demnach müssen es auch sein ihre Wirkungen auf den Werth ξ_0, man kann demnach die Summe dieser Wirkungen, wenn D eine Constante ist, bezeichnen mit $D\varrho'$, so dass man nun erhält

$$\xi_0 = (C+D)\varrho' \quad \text{und} \quad \xi = \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} (C+D)\varrho' .$$

Die Verschiebungen aller anderen Körpertheilchen müssen aber wiederum ebensolche den Aetherschwingungen proportionale Glieder hinzu erhalten und deren Gesammtwirkung wird rückwärts auf die Vertheilung der ξ_0 einwirken u. s. f., so dass man wird schreiben können

$$\xi_0 = (C + D + E + \ldots)\varrho' .$$

Es setzt sich also die Verschiebung ξ_0 des Gleichgewichtsortes von m durch eine unendliche Reihe von Gliedern zusammen, aber doch so, dass dieselbe immer noch, wie zu beweisen war, proportional der Aetherverschiebung bleibt.

b) Die eigenthümliche Schwingungsdauer nach einer der drei Axen einiger Körpertheilchen stimmt mit der Oscillationsdauer des Aethers überein.

Hier kommt also in die Schwingungsgleichung nach (2) und (3) statt

$$\sin 2\pi \frac{t+\alpha}{T} \text{ der Ausdruck } -\cos 2\pi \frac{t+\alpha}{T} .$$

Die Theilchen, deren eigenthümliche Schwingungsdauer mit der Dauer irgend welcher Lichtschwingungen übereinstimmen, werden nun im Allgemeinen sehr gering sein, denn der Ausdruck $-\cos 2\pi \frac{t+\alpha}{T}$ bezieht sich eben nur auf diejenigen, welche eine ganz bestimmte, mit der Oscillationsdauer des gerade der Betrachtung unterliegenden homogenen Licht-

strahles übereinstimmende, eigenthümliche Schwingungsdauer haben. Man wird daher die Wirkung dieser letzteren Theilchen auf die Lage der Gleichgewichtsörter im Allgemeinen als unmerklich ansehen können, womit aber nicht gesagt ist, dass die Absorption ohne Einfluss ist; denn zu dieser tragen alle Körpertheilchen bei, deren eigenthümliche Schwingungsdauern zwischen zwei weit von einander entfernten Grenzen liegen d. h. alle, welche Antheil haben an der Absorption einer ziemlich ausgedehnten Strecke im Spectrum, während von diesen nur ein sehr kleiner Theil den Ausdruck $-\cos 2\pi \frac{t+\alpha}{T}$ statt $\sin 2\pi \frac{t+\alpha}{T}$ enthält.

Wenn man diesen Schluss nicht zugeben will, so kann man die Wirkung dieser Theilchen als selbstständige Schwingungen der Gleichgewichtsörter ansehen, welche der Formel

$$\xi_0 = -a_0 \cos 2\pi \frac{t+\alpha'}{T} = a_0 \sin 2\pi \frac{t+\alpha'-\frac{1}{4}T}{T}$$

folgen und für sich der Gleichung genügen.

Es gilt demnach allgemein $\xi_0 = q\varrho' = q a' \sin 2\pi \frac{t+\alpha'}{T}$, wo q eine Constante bedeutet.

Zerlegt man die Aetherverschiebung ϱ' nach den drei Schwingungsaxen des Körpertheilchens m und bezeichnet mit ξ' die der x parallele Componente und mit c den $\cos \widehat{\varrho' x}$, so hat man

$$\xi_0 = q \frac{\xi'}{c}.$$

Das Resultat dieser Untersuchung lautet: die Schwingungen des Gleichgewichtsortes jedes Körpertheilchens nach jeder seiner Axen sind den ihnen parallelen Schwingungscomponenten des Aethers proportional und haben mit demselben gleiche Dauer und Phase.

Es sollen nun im Folgenden diejenigen Körpertheilchen, für die δ sehr klein ist im Vergleich zur Licht-Oscillationsdauer, **refractive** Theilchen und dagegen diejenigen, deren eigenthümliche Schwingungsdauer mit der Dauer irgend welcher Lichtschwingungen übereinstimmt, also grösser ist als die Schwingungsdauer des Aethers an der äussersten Grenze des ultravioletten Lichtes, **absorptive** Theilchen genannt werden.

4. Wegen der Veränderlichkeit von a_0 bleibt der Ausdruck für die wesentlichen Schwingungen der Körpermoleküle unverändert, die unwesentlichen Schwingungen aber können vernachlässigt werden.

Um nun erstens darzuthun, dass a_0 nicht constant ist, geht Sellmeier davon aus, dass ein natürlicher Lichtstrahl nie eine Polarisation zeigt, während die Theorie einen homogenen Lichtstrahl zu jeder Zeit als entweder elliptisch oder kreisförmig oder geradlinig polarisirt darstellt. Um

diesen Widerspruch zu heben, ist die Annahme nothwendig, dass die Bahn des Aethertheilchens Veränderungen unterworfen ist, welche so schnell vor sich gehen, dass die in einer noch so kurzen bemerkbaren Zeit nach einander vorkommenden Polarisationszustände des Strahles im Gesichtseindruck sich gegenseitig aufheben und daher nicht zur Wahrnehmung gelangen können. Weiter schliesst dann Sellmeier aus den Beobachtungen von Fizeau und Foucault, nach denen im Sonnenlicht noch Interferenzen bei einem Gangunterschied von 4000 Wellenlängen und im Natriumlicht bei einer Wegdifferenz von 50000 Wellenlängen beobachtet sind, dass diese Veränderungen der Bahnellipsen des Aethertheilchens keine plötzlichen sein können, sondern dass sie im Verhältniss zur Geschwindigkeit der Schwingungen sehr langsam und stetig erfolgen. „Zerlegt man nun, schliesst Sellmeier weiter, einen natürlichen homogenen Lichtstrahl in zwei senkrecht auf einander polarisirte, bringt die letzteren dann in eine einzige Polarisationsebene und lässt sie mit einander interferiren, so kann man schliessen, dass innerhalb jeder noch so kurzen bemerkbaren Zeit alle möglichen Phasenunterschiede zwischen beiden Strahlen in gleichem Grade vertreten sind und dass daher die in demselben kurzen Zeitraum nach einander folgenden Interferenzwirkungen in dem einheitlichen Lichteindrucke sich gegenseitig aufheben werden oder dass, wie man es etwas uneigentlich auszudrücken pflegt, solche Strahlen niemals interferiren können.“

Es folgt also endlich, dass die Schwingungsamplitude a' in einem linear polarisirten homogenen Lichtstrahl nicht constant, sondern veränderlich ist.

Die mittlere Anzahl derjenigen Schwingungen, welche von zwei benachbarten Nullwerthen der Amplitude eingeschlossen sind, werde eine Schwingungsreihe genannt.

Da nun nach der vorigen Nummer die ξ_0, η_0, ζ_0 proportional den ϱ' sind, so gilt diese eben gemachte Folgerung auch von den Schwingungen der Gleichgewichtsorte, es ist also a_0 veränderlich.

Beweis, dass die Veränderlichkeit von a_0 auf die Gleichung der wesentlichen Schwingungen (2.) und (3.) ohne Einfluss ist.

Wir können uns denken, dass das Zu- und Abnehmen der Schwingungsamplitude des Aethers und damit auch der des Gleichgewichtsortes des Körpertheilchens erzeugt werde durch das successive Entstehen und Verschwinden von auf einander gelagerten, gleichphasigen elementaren Schwingungsreihen, deren Amplituden unendlich klein aber constant sind.

Es bestehe also a_0 aus den zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 ... entstandenen unendlich kleinen Elementen $\Delta(a_0)_1$, $\Delta(a_0)_2$ ..., so dass ist

$$\xi_0 = \left[\Delta(a_0)_1 + \Delta(a_0)_2 + \dots\right] \sin 2\pi \frac{t+\alpha}{T}.$$

a) Es lassen sich dann, wenn δ und T verschieden sind, die zu denselben Zeiten entstehenden wesentlichen Schwingungen des Körpertheilchens folgendermassen ausdrücken:

$$\frac{T^2}{T^2-\delta^2}\,\varDelta(a_0)_1 \sin 2\pi\frac{t+\alpha}{T},\quad \frac{T^2}{T^2-\delta^2}\,\varDelta(a_0)_2 \sin 2\pi\frac{t+\alpha}{T},\;\ldots\ldots$$

Durch deren Aufeinanderlegen entsteht

$$\frac{T^2}{T^2-\delta^2}\left[\varDelta(a_0)_1+\varDelta(a_0)_2+\ldots\right]\sin 2\pi\frac{t+\alpha}{T}=\frac{T^2}{T^2-\delta^2}a_0 \sin 2\pi\frac{t+\alpha}{T},$$

also derselbe Werth der wesentlichen Schwingungen wie oben (2.).

b) Ist $T=\delta$, so erhalten wir durch die analoge Zusammenlegung nach (3.)

$$-\pi\left[\frac{t-t_1}{\delta}\varDelta(a_0)_1+\frac{t-t_2}{\delta}\varDelta(a_0)_2+\ldots\right]\cos 2\pi\frac{t+\alpha}{\delta}=-a\cos 2\pi\frac{t+\alpha}{\delta},$$

wo $\frac{da}{dt}=\frac{\pi}{\delta}a_0$ ist.

Beweis, dass die unwesentlichen Schwingungen wegfallen müssen.

Die unwesentlichen Schwingungen haben bei der oben gemachten Zusammensetzung nicht immer dieselbe Phase β, sondern dieselbe hat alle Werthe zwischen 0 und δ, und zwar sind alle diese Werthe in gleichem Grade vertreten, es ist mithin die Gesammtamplitude nicht gleich der Summe der einzelnen Amplituden, sondern es ist das Quadrat der Gesammtamplitude gleich der Summe der Quadrate der Einzelamplituden und es bleibt desshalb die Gesammtamplitude immer unendlich klein.

Es soll nun im Folgenden die Ausführung des Beweises gegeben werden für den Fall, dass T von δ verschieden ist.

Zur Zeit t' gehe die Amplitude a_0 des Gleichgewichtsorts über in $a_0+\varDelta a_0$, und es werden dadurch die unwesentliche Schwingung $\pm\varDelta b \sin 2\pi\frac{t+\beta}{\delta}$ erzeugt.

Wenn also vor der Zeit t' war

$$\xi=\frac{T^2}{T^2-\delta^2}a_0 \sin 2\pi\frac{t+\alpha}{T}+b\sin 2\pi\frac{t+\beta'}{\delta},$$

so ist nach derselben

$$\xi=\frac{T^2}{T^2-\delta^2}(a_0+\varDelta a_0)\sin 2\pi\frac{t+\alpha}{T}+b\sin 2\pi\frac{t+\beta'}{\delta}\pm\varDelta b\sin 2\pi\frac{t+\beta}{\delta}.$$

Zur Zeit t' müssen diese beiden Werthe einander gleich sein. Dies giebt

$$\pm\varDelta b\sin 2\pi\frac{t'+\beta}{\delta}=-\frac{T^2}{T^2-\delta^2}\varDelta a_0 \sin 2\pi\frac{t'+\alpha}{T}.$$

Dessgleichen sind die Geschwindigkeiten d. h. die Werthe von $\frac{d\xi}{dt}$ zur Zeit $t=t'$ dieselben. Dies giebt

$$\pm\varDelta b\cos 2\pi\frac{t'+\beta}{\delta}=-\frac{\delta}{T}\cdot\frac{T^2}{T^2-\delta^2}\varDelta a_0 \cos 2\pi\frac{t'+\alpha}{T}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{t'+\beta}{\delta} = \frac{T}{\delta} \operatorname{tg} 2\pi \frac{t'+\alpha}{T}, \tag{a.}$$

$$\varDelta b^2 = \left(\frac{T^2}{T^2-\delta^2}\varDelta a_0\right)^2 \left(\sin^2 2\pi \frac{t'+\alpha}{T} + \frac{\delta^2}{T^2}\cos^2 2\pi \frac{t'+\alpha}{T}\right). \tag{b.}$$

$\varDelta b$ ist also ein unendlich kleiner Werth, so lange T von δ verschieden nd $\varDelta a_0$ unendlich klein ist.

Nehmen wir nun einen Zeitraum von t_1 bis t_r und verändere sich in esem die Amplitude des Gleichgewichtsortes rmal um $\varDelta a_0$, gleichgültig Ab- oder Zunahme, so werden dadurch r unwesentliche Schwingungsihen erzeugt, die sich auf einander lagern. Die resultirende Schwingung dann

$$B \sin 2\pi \frac{t+\gamma}{\delta} = \varDelta b_1 \sin 2\pi \frac{t+\beta_1}{\delta} + \varDelta b_2 \sin 2\pi \frac{t+\beta_2}{\delta} t \ldots$$
$$= \sum \varDelta b \sin 2\pi \frac{t+\beta}{\delta},$$

die Werthe von $\varDelta b$ und β aus (a) und (b) zu berechnen sind, indem t statt t' gesetzt wird $t_1, t_2 \ldots . t_r$.

Da die vorstehende Gleichung gelten muss für jedes $t > t_1$, so ilt man durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher trigonometrischer ktionen von t ·

$$B \sin 2\pi \frac{\gamma}{\delta} = \sum \varDelta b \sin 2\pi \frac{\beta}{\delta},$$

$$B \cos 2\pi \frac{\gamma}{\delta} = \sum \varDelta b \cos 2\pi \frac{\beta}{\delta}, \text{ mithin}$$

$$B^2 = \sum \varDelta b^2 + \sum \varDelta b_m \varDelta b_n \cos 2\pi \frac{\beta_m - \beta_n}{\delta},$$

ıs zweite Glied auf der rechten Seite die Summe der r(r — 1) Probedeutet, welche man erhält, wenn man jeden der r Werthe von $\varDelta b$ em zugehörigen β in der angezeigten Weise mit jedem der r — 1 anWerthe von $\varDelta b$ und dem zugehörigen β verbindet. Ist nun $\varDelta a_0$ lich klein, also die Veränderung der Amplitude des Gleichgewichtslangsam und continuirlich, so wird r unendlich gross genommen ı müssen. Da unter den obigen Produkten eine grosse Menge von ı Grössen vorhanden sein wird, die einander absolut gleich sind, ɜn aber der Werth von $\cos 2\pi \frac{\beta_m - \beta_n}{\delta}$ ebenso oft negativ als po-:, so kann die Summe derselben mit grosser Näherung gleich 0 werden, so dass also ist

$$B^2 = \sum \varDelta b^2,$$

enn wir den Mittelwerth von $\varDelta b$ mit $\varDelta b'$ bezeichnen,

$$B^2 = r \varDelta b'^2.$$

nun aber dieser Mittelwerth unendlich klein ist!, wenn gleichzeitig lich gross gesetzt wird, so ist

$$B^2 = \infty \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = \text{unendlich klein, was zu beweisen war.}$$

Wenn aber T von δ nur sehr wenig verschieden ist, kann, obgleich Δa_0 unendlich klein ist, dennoch nach (b) Δb einen endlichen Werth erlangen und daher, weil die in ihnen enthaltene lebendige Kraft der Lichtbewegung verloren geht, einen merklichen Lichtverlust erzeugen.

Wenn wir nun der Einfachheit wegen unsere Zeit t so rechnen, dass α wegbleiben kann, so bleiben zur weiteren Betrachtung übrig die folgenden Gleichungen.

Die Schwingungsgleichung des momentanen Gleichgewichtsortes

$$\xi_0 = a_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Die Verschiebung des Körpertheilchens in der Richtung der x,

a) wenn die Schwingungsdauer des Lichtes verschieden ist von der eigenthümlichen Schwingungsdauer δ des Körpertheilchens

$$\xi = \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} a_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} = \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} \xi_0, \tag{4.}$$

b) wenn $T = \delta$.

$$\xi = - a \cos 2\pi \frac{t}{\delta}, \text{ wo } \frac{da}{dt} = \frac{\pi}{\delta} a_0 \text{ ist.} \tag{5.}$$

Sellmeier erwähnt noch, dass die Gleichung (5.) sich einfach ableiten lässt aus den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \xi \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\delta^2} (\xi - \xi_0).$$

5. Rückwirkung der Schwingungen der Körpertheilchen auf die Aetherschwingungen.

Die Schwingungsgleichungen sind:

$$\xi_0 = a_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} \text{ für den momentanen Gleichgewichtsort,}$$

$$\varrho' = a' \sin 2\pi \frac{t}{T} \text{ für den Aether.}$$

In Bezug auf die der Körpertheilchen unterscheiden wir entsprechend den Gleichungen (4) und (5) der vorigen Nummer:

a) Die Körperschwingungen sind gegeben, wenn T von δ verschieden ist, durch

$$\xi = \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} a_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} = \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} \xi_0,$$

also ist die Schwingungsdauer des Körpermoleküls gleich der seines Gleichgewichtsortes und der des Aethertheilchens d. h. durch das Licht werden stets nur solche Schwingungen der Körpertheilchen erregt, welche mit den Lichtschwingungen isochron sind.

Da die Amplitude $\frac{T^2}{T^2 - \vartheta^2} a_0$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ wird, je nachdem $T \gtrless \vartheta$ ist, so folgt aus der Formel, dass, wenn die eigenthümliche Schwingungsdauer des Körpertheilchens kleiner ist als die Schwingungsdauer seines momentanen Gleichgewichtsortes, so bewegen sich beide, das Körpertheilchen und sein Gleichgewichtsort, stets in gleicher Richtung, ist dagegen jene grösser als diese, so ist die Bewegung des einen stets der des andern entgegengesetzt.

Ist $T < \vartheta$, so wird, wenn $\xi_0 \gtrless 0$ ist, gleichzeitig $\xi \lesseqgtr 0$ d. h. es befinden sich das Körpertheilchen und sein momentaner Gleichgewichtsort stets auf entgegengesetzten Seiten des Ruheortes und da gleichzeitig $\xi_0 = 0$ und $\xi = 0$ ist, so begegnen sich die Punkte im Ruheort.

Ist $T > \vartheta$, so wird, wenn $\xi_0 \gtrless 0$ ist, gleichzeitig $\xi \gtrless 0$ d. h. es befinden sich das Körpertheilchen und sein momentaner Gleichgewichtsort auf derselben Seite des Ruheortes und, da ξ immer $> \xi_0$ ist, so befindet sich das Körpertheilchen nie zwischen seinem Gleichgewichts- und Ruheorte.

Die Schwingungsamplitude des Körpertheilchens $\frac{T^2}{T^2 - \vartheta^2} a_0$ ist für ϑ unendlich klein a_0 und für unendlich gross verschwindend klein d. h. wenn die eigenthümliche Schwingungsdauer des Körpertheilchens unendlich klein ist, so befindet sich dasselbe stets unendlich nahe seinem momentanen Gleichgewichtsorte, wenn sie aber unendlich gross ist, bleibt das Körpertheilchen fast unbeweglich in seinem Ruheorte.

Für die Rückwirkung der Schwingungen der Körpertheilchen auf die Aetherschwingungen ist nun besonders zu beachten, dass die Amplitude der Schwingungen der ersteren stets proportional ist der seines Gleichgewichtsortes mithin auch der des Aethers. Wenn demnach die Amplitude des Aethers am Ende einer Schwingungsreihe gleich Null geworden ist, so ist es auch die des Körpertheilchens. Letzteres behält also von der in seinen Schwingungen enthalten gewesenen lebendigen Kraft nichts zurück, so dass also dieselbe der Lichtbewegung verblieben ist d. h. eine Absorption des Lichtes findet durch diese Schwingungen nicht statt. Da aber durch dieselben die Masse der schwingenden Theilchen vermehrt ist, so muss dadurch ein Einfluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und damit auf die Brechung des Lichtes ausgeübt werden.

b) Die Körperschwingungen sind gegeben, wenn $T = \vartheta$ ist, durch

$$\xi = -\,a \cos 2\pi \frac{t}{\vartheta}, \text{ wo } \frac{da}{dt} = \frac{\pi}{\vartheta} a_0 \text{ ist.}$$

Statt dessen können wir setzen

$$\xi = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\vartheta} - \frac{1}{4}\right).$$

Die Schwingungen des Körpertheilchens sind demnach gegen die seines Gleichgewichtsortes, also auch gegen die des Aethers, um den vierten

Theil einer Schwingungsdauer verspätet. Aus der Gleichung für die Amplitude a erkennt man, dass die des Körpertheilchens während jeder Schwingung um die mit der Zahl π multiplicirte Amplitude seines Gleichgewichtsortes zunimmt.

In Bezug auf die Rückwirkung der Körperschwingungen auf die Aetherschwingungen ist wichtig, dass gerade, wenn diese Schwingung aufhört, die erstere ihr Maximum erreicht. Die in der Schwingungsbewegung des Körpertheilchens enthaltene lebendige Kraft geht daher vollständig der Lichtbewegung verloren. Die durch unsere Gleichung dargestellten Körperschwingungen sind demnach die Ursache der Absorption.

„Hat die Schwingungsreihe, folgert Sellmeier weiter, im erregenden Lichte ihr Ende erreicht, d. h. ist ihre Amplitude bis zu Null herabgesunken, so werden die Oscillationen der Körpertheilchen, deren Amplitude jetzt gerade im Maximum sich befindet, noch fortdauern, und sie werden auch noch fortfahren, um eine Viertel-Undulation verspätete Aetherschwingungen zu erregen. Da diese aber nicht mehr in entgegengesetzte Aetherschwingungen aufgehen, weil solche nicht mehr vorhanden sind, so werden sie im Allgemeinen als ausgestrahltes Licht zum Vorschein kommen; es ist dies das Fluorescenzlicht, welches demnach jedesmal erst dann beginnt, wenn eine Schwingungsreihe im erregenden Lichte ihr Ende erreicht hat, was allerdings Millionenmale in der Secunde vorkommen mag.“

6. Bestimmung des Brechungsexponenten.

Um den Einfluss der Schwingungen der Körpermoleküle auf die der Aethermoleküle zu bestimmen, bedient man sich des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Schwingt das Aethertheilchen m, so ist die Kraft, die dasselbe, wenn es sich um ξ von der Ruhelage entfernt hat, nach dieser Lage zurücktreibt, nach § 224 $km\xi$, die Arbeit also, welche verbraucht wird, um das Theilchen m um die Strecke a zu entfernen ist

$$\int_0^a km\xi\, d\xi = \tfrac{1}{2} kma^2 .$$

Wenn nun dieses Theilchen allein schwingt, so wird es demnach beim Passiren des Gleichgewichtsortes die lebendige Kraft $\frac{1}{2}kma^2$ besitzen. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, sondern zieht es die Körpertheilchen mit in Bewegung oder helfen diese der Bewegung, so verliert oder gewinnt das Theilchen zur vorhandenen lebendigen Kraft.

Ist sie L geworden, wo also dann $L \lesseqgtr \frac{1}{2}kma^2$ wird bei einem Verlust oder Gewinn, so ist die Abgabe (der Gewinn) $\frac{1}{2}kma^2 - L$ $(L - \frac{1}{2}kma^2)$. Beim Steigen wird also diese lebendige Kraft wieder gewonnen (abgegeben), wenn ein sich gleichbleibender Schwingungszustand stattfinden soll.

Nach den bekannten Bezeichnungen ist für die Lichtbewegung inner-

halb des Körpers $T = \frac{\lambda}{c}$ und für den leeren Raum bei derselben Wellenlänge $T' = \frac{\lambda}{n c}$, also $T' = \frac{T}{n}$.

Im leeren Raum ist, wenn das Aethertheilchen um ξ verschoben ist, ie Kraft, mit der es nach dem Ruheorte zurückstrebt, nach § 224

$$\frac{4\pi^2}{T'^2} m\xi, \text{ also } k = \frac{4\pi^2}{T'^2}.$$

Da die Aetherverschiebung im Körper ganz dieselbe ist, so muss auch, gen der überall gleichen Elasticität des Aethers, k denselben Werth im rper haben, also

$$k = \frac{4\pi^2}{T'^2} = n^2 \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Denken wir uns nun ein Volumen V so klein, dass alle in demselben be- llichen Aethertheilchen in gleicher Phase schwingend angesehen werden nen, aber auch so gross, dass es eine grosse Anzahl von Körpertheilchen ält. Ist m' die Masse des Aethers in V und a' seine Schwingungs- litude, so ist nach dem Vorigen die geleistete Arbeit, wenn das Aether- chen die Amplitude a' hat, $n^2 \frac{2\pi^2}{T^2} m' a'^2$.

Die lebendige Kraft, die es hat, wenn es zur Ruhelage zurückkommt, i es einen Theil der verwendeten Arbeit an die Körpermolecüle ab- , bestimmen wir aus der Gleichung seiner Schwingungsbewegung, ich aus $\xi' = a' \sin 2\pi \frac{t}{T}$, und erhalten dieselbe gleich

$$\tfrac{1}{2} m' \left(\frac{d\xi'}{dt}\right)^2_{(t = \frac{1}{2} T)} = \frac{2\pi^2}{T^2} m' a'^2.$$

Der Verlust an lebendiger Kraft ist demnach die Differenz der ver- hten Arbeit und der vorhandenen lebendigen Kraft d. i.

$$(n^2 - 1) \frac{2\pi^2}{T^2} m' a'^2. \tag{a}$$

ieser Verlust ist an die Körpermoleküle innerhalb V übergegangen; o eine Gleichung zu erhalten suchen wir die gewonnene lebendige ler Körpermoleküle. Wir brauchen nur die Körpertheilchen inner- zu berücksichtigen, denn von den Molekülen an der Grenze erhalten erhalb befindlichen genau ebensoviel von dem ausserhalb befind- Aether, als die Körpertheilchen ausserhalb von dem Aether inner- pfangen.

r die Schwingung eines Körpertheilchens in einer seiner Axen, eigenthümliche Schwingungsdauer δ ist, sei a die Schwingungs- le und für die seines Gleichgewichtsortes sei sie a_0, so ist die ge- Arbeit für die grösste Entfernung des Körpertheilchens vom Gleich- ort, da hier $k = \frac{4\pi^2}{\delta^2}$ ist,

$$\frac{2\pi^2}{\delta^2} m (a - a_0)^2,$$

und es würde demnach mit dieser lebendigen Kraft im Ruheorte ankommen.

Seine Beweguug ist aber gegeben durch $\xi = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$, hat also bei seiner Ankunft im Ruheorte die lebendige Kraft

$$\tfrac{1}{2} m \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2_{(t = \frac{1}{4}T)} = \frac{2\pi^2}{T^2} m a^2.,$$

mithin hat es bei Ankunft im Ruheorte an lebendiger Kraft gewonnen

$$\frac{2\pi^2}{T^2} m a^2 - \frac{2\pi^2}{\delta^2} m (a - a_0)^2.$$

Da nun aber nach (2.) $a = \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} a_0$ ist, so geht der Ausdruck für den Gewinn über in

$$\frac{2\pi^2}{T^2} m \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} a_0^2.$$

Aehnliche Ausdrücke, nur etwa mit anderen Werthen von δ und a_0, erhält man für dasselbe Körpertheilchen in Bezug auf seine anderen Schwingungsaxen.

Für die ganze lebendige Kraft, welche sämmtliche in V befindliche Körpertheilchen, während ihres Fallens nach dem Ruheorte von dem Aether empfangen, kann man demnach schreiben

$$\frac{2\pi^2}{T^2} \Sigma m \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} a_0^2, \tag{b.}$$

wo jedes Körpertheilchen in Bezug auf seine drei Hauptaxen genommen werden muss.

Durch Gleichsetzung von (a.) und (b.) erhält man die gewünschte Gleichung für die brechende Kraft eines Körpers unter der Voraussetzung, dass die Lage der Gleichgewichtsörter der Körpertheilchen nur von dem Aether abhängig sind,

$$n^2 - 1 = \frac{\Sigma m \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} a_0^2}{m' a'^2} = \frac{\Sigma m a a_0}{m' a'^2}.$$

Das Snmmenzeichen Σ bezieht sich auf alle Körpertheilchen, welche in einem beliebigen Raum enthalten sind und bei denen δ nicht $= T$ ist, während m' die Masse des in demselben Raum enthaltenen Aethers bedeutet.

Für die blos refractiven Theilchen lässt sich wegen der Kleinheit der eigenthümlichen Schwingungsdauer δ dieser Werth in folgende Reihe entwickeln

$$n^2 - 1 = \frac{\Sigma m a_0^2}{m' a'^2} + \frac{\Sigma m a_0^2 \delta^2}{m' a'^2} \frac{1}{T^2} + \frac{\Sigma m a_0^2 \delta^4}{m' a'^2} \frac{1}{T^4} + \dots,$$

dem man, wenn man $\lambda = cT$ setzt, folgende Form geben kann:

$$n^2 = 1 + A + \frac{B'}{\lambda^2} + \frac{C'}{\lambda^4} + \ldots .$$

Diese Reihe unterscheidet sich von der Cauchy'schen (§ 309) nur dadurch, dass sie n^2 statt n liefert.

7. Veranschaulichung der brechenden Kraft und des Brechungsexponenten.

A. Curve der brechenden Kraft.

In der Formel der vorhergehenden Nummer

$$n^2 - 1 = \frac{\Sigma\, m \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} a_0^2}{m' a'^2} = N$$

sind alle Körpertheilchen enthalten, also auch diejenigen, welche die Absorption bewirken. Bezeichnen wir nun δ_1 die eigenthümliche Schwingungsdauer der absorbirenden Körpertheile und δ die der brechenden, so ist

$$N = \frac{\Sigma\, m \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} a_0^2}{m' a'^2} + \frac{\Sigma\, m \frac{T^2}{T^2 - \delta_1^2} a_0^2}{m' a'^2}.$$

Ist dann N_r die brechende Kraft der refractiven und N_a die der absorbirenden Körpertheile, so ist

$$N_r = \frac{\Sigma\, m \frac{T^2}{T^2 - \delta^2} a_0^2}{m' a'^2}, \qquad N_a = \frac{\Sigma\, m \frac{T^2}{T^2 - \delta_1^2} a_0^2}{m' a'^2},$$

$$N = N_r + N_a .$$

Es ist aber N_r nach der vorigen Nummer abgekürzt

$$N_r = N_0 + B \frac{1}{T^2} + C \frac{1}{T^4} + \ldots$$

Lassen wir für die graphische Darstellung der brechenden Kraft $\frac{1}{T^2}$ die Abscissen eines rechtwinkligen Coordinatensystems sein und N die zugehörigen Ordinaten, so heisse die hierdurch charakterisirte Curve, die Curve der brechenden Kraft.

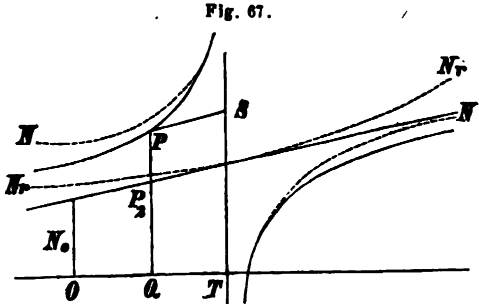
Die Gleichung der Curve der brechenden Kraft für die refractiven Theilchen ist also

$$N_r = N_0 + Bx + Cx^2 + \ldots,$$

wo die folgenden Coefficienten immer kleiner werden.

Da nun $\frac{dN_r}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = B + 2Cx \ldots$, ist und die Coefficienten B, C ... positive Grössen sind, welche immer kleiner werden, so wird die Curve nur wenig von einer Geraden abweichen, also ungefähr (Fig. 67) die punktirte Linie $N_r N_r$ geben.

Fig. 67.



Nehmen wir nun zunächst, um die absorptiven Theilchen zu berücksichtigen, nur solche von der einen Schwingungsdauer δ_1 hinzu, so ist

$$N_a = \frac{T^2}{T^2 - \delta_1^2} \frac{\Sigma m a_0^2}{m' a'^2} = \text{abgekürzt } K_1 \frac{T^2 \delta_1^2}{T^2 - \delta_1^2},$$

wo K_1 die Constante $= \frac{1}{\delta_1^2} \cdot \frac{\Sigma m a_0^2}{m' a'^2}$ ist.

Es ist mithin

$$N - N_r = K_1 \frac{T^2 \delta_1^2}{T^2 - \delta_1^2}.$$

Sei nun vorläufig die Curve N_r als Gerade angenommen, die mit der Abscissenaxe den Winkel α bilde, so können wir die eben aufgestellte Gleichung umformen in

$$(N - N_r) \frac{T^2 - \delta_1^2}{T^2 \delta_1^2} \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{K_1}{\cos \alpha} = \text{Const.}$$

Stelle an der Figur 67 die ausgezogene Curve die Linie der brechenden Kraft vor, so ist für einen Punkt P derselben

$$PQ = N,\ RQ = N_r \text{ also } PR = N - N_r,$$

da ferner ist $OT = \frac{1}{\delta_1^2}$, $QT = \frac{1}{\delta_1^2} - \frac{1}{T^2} = \frac{T^2 - \delta_1^2}{T^2 \delta_1^2}$, also

$$PS = QT \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{T^2 - \delta_1^2}{T^2 \delta_1^2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha},$$

so ist nach der obigen Gleichung die Curve der brechenden Kraft bestimmt durch

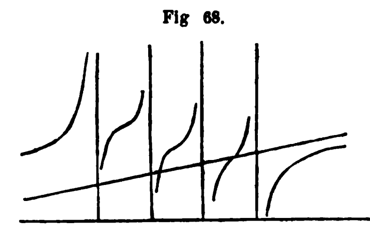
$$PR \,.\, PS = \text{Const.},$$

also ist dieselbe eine Hyperbel, welche die der Abscisse $\frac{1}{\delta_1^2}$ entsprechende Ordinate zur einen und die als gerade Linie gedachte Curve der brechenden Kraft der refractiven Theilchen zur anderen Asymptote hat. Giebt man dann der Curve der refractiven Theilchen die ihr zukommende Krümmung, so müssen die ihr entsprechenden Theile der Hyperbel an dieser Krümmung in der Weise Theil nehmen, dass die Coordinaten-Differenz zwischen beiden keine Aenderung erleidet.

Die Linie für N ist die der ausgezogenen entsprechende punktirte an der Figur mit N bezeichnete Curve.

Hiernach kann weiter entwickelt werden, was es für einen Einfluss hat, wenn mehrere von einander getrennte Absorptionen vorkommen. Es wird dann die Curve der brechenden Kraft die Gestalt der in Fig. 68 gezeichneten Linie haben, wobei man zu beachten hat, dass durch ein öfteres Herausnehmen solcher Summen die vorhergehenden Theile der Curve etwas gehoben, die nachfolgenden aber gesenkt werden.

Fig 68.



Da ferner bei den festen und flüssigen Körpern die Absorption ge-

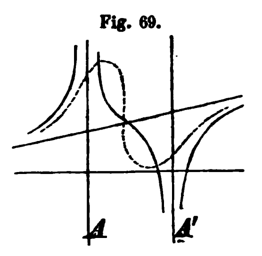
wöhnlich nicht auf einen bestimmten Werth von T beschränkt ist, sondern auf einen ganzen mehr oder weniger beschränkten Theil, der sich beziehe auf das T von δ' bis δ'', so ist

$$N_a = \int_{\frac{1}{\delta'^2}}^{\frac{1}{\delta^2}} K \left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{T^2}\right)^{-1} d\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Es ergiebt sich dann, wenn man K, welches eine unbekannte Funktion von $\frac{1}{\delta^2}$ ist, als Constante betrachtet, die an Fig. 69 ausgezogene Linie, wo A und A' die Grenzen des absorbirten Raumes bezeichnen. Es liegt mithin das Maximum der brechenden Kraft in diesen Grenzen.

Selbst wenn man die Absorption, welche vor der Hauptabsorption beginnt und auf der andern Seite über dieselbe hinausragt, aber durch das Auge von der Hauptabsorption nicht unterschieden werden kann, berücksichtigt, so nimmt doch die brechende Kraft (Fig. 69) bis zu A und A' zu.

Fig. 69.



Da ferner von K anzunehmen ist, dass es im Allgemeinen an den Grenzen dieses Raumes unendlich klein beginnt und nach dem Innern desselben zunimmt, so wird das Maximum der brechenden Wirkung der absorptiven Theilchen etwas weiter nach dem Innern des absorbirten Raumes sich verschieben und nicht unendlich gross werden. Die Curve hat dann die in Fig. 69 punktirt gezeichnete Gestalt.

B. Curve der Brechungsexponenten.

Die Curve der brechenden Kraft muss in Bezug auf Steigen und Fallen übereinstimmen mit den der Brechungsexponenten; denn hier sind die Ordinaten n und bei jener N, wo $N = n^2 - 1$ ist. Man kann überhaupt die Formen beider Curven als ähnlich betrachten, nur hätte man zu bedenken, dass hier die Curvenäste weder genaue Hyperbeln noch einander congruent sind.

8. Folgerungen aus den obigen Formeln.

Die obigen Formeln enthalten nicht nur eine Erklärung der Dispersion, sondern zeigen auch die Abhängigkeit der Brechung von der Absorption.

Wir haben in der vorigen Nummer gefunden

$$N - N_r = N_a = \frac{T^2}{T^2 - \delta_1^2} \frac{\Sigma m a_0^2}{m' a'^2}.$$

Wenn wir nun bedenken, dass $N - N_r = n^2 - n_r^2$, wo n den wirklichen und n_r den Brechungsexponenten bezeichnet, der stattfindet, wenn gar keine Absorption des Lichtes vorhanden wäre. Setzen wir ferner

für $\Sigma \frac{m a_0^2}{m' a'^2}$, als Constante, einfach A, so ist $n^2 - n_r^2 = A \frac{T^2}{T^2 - \delta_1^2}$.

Dieser Ausdruck zeigt zunächst, dass nur, wenn die Grösse A einen merklichen Werth hat, die Absorption einen Einfluss auf den Brechungsexponenten haben kann.

Ist $T > \delta_1$, so ist $n > n_r$, also wird der Brechungsexponent um so grösser, je näher die Schwingungsdauer derjenigen des absorbirten Lichtes ist.

Ist $T < \delta_1$, so ist $n < n_r$ und der Unterschied ist wiederum um so grösser, je näher die bezeichneten Schwingungsdauern einander sind.

Fig. 70.

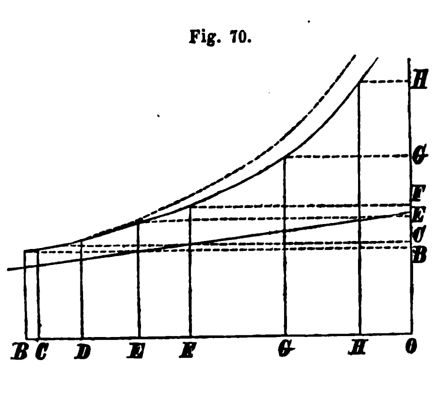


Fig. 71.

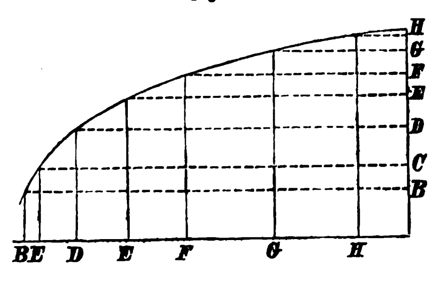
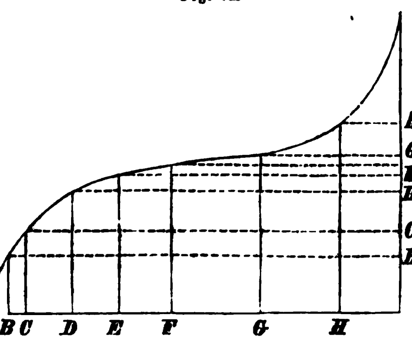


Fig. 72.



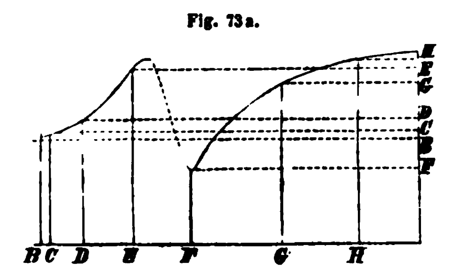
Schon oben ist erwähnt, dass, wie es bei den festen und flüssigen Körpern immer der Fall ist, die Absorption sich nicht nur auf eine Schwingungsdauer δ_1 bezieht, sondern auf eine Reihe nebeneinander liegender Schwingungen, wesswegen ein Absorptionsband entsteht. Wir müssen auf der rechten Seite unserer Gleichung eine Summe von Gliedern erhalten, wenn mehrere Absorptionsstreifen vorhanden sind. Vor und hinter jedem Absorptionsband haben wir dann dieselbe Veränderung von n.

Sämmtliche Folgerungen für die Brechungsexponenten sollen nun durch Figuren anschaulich gemacht werden.

Die Abscissen sind wie oben die Werthe $1 : T^2$, und in allen Figuren bedeuten die Buchstaben B, C, H die Endpunkte der Abscissen für die mit denselben Buchstaben bezeichneten Fraunhofer'schen dunklen Linien.

1) Es findet eine Absorption im ultravioletten Licht statt. Fig. 70. Die punktirte Linie bezieht sich auf den Fall, dass die Absorption dem Spectrum näher liegt. Die Gerade soll die näherungsweise Curve für n_r vorstellen.

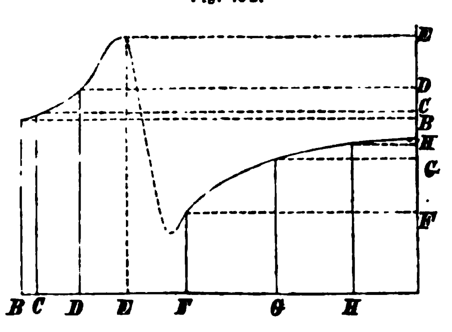
2) Absorption findet im Ultrarothen statt. (Fig. 71.)



3) Absorption im Ultraroth und Ultraviolett. (Fig. 72.)

4) Absorption innerhalb des Spectrums. (Fig. 73a, Fig. 73b.)

Diese Figuren geben zugleich eine leichte Uebersicht der Dispersion und namentlich die Fig. 73 eine der anomalen Dispersion.



Die Curve der Brechungsexponenten gewährt den Vortheil, dass sie näherungsweise die Farbenvertheilung im Spectrum zu erkennen giebt. Wir können die im § 311, 3. eingeführte Grösse $d\alpha'$ auch auffassen als die Differenz der Ablenkung der aus dem Prisma austretenden Strahlen. Der absolute Werth dieser Grösse ist dort gefunden worden

$$d\alpha' = \frac{\cos\alpha\cos\beta'}{\cos\alpha'\cos\beta}\cdot d\alpha.$$

Nach § 311, 4. ist aber

$$dn = \frac{\cos\alpha\cos\beta'}{\sin\varphi}\,d\alpha,$$

mithin ist

$$d\alpha' = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha'\cos\beta}\,dn.$$

Wenn nun α' nicht sehr klein ist, so dass man den Coefficienten von dn constant nehmen kann, so wird es erlaubt sein, die Differenzen dieser Ablenkung nahe proportional den Differenzen der Brechungsexponenten zu setzen. Man braucht also nur die Punkte der Curve auf eine Verticale zu projiciren, um auf dieser für die Werthe von $\frac{1}{T^2}$ die betreffenden Orte im Spectrum zu erhalten (cf. § 313.)

9. Die Theorie von O. Meyer.*)

Meyer geht von dem Gedanken aus, dass, wenn eine Theorie der anomalen Dispersion aufgestellt werden soll, es vortheilhaft ist, die auffallendste Eigenschaft aller anomal brechenden Körper als die ursächliche anzusehen. Eine solche Eigenschaft ist die Undurchsichtigkeit, welche aus einem Widerstand, den die schwingenden Aethertheilchen in solchen Mitteln erfahren,

*) Versuch einer Erklärung der anomalen Farbenzerstreuung. Pogg. Ann. 145.

abzuleiten sein wird. Unter der Annahme kleiner Amplituden und in Folge davon geringer Geschwindigkeiten der Schwingungen setze man diese Widerstandskräfte den Geschwindigkeiten proportional.

Ist der Sitz der angenommenen Widerstandskraft in der ponderablen Materie, so kann diese als unbewegt angesehen und die Kraft der absoluten Geschwindigkeit des Aethertheilchens proportional genommen werden. Es kann aber auch vorausgesetzt werden, dass ein oscillirendes Aethertheilchen von den benachbarten Aethertheilchen beeinflusst wird, dann ist die Kraft proportional den relativen Geschwindigkeiten. Letztere Annahme führt zur Annahme einer inneren Reibung im Lichtäther halbdurchsichtiger Medien, während die erstere Hypothese eine Kraft einführt, die sich mit der äusseren Reibung der Flüssigkeiten vergleichen lässt.

Gehen wir nun zurück zu der allgemeinen Gleichung für die fortschreitende Wellenbewegung (§ 225 S. 142)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2},$$

wo ξ die Richtung des Ausschlages und y die der Fortpflanzung bezeichnet.

a) Die Voraussetzung einer äusseren Reibung verallgemeinert diese Differentialgleichung in die folgende

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - 2\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Deren Integral setzen wir mit Einführung der schon gebrauchten Bezeichnung § 279

$$\xi = C e^{-\beta y + \left(\frac{y}{c} - t\right) ki}.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in die gegebene Differentialgleichung erhalten wir, wenn wir das Reelle und Imaginäre einzeln einander gleichsetzen

$$-k^2 = \mu^2 \beta^2 - \frac{\mu^2 k^2}{c^2}, \quad \frac{\mu^2 \beta k}{c} = \varepsilon k.$$

Wird aus diesen Gleichungen β eliminirt und $\frac{1}{c}$ berechnet, so erhält man

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2\mu^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon^2}{k^2}}\right).$$

Setzt man dann die Geschwindigkeit des Lichtes im freien Raum 1 und n den Brechungsexponenten, so ist $k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda}$, also

$$n^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2\mu^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{\pi^2}}\right).$$

„Nach dieser Formel, sagt Meyer, nimmt mit wechselndem Werthe der Wellenlänge λ das Brechungsverhältniss ebenfalls zu. Dieses Gesetz ist dem gewöhnlichen Dispersionsgesetz gerade entgegengesetzt, es enthält also anomale Dispersion.“

b) Bei Voraussetzung einer inneren Reibung haben wir unserer einfachen Differentialgleichung noch ein Glied proportional der relativen Geschwindigkeit $\frac{\partial^3 \xi}{\partial t \, \partial y^2}$ hinzuzufügen.

Die Differentialgleichung ist dann folgende:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{d^2 \xi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^3 \xi}{\partial t \, \partial y^2}.$$

Mit derselben Rechnung wie unter a) finden wir

$$\frac{2}{c^2} = \frac{\mu^2}{\mu^4 + \nu^2 k^2} + \frac{1}{\sqrt{\mu^4 + \nu^2 k^2}}, \text{ also}$$

$$n^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\mu^4 + \nu^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}} + \frac{1}{\sqrt{\mu^4 + \nu^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}}}.$$

Dieser Werth giebt auch mit wachsendem λ einen zunehmenden Brechungsexponenten.

Beide Formeln ergeben also, was die anomale Dispersion fordert, dass mit wachsendem λ der Brechungsexponent zunimmt. Im Uebrigen freilich stimmen dieselben, wie Meyer selbst angiebt, nicht mit der Beobachtung an Metallen überein, und die Berechnung des Absorptionscoefficienten liefert das mit der Erfahrung nicht stimmende Resultat, dass das Licht kürzerer Wellenlängen stärker absorbirt wird, als dasjenige grösserer. Jene anomal zerstreuenden Körper müssten also im durchfallenden Licht sämmtlich roth erscheinen.

10. Die Theorie von Helmholtz.*)

Auch hier, wie in der vorigen Nummer, handelt es sich um eine Vervollständigung der Bewegungsgleichung, der wir nach Helmholtz die Form

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

geben, wo also dann μ die Dichtigkeit und α^2 die Elasticitätsconstante des Aethers bedeutet.

1) Bewegungsgleichung des Aethers:

„Um nun die Bewegungsgleichung zu vervollständigen für den Fall, dass eingelagerte ponderable Theile, die aber wie ein continuirliches Medium wirken, eine Kraft auf den Aether ausüben, werden wir für unendlich kleine Verschiebungen (als welche die Lichtschwingungen ja immer vorzustellen sind) diese Kraft der relativen Lagenänderung des Aethers gegen das System der benachbarten ponderablen Atome proportional setzen dürfen und erhalten so

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \beta^2 (x - \xi). \qquad (1.)“$$

*) Berliner Monatsberichte 1874; Pogg. Ann. 154.

2) Die Bewegungsgleichung der ponderablen Atome, deren Dichtigkeit m ist, ergiebt sich folgendermassen.:

Die Kraft $m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ ist einer aus folgenden Theilen bestehenden gleichzusetzen:

a) Aus der Kraft, die der Aether auf die ponderablen Atome ausübt, nämlich $\beta^2(\xi - x)$.

b) Aus der Kraft, welche die übrigen, relativ festliegenden Theile der ponderablen Massen, wenn solche da sind, auf den bewegten Theil ausüben. Wiederum mag hier zur Vereinfachung der Rechnung die der Wirklichkeit wohl nicht ganz entsprechende, mechanisch aber unanstössige Annahme gemacht werden, dass schwere centrale Massen der Moleküle festliegen, und die beweglichen Theile derselben gegen diese und den Aether eine bestimmte Gleichgewichtslage zu bewahren streben. Bei der Verschiebung der beweglichen Atome um x setzen wir die Kraft, welche sie in die Gleichgewichtslage zurückführt, gleich $-a^2 x$.

c) Wenn Absorption stattfindet, muss lebendige Kraft der Wellenbewegung in innere unregelmässige Bewegung der Moleküle, d. h. in Wärme übergeführt werden, durch einen der Reibung im Resultat ähnlichen Vorgang. Wir nehmen also noch eine der Reibung ähnliche Kraft an zwischen dem beweglichen und dem festliegenden Theil der Atome jedes Moleküls, und setzen diese gleich $-\gamma^2\frac{\partial x}{\partial t}$.

Die Bewegungsgleichung der mitschwingenden Atome ist dann

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \beta^2(\xi - x) - a^2 x - \gamma^2\frac{\partial x}{\partial t}. \qquad (1'.)$$

Von diesen beiden Gleichungen sind, wenn wir bedenken, dass wir es hier mit Schwingungen zu thun haben, particuläre Integrale

$$\xi = \mathcal{A} e^{-\varepsilon y + \left(\frac{y}{c} - t\right) k i},$$

$$x = C e^{-\varepsilon y + \left(\frac{y}{c} - t\right) k i},$$

wo $k = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$ ist, ε den Absorptionscoefficienten darstellt und die anderen Buchstaben die bekannte Bedeutung haben.

Die Einführung dieser Werthe in (1.) und (1'.) liefert dann nach einfacher Transformation folgende Gleichungen:

$$\mathcal{A}\left[-\mu k^2 - \alpha^2\left(-\varepsilon + \frac{k}{c} i\right)^2 + \beta^2\right] = \beta^2 C,$$

$$C\left[-m k^2 + a^2 - \gamma^2 k i + \beta\right] = \beta^2 \mathcal{A}.$$

Durch deren Multiplication erhält man eine Gleichung ohne $\mathcal{A}$ und C,

der man, indem man sie für $\left(-\frac{\varepsilon}{k}+\frac{i}{c}\right)^2$ auflöst, folgende Form geben kann

$$-\left(-\frac{\varepsilon}{k}+\frac{i}{c}\right)^2=\frac{\mu}{\alpha^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2 k^2}\left[1+\frac{\beta^2}{mk^2-a^2-\beta^2+\gamma^2 ki}\right].$$

Diese Gleichung zerfällt in zwei Theile, wenn man, nachdem das Imaginäre aus dem Nenner des Bruches entfernt worden ist, die reellen und die imaginären Theile einzeln einander gleichsetzt. Diese Rechnung giebt

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}-\frac{\varepsilon^2}{k^2}&=\frac{\mu}{\alpha^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2 k^2}-\frac{\beta^4[mk^2-a^2-\beta^2]}{\alpha^2 k^2[(mk^2-a^2-\beta^2)^2+\gamma^4 k^2]}=F,\\ 2\frac{\varepsilon}{kc}&=-\frac{\beta^4\gamma^2}{\alpha^2 k[(mk^2-a^2-\beta^2)^2+\gamma^4 k^2)}=G,\end{aligned}\tag{2.}$$

wo die F und G zur Abkürzung für die rechten Seiten gesetzt werden mögen.

Mit Hülfe dieser Gleichungen können wir dann erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}&=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{F^2+G^2}+F\right\},\\ \frac{\varepsilon^2}{k^2}&=\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{F^2+G^2}-F\right\}\end{aligned}\tag{3.}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}&=F+\frac{F}{2}\left(\tfrac{1}{2}\frac{G^2}{F^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\frac{G^4}{F^4}\cdots\right),\\ \frac{\varepsilon^2}{k^2}&=\frac{1}{c^2}-F=\frac{G^2}{4F}-\frac{G^4}{16F^3}\cdots\end{aligned}\tag{3'.}$$

Selbstverständlich kann, so lange c reell, also $\frac{1}{c^2}$ positiv ist, nur das positive Zeichen vor der Quadratwurzel genommen werden.

Hätte man mehrere besondere Absorptionen, so würde die Gleichung (1.) folgende Form

$$\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\Sigma[\beta_a^2(x_a-\xi)]+\tag{4.}$$

annehmen, wo der Index a sich auf die verschiedenen Arten mitschwingender Massen bezieht. Anstatt der einen Gleichung (1'.) würde man mehrere Bewegungsgleichungen von der folgenden Form, die gleichzeitig bestehen, erhalten

$$m_a\frac{\partial^2 x_a}{\partial t^2}=\beta^2(\xi-x_a)-a_a^2 x_a-\gamma_a^2\frac{\partial x_a}{\partial t}.\tag{4'.}$$

11. Discussion der erhaltenen Gleichungen.

Zur Bestimmung der Absorption gehen wir aus von der obigen Gleichung

$$\frac{\varepsilon}{c}=-\frac{\beta^4\gamma^2}{2\alpha^2[(mk^2-a^2-\beta^2)^2+\gamma^4 k^2]}.$$

Diese kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{\varepsilon}{c} = -\frac{\beta^4\gamma^2}{2\alpha^2 m^2\left[\left(k^2 - \frac{a^2+\beta^2}{m} + \frac{\gamma^4}{2m^2}\right)^2 - \frac{\gamma^8}{4m^4} + \frac{(a^2+\beta^2)\gamma^4}{m^3}\right]},$$

woraus sich dann leicht erkennen lässt, dass $\frac{\varepsilon}{c}$ ein Max. wird, wenn

$$k^2 = k'^2 = \frac{a^2+\beta^2}{m} - \frac{\gamma^4}{2m^2} \text{ ist.}$$

Folglich ist, wenn der Maximalwerth mit $\frac{\varepsilon'}{c'}$ bezeichnet wird,

$$\frac{\varepsilon'}{c'} = -\frac{\beta^4\gamma^2}{2\alpha^2\left[\gamma^4\left(\frac{a^2+\beta^2}{m} - \frac{\gamma^4}{4m^2}\right)\right]}.$$

$$= -\frac{\beta^4}{2\alpha^2\gamma^2\left(k'^2 + \frac{\gamma^4}{4m^2}\right)}. \qquad (5.)$$

Mit Hülfe dieses Werthes erhält man dann nach einiger Transformation

$$\frac{c}{\varepsilon} = \frac{c'}{\varepsilon'}\left[1 + \frac{(k^2 - k'^2)^2}{\frac{\gamma^4}{m^2}\left(k'^2 + \frac{\gamma^4}{4m^2}\right)}\right]. \qquad (6.)$$

Diese Ausdrücke enthalten folgende Gesetze:

a) Für dieselben k', d. h. bei gleichbleibender Lage des Absorptionsmaximums im Spectrum, ist $\frac{\varepsilon'}{c'}$ nach (5.) um so grösser, je grösser β^4 im Verhältniss zu γ^2 ist, also je grösser β, d. h. die den Aether mit den Körpertheilchen verbindende Kraft und je kleiner γ, die Reibungskraft, ist.

b) Die Grösse $\frac{\varepsilon}{c} = \frac{\varepsilon T}{\lambda}$ giebt bei gleichbleibender Farbe ein Maass der Absorption für gleichbleibende Zahlen von Wellenlängen. Für solche Strahlen, deren Geschwindigkeiten wenig von einander verschieden sind, können wir aber diese Grösse als Maass der Absorption für gleichbleibende absolute Dicken der absorbirenden Schicht nehmen und dann aus (6.) das folgende Gesetz ableiten. Für dieselben Werthe von k und k' ist $\frac{\varepsilon}{c}$ um so grösser im Verhältniss zum Maximum der Absorption $\frac{\varepsilon'}{c'}$, je grösser $\frac{\gamma^4}{4m^2}$ ist. Das heisst grosse Werthe des Reibungscoefficienten γ^2 und kleine der mitschwingenden Massen m geben breite Absorptionsstreifen und umgekehrt kleine Werthe von γ^2 und grössere von m schmale Absorptionsstreifen. Da nun aber in dem Verhältniss, nach dem m zunimmt, die Reibung γ^2 wächst, so bleibt die Breite des Absorptionsstreifens bei Schichten, die seine Mitte gleich stark verdunkeln, nahezu immer dieselbe.

c) Da in demselben Verhältnisse, in dem m zunimmt, die Grösse β^2, welche die auf die Volumeneinheit von m ausgeübte elastische Kraft misst,

wächst, so muss nach a) das Maximum der Absorption $\frac{\varepsilon'}{c'}$ bei gleicher Dicke der absorbirenden Schicht auch mit zunehmendem m wachsen.

Der Gang der Absorption und Brechung in der Nähe der Farbe stärkster Absorption, wie ihn (2.) und (3.) angeben, lässt sich durch die folgende Construction anschaulich machen: Setzt man nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raum gleich 1, so giebt dann die Curve für $\frac{1}{c^2}$ eine Anschauung von der Brechung und $\frac{\varepsilon^2}{c^2}$ von der Absorption.

Man zeichne eine Gerade (Fig. 74ᵃ, 74ᵇ)

$$AB = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 k^2}$$

und senkrecht zu AB in B die

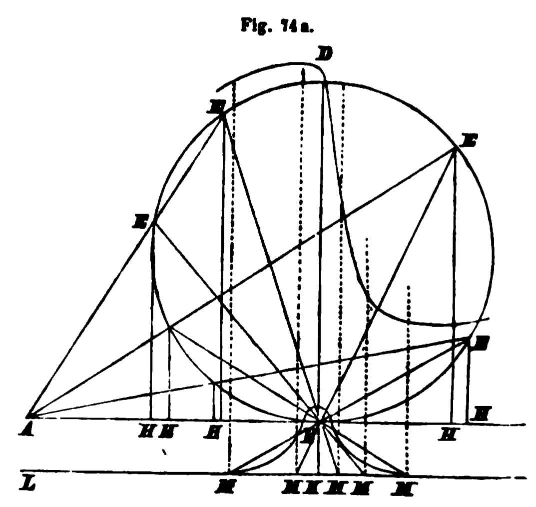
$$BD = \frac{\beta^4}{\alpha^2 \gamma^2 k^2},$$

wo diese Ausdrücke als constant gesetzt sind, da es sich nur handelt um Grössen, die in der Nähe des Absorptionsstreifens liegen. Setzt man dann

$$\operatorname{tg} w = \frac{mk^2 - a^2 - \beta^2}{\gamma^2 k}$$

veränderlich, so dass, wenn k geht von 0 bis zu ∞, w geht von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$.

Fig. 74a.



Die Einsetzung der Werthe AB, BD und w giebt dann

$$F = AB - BD \sin w \cos w \ , \ G = - BD \cos^2 w.$$

Man zeichne dann um BD einen Kreis und mache $\angle$ DBE = w, dessen näherungsweise Construction weiter unten gegeben werden soll, endlich EH $\perp$ AB, so ist AH = F und EH = G; mithin

$$AE = \sqrt{AH^2 + EH^2} = \sqrt{F^2 + G^2},$$

also nach (3.)

$$\frac{1}{c^2} = \tfrac{1}{2}(AE + AH) \ , \ \frac{\varepsilon^2}{c^2} = \tfrac{1}{2}(AE - AH).$$

Wenn nun, wie wir jetzt voraussetzen, der Absorptionsstreifen schmal ist, so ändert sich das k, wenn wir durch denselben hindurchgehen, nur wenig, also dürfen wir, wie oben angenommen ist, AB und BD constant setzen. Dann durchläuft der Punkt E, der bestimmt ist durch

$$\operatorname{tg} DBE = \frac{mk^2 - a^2 - \beta^2}{\gamma^2 k},$$

den festen Kreis. Setzen wir für das Max. der Absorption näherungsweise $m k_1'^2 = a^2 + \beta^2$, also

$$\operatorname{tg} DBE = \frac{m(k^2 - k_1'^2)}{\gamma^2 k},$$

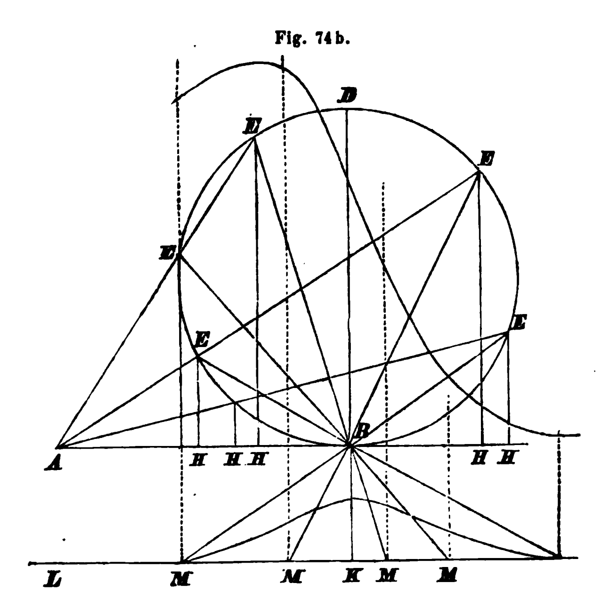
so wird im obersten Punkt D die stärkste Absorption eintreten. Dagegen ist $\begin{matrix}\text{vorher}\\ \text{nachher}\end{matrix}$ an der A $\begin{matrix}\text{abgewendeten}\\ \text{zugewendeten}\end{matrix}$ Seite die $\begin{matrix}\text{stärkste}\\ \text{schwächste}\end{matrix}$ Brechung.

Die näherungsweise Construction von $w = DBE$ ist folgendermassen: Man setze

$$\operatorname{tg} w = \frac{m(k^2 - k_1'^2)}{\gamma^2 k} \text{ annähernd } = \frac{m(k - k_1')}{2\gamma^2}.$$

Man verlängere DB über B hinaus, mache $BK = \frac{\gamma^2}{2m}$, ziehe zu AB durch K die Parallele LK, bestimme einen Punkt L so, dass $LK = k_1'$ ist und trage von L anfangend die Werthe k auf LK ab. Sei also z. B. $LM = k$, so ist annähernd der Winkel $MBK = w$, und der Punkt E wird gefunden, wenn man die Linie MB zieht und sie verlängert, bis sie zum zweiten Male den Kreis schneidet.

Fig. 74 b.



Es ist klar, dass die Stärke der Absorption von dem Durchmesser BD abhängt, dass aber, je kleiner BK ist, desto kleinere Veränderungen von k genügen, um den Punkt E gleiche Bogen des Kreises durchlaufen zu lassen, was schmalen Absorptionsstreifen entspricht.

Die beiden nach dieser Vorschrift entworfenen Zeichnungen (Fig. 74ª und Fig. 74ᵇ) entsprechen den Erscheinungen ebenso wie die nach Sellmeier gezeichneten Curven.

Der Gang der Functionen für mehrere besondere Absorptionen liesse sich durch eine ähnliche Construction anschaulich machen, nur müssten über der Linie LK, auf der die Werthe k abgetragen werden, mehrere Kreise, den verschiedenen Absorptionsstreifen entsprechend, von vielleicht

verschiedener Grösse, verschiedenem verticalen und horizontalen Abstande stehen. Die EH entsprechenden Strecken würden mit einander zu addiren sein, und ebenso die BH entsprechenden unter einander und zu AB.

Es mögen nun noch aus den gefundenen Gleichungen Folgerungen gezogen werden für sehr grosse und sehr kleine k, d. h. für Schwingungen mit sehr grosser und sehr kleiner Schwingungszahl.

a) k ist sehr gross. Nach (2.) können wir dann annähernd setzen

$$F = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 k^2} \text{ und } G = -\frac{\beta^4 \gamma^2}{\alpha^2 m^2} \frac{1}{k^5}.$$

Demnach ist G verschwindend klein gegen F und die Ausdrücke in (3′.) gehen über in

$$\frac{1}{c^2} = F\ , \ \varepsilon = \frac{k}{2} \cdot \frac{G}{\sqrt{F}},$$

so dass man durch Einsetzen unserer Werthe von F und G erhält

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2 k^2}, \quad \varepsilon = -\frac{\beta^4 \gamma^2}{2 \alpha m^2 \sqrt{\mu}} \frac{1}{k^4}.$$

Die Absorption wird also verschwindend klein und das Brechungsverhältniss nähert sich bei steigender Schwingungszahl einem festen Werthe $\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{\alpha^2}$. (cf. § 225.)

Wären die Dichtigkeit μ des Aethers und seine Elasticitätsconstante α^2 für das durchsichtige Medium dieselben wie für den freien Raum, so würde das Brechungsverhältniss für die schnellsten Oscillationen gleich 1 werden, was den Beobachtungen gegenüber nicht zulässig erscheint. Man muss also in dem durchsichtigen Medium entweder eine solche veränderte Structur des Aethers annehmen, dass $\frac{\mu}{\alpha^2}$ grösser als im freien Raum wird, oder mit Sellmeier voraussetzen, dass jenseits des Ultraviolett in jedem Spectrum einer durchsichtigen Substanz starke Absorptionen vorkommen, welche im ganzen sichtbaren Spectrum das Brechungsverhältniss in die Höhe treiben.

b) k ist sehr klein. Nach (2) ist dann annähernd

$$F = -\frac{\beta^2 a^2}{\alpha^2 (a^2 + \beta^2)} \cdot \frac{1}{k^2}, \quad G = -\frac{\beta^4 \gamma^2}{\alpha^2 (a^2 + \beta^2)} \cdot \frac{1}{n}, \text{ also } \frac{G}{F} \text{ nahe} = 0.$$

Hier ist F negativ, so ist von (3.) der obere Werth $\frac{\varepsilon^2}{k^2}$ und der untere $\frac{1}{c^2}$, mithin ist jetzt

$$\varepsilon = -\frac{\beta a}{\alpha (a^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}, \ \frac{1}{c} = \frac{\beta^2 \gamma^2}{2 a \alpha (a^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Würde hier a = 0, so wäre $\frac{1}{c} = \infty$ und $\varepsilon = 0$. Dies würde also für Gase erfüllt sein. Dagegen erhebt Ketteler Bedenken, der, wie im Folgen-

den erörtert wird, für alle Aggregatformen bei grosser Schwingungsdauer $c = 1$ erhält.

12. Die Theorie von Ketteler.*)

Denken wir uns zunächst einen Körper, dessen ponderable Moleküle isotrop geordnet und in ihrer chemischen Qualität optisch einfach sind, so dass die bezügliche Dispersionscurve nur einen Absorptionsstreifen zeigt.

Nach den Bezeichnungen von (10.) ist also zunächst für den reinen Aether

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}.$$

Zu dem rechten Theil dieser Gleichung tritt nun für das Innere eines ponderablen Mittels noch eine Kraft hinzu, die verursacht ist durch die Wechselwirkung der Körpertheilchen. Denkt man sich, dass durch den Widerstand der Körpertheilchen ein ähnlicher Effect entsteht, als würde die Spannung des Aethers geändert, so wird die hinzuzunehmende Kraft sich ausdrücken lassen durch $E \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$.

Es gilt demnach für die Aetherbewegung

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\alpha^2 + E) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}. \tag{1.}$$

Eine zweite Gleichung geben die Schwingungen der ponderablen Theilchen, die betrachtet werden als ein Hinderniss für die freie Bewegung des Aethers. Die auf die Körpertheilchen einwirkende Kraft wird nun abhängen von der Krümmung der dieselben verbindenden Wellenlinie, dann aber auch von dem Abstande derselben von der Gleichgewichtslage. Diese Kraft setzt sich also zusammen aus einer Deformationskraft oder Elasticitätskraft der durch den schwingenden Aether verschobenen Körpertheile, die durch $E' \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ dargestellt werde, und einer direct einwirkenden Schiebkraft Kx. Es ergiebt sich also die Differentialgleichung der schwingenden Körpertheilchen

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = E' \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + Kx. \tag{2.}$$

Für die Grössen E, E', K', welche die Wellenlänge enthalten, wird nun die wahrscheinliche Annahme gemacht, dass sie einander proportional sind, sich also auf folgende Form $E = a\varepsilon$, $E' = a\varepsilon'$, $K' = ak$ bringen lassen, wo a allein von der Bewegung abhängt, während die ε Constante bedeuten, die mit der statischen Beschaffenheit des Molekulargefüges, resp.

---

*) Carl's Repertorium für Experimental-Physik. XII. Verhandlungen des naturhistorischen Vereins für Rheinland-Westphalen 1875. 4. Folge. 2. Jahrg. Pogg. Ann. 160, p. 466.

der Dichtigkeit, gegeben sind. Es sind demnach die aufgestellten Differentialgleichungen der Bewegung

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\alpha^2 + a\varepsilon) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \qquad (1'.)$$

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a\varepsilon' \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + a k x. \qquad (2'.)$$

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft liefert dann noch eine Gleichung. Bezeichnen C, C', C_0 die maximalen Schwingungsgeschwindigkeiten des Aethers im Körper, der Körpermoleküle, des Weltäthers, so muss gelten

$$\mu C^2 + m' C'^2 = \mu C_0^2. \qquad (3.)$$

Die Integrale von (1'.) und (2'.) lassen sich, da hier Schwingungen betrachtet werden, schreiben

$$\begin{aligned} \xi &= \varDelta \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{y}{l} - \Theta\right), \\ x &= C \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{y}{l} - \Theta\right). \end{aligned} \qquad (4.)$$

Die Einführung dieser Werthe in die Differentialgleichungen giebt dann folgende Bedingungen, denen die Constanten unterworfen sind:

$$\frac{\mu}{T^2} = \frac{\alpha^2 + a\varepsilon}{l^2}, \quad \frac{m}{T^2} = a\frac{\varepsilon'}{l^2} - a\frac{k}{4\pi^2}.$$

Durch Elimination von a aus diesen Gleichungen erhält man, wenn zur Abkürzung $\frac{k}{4\pi^2} = k'$ gesetzt wird,

$$\frac{\mu}{T^2} = \left(\alpha^2 - \frac{\frac{m}{T^2}\varepsilon}{k' - \frac{\varepsilon'}{l^2}}\right)\frac{1}{l^2},$$

oder nach der bekannten Beziehung $l = c'T$, wo c' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Mittel bezeichnet,

$$c'^2\left(\mu + \frac{m\varepsilon}{k' l^2 - \varepsilon'}\right) = \alpha^2.$$

Setzen wir ferner c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Weltäther, wo $m = 0$, also $c^2 = \frac{\alpha^2}{\mu}$ (§ 225 und Nummer 11) ist, und schreiben

$\frac{\varepsilon'}{k'} = L^2$, $\frac{m\varepsilon}{\mu\varepsilon'} = D$, den Brechungsexponenten n, also $\frac{c^2}{c'^2} = n^2$,

so erhält die obige Bedingungsgleichung die Form:

$$n^2 - 1 = \frac{D}{\frac{l^2}{L^2} - 1}.$$

Es verdient bemerkt zu werden (cf. 11.), dass für eine unendlich grosse Wellenlänge, also für $l = T = \infty$, $n = 1$ wird, und dass für eine unendlich

kleine Wellenlänge $n^2 = 1 - D$ wird, also für positive D die Geschwindigkeit kleiner als 1 ist.

Statt der Gleichung (3.) kann man nach (4.), wenn T_0 die zu l gehörige Schwingungsdauer im freien Raum bezeichnet, setzen

$$\mu \frac{A^2}{T^2} + m \frac{C^2}{T^2} = \mu \frac{A^2}{T_0^2}.$$

Nun ist aber

$$l = c' T = c T_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\mu}}\, T_0, \text{ also}$$

$$\mu \frac{A^2}{T^2} + m \frac{C^2}{T^2} = \frac{A^2}{l^2} \mu c^2.$$

Wenn wir in diese Gleichung statt der Schwingungsamplituden die variablen Ausschläge ξ und x einführen, erhalten wir

$$\mu \frac{\xi^2}{T^2} + m \frac{x^2}{T^2} = \frac{\xi^2}{l^2} \mu c^2, \tag{5.}$$

$T = \frac{l}{c'}$ eingesetzt, giebt

$$\frac{\mu \xi^2}{l^2} + m \frac{x^2}{l^2} = \frac{\mu \xi^2}{l^2} \frac{c^2}{c'^2} = \frac{\mu \xi^2}{l^2} n^2$$

oder endlich

$$n^2 - 1 = \frac{m x^2}{\mu \xi^2}. \tag{6.}$$

Es ist also die sogenannte brechende Kraft gleich dem Verhältniss, in welchem sich eine gegebene lebendige Kraft auf Körper und Aethertheilchen vertheilt.

Es ist nun zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen diese Gleichung (6.) übereinstimmt mit dem gefundenen Dispersionsgesetz

$$n^2 - 1 = \frac{D}{\frac{l^2}{L^2} - 1}.$$

Zu diesem Zwecke multipliciren wir die Differentialgleichungen (1'.) und (2'.), respective mit ξ und x und addiren diese Producte. Dies giebt

$$\mu \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + m x \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \alpha^2 \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + a \varepsilon \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + a \varepsilon' x \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + a k x^2. \tag{7.}$$

Führt man nun die vorgeschriebenen Differentiationen der Gleichungen (4.) aus, setzt die erhaltenen Werthe ein, transponirt die Vorzeichen und dividirt durch $4\pi^2$, so erhält man

$$\frac{\mu}{T^2} \xi^2 + \frac{m}{T^2} x^2 = \frac{\alpha^2}{l^2} \xi^2 + a \left(\frac{\varepsilon}{l^2} \xi^2 + \frac{\varepsilon'}{l^2} x^2 - k' x^2 \right).$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (5.) und bedenkt, dass $\frac{\alpha^2}{\mu} = c^2$ ist, so findet man, dass zu deren Identificirung nur nöthig ist, dass

$$\frac{a}{l^2} \xi^2 \left[\varepsilon - (k' l^2 - \varepsilon') \frac{x^2}{\xi^2} \right] = 0 \text{ ist.}$$

Der zweite Factor, $= 0$ gesetzt, ist aber nach Benutzung von (6.) und der Abkürzungen durch L und D wiederum das Brechungsgesetz

$$n^2 - 1 = \frac{D}{\frac{l^2}{L^2} - 1},$$

also ist die zu suchende Bedingung keine andere als die Dispersionsformel selbst, die hiernach die nothwendige Ergänzung zu dem Satze von der brechenden Kraft bildet.

Dies ist das Dispersionsgesetz, nach dem § 309 4. S. 334 die Curve unter 3., construirt ist.

Die obigen Formeln lassen sich sofort anwenden, für den Fall, dass auch auf die Aethertheilchen noch eine Verschiebungskraft $\mathfrak{K}\xi$, wo $\mathfrak{K} = a\mathfrak{k}$ ist, wirke.

Statt (1′.) erhalten wir dann

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\alpha^2 + a\varepsilon)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + a\mathfrak{k}\xi.$$

Die Integrale (4.) geben dann die Bedingungsgleichung

$$\frac{\mu}{T^2} = \left[\alpha^2 + \frac{(\varepsilon - \mathfrak{k}' l^2)\frac{m l^2}{T^2}}{\varepsilon' - k' l^2}\right]\frac{1}{l^2}, \text{ wenn } \mathfrak{k}' = \frac{\mathfrak{k}}{4\pi^2} \text{ ist.}$$

Aus dieser folgt wie oben

$$n^2 - 1 = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{\varepsilon - \mathfrak{k}' l^2}{\varepsilon' - k' l^2}.$$

13. Formeln für mehrere Absorptionstreifen.

Nach den Rechnungen Kettelers (§ 309) giebt es kein Mittel, welches der im Obigen entwickelten einfachen Dispersionsformel in Strenge für den ganzen Umfang der Strahlung genügt. Derselbe Gelehrte erweitert daher die Gleichungen für Mittel mit mehreren Absorptionsstreifen, indem er die schwingende Körpermasse solcher Mittel in so viele optisch-chemische Elemente zerlegt, als Absorptionsstreifen vorkommen.

Wäre deren Zahl n, so erhielte man n Differentialgleichungen für die Schwingungen der n verschiedenen Körperqualitäten von den Massen m und daneben für die Schwingungen des Aethers eine um n Zusatzglieder vermehrte Deformationsgleichung des Weltäthers. Wir setzen im Folgenden diese Zusatzglieder negativ.

Die Gleichungen sind demnach

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \sum_{n=1}^{n=n}\left(a_n \varepsilon_n \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + a_n \mathfrak{k}_n \xi\right),$$

$$m_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = a_1 \varepsilon_1' \frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2} + a_1 k_1 x_1,$$

$$m_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = a_2 \varepsilon_2' \frac{\partial^2 x_2}{\partial y^2} + a_2 k_2 x_2,$$

. . . .

Die Integration derselben giebt den obigen analoge Gleichungen. Wird dann aus den erhaltenen Bedingungsgleichungen a eliminirt, so erhält man

$$c'^2\left(\mu+\sum_{n=1}^{n=n} m_n \frac{\mathfrak{k}'_n l^2-\varepsilon_n}{k'_n l^2-\varepsilon'_n}\right)=\alpha^2 \text{ und daraus}$$

$$n^2-1=\sum\frac{m_n}{\mu}\frac{\mathfrak{k}'_n l^2-\varepsilon_n}{k'_n l^2-\varepsilon'_n}, \text{ oder}$$

$$=\sum\frac{m_n \mathfrak{k}'_n}{\mu\, k'_n}+\sum\frac{m_n}{\mu}\cdot\frac{\frac{\mathfrak{k}'_n}{k_n'}-\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}}{\frac{k'_n}{\varepsilon'_n}l^2-1}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung für $l=\infty$, $n=n_\infty$, so ist

$$n_\infty^2-1=\frac{\Sigma\, m_n \mathfrak{k}'_n}{\mu\, k'_n},$$

und
$$\frac{\mathfrak{k}'_n}{k'_n}-\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}=D'\frac{\mu}{m_n},\quad \frac{\varepsilon'_n}{k'_n}=L^2.$$

Statt der obigen Formel erhalten wir dann

$$n^2-n_\infty^2=\sum\frac{D'}{\frac{l^2}{L^2}-1}.$$

Die Untersuchung der Gleichung des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft liefert zunächst wieder analog der Gleichung (6.)

$$n^2-1=\frac{\Sigma m x^2}{\mu\,\xi^2}. \tag{8.}$$

Der obigen Gleichung (7.) entspricht

$$\mu\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\Sigma m x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\alpha^2\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}-\Sigma a\left(\varepsilon\,\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}-\varepsilon' x\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+\mathfrak{k}\,\xi^2-k x^2\right). \tag{9.}$$

Es würden also die zu erfüllenden Bedingungsgleichungen aus folgenden einzelnen Gleichungen bestehen, wenn vorausgesetzt wird, dass das behandelte Mittel ganz willkürlich aus mehreren einfachen Bestandtheilen, von denen jedes sich durch ε, ε', $\mathfrak{k}$, k, die von einander unabhängig sind, charakterisirt,

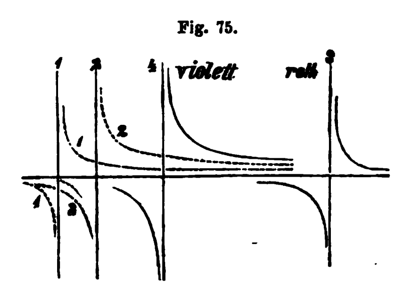
$$\varepsilon_1-\mathfrak{k}_1^2+(\varepsilon_1'-k_1' l^2)\frac{x_1^2}{\xi^2}=0,$$

$$\varepsilon_2-\mathfrak{k}_2^2+(\varepsilon_2'-k_2'^2 l^2)\frac{x_2^2}{\xi^2}=0 \text{ etc.}$$

Die Discussion der erhaltenen Formeln ist vereinfacht durch die Betrachtungen in § 309 4. (Fig. 58). Man erhält nämlich n Particularcurven nach dem dort gegebenen Constructionsverfahren, jede mit ihrem Mittelpunkte, ihrem imaginären Streifen und der gemeinschaftlich horizontalen Asymptote n_∞. Die Ordinaten der resultirenden Curve würden dann erhalten, wenn die der sämmtlichen Particularcurven addirt werden. Um den Aus-

druck mit der Erfahrung zu vergleichen, haben wir nur zu bedenken, dass im Allgemeinen die Mittelpunkte dieser Particularcurven weit entfernt liegen von den einer genaueren Messung zugänglichen Theilen des Spectrums, also entweder im ultravioletten oder ultrarothen Theile, so dass also, wenn in der Figur 75 die punktirten Linien solche Particularcurven bedeuten, nur eine geringe Dispersion vorhanden wäre, es gäbe nur eine schwache Erhebung auf der rechten und eine schwache Senkung auf der linken Seite der Verticalen durch die Mitte der Particularcurven und hätte man dann bei 4 eine in der Nähe des sichtbaren Spectrums auftretende Absorption, so würde diese Curve den Haupteinfluss haben und man hätte dann also die Dispersionscurve, wie sie dem Schwefelkohlenstoff nach § 309 (Figur 58) entspricht.

Fig. 75.



14. Betrachtung des imaginär gewordenen Theiles der Dispersionscurve.

Nach der oben entwickelten Gleichung für n, ergiebt sich dass dasselbe innerhalb des Absorptionsstreifens complex wird, z. B. S. 334 Fig. 58 zwischen den Grenzen λ'_0 und λ''_0. Es hat dann n die Form $a + bi$, mithin ist daselbst

$$n^2 - 1 = (a^2 + bi)^2 - 1 = a^2 - b^2 + 2abi - 1.$$

Nach Formel (8.) müssen dann auch die x und ξ complex sein, so dass also gilt, wenn wir setzen $x = x_1 + x_2 i$, $\xi = \xi_1 + \xi_2 i$,

$$(a + bi)^2 - 1 = \frac{\sum m (x_1 + x_2 i)^2}{\mu(\xi_1 + \xi_2 i)^2} = \frac{M(X_1 + X_2 i)^2}{\mu(\xi_1 + \xi_2 i)^2},$$

$$= \frac{M}{\mu} \cdot \frac{(X_1 + X_2 i)^2 (\xi_1 - \xi_2 i)^2}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2}.$$

Diese Gleichung giebt durch Trennung des Reellen und Imaginären

$$a^2 - b^2 - 1 = \frac{M}{\mu} \frac{(X_1^2 - X_2^2)(\xi_1^2 - \xi_2^2) + 4 X_1 X_2 \xi_1 \xi_2}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2},$$

$$2ab = 2\frac{M}{\mu} \cdot \frac{X_1 X_2 (\xi_1^2 - \xi_2^2) - \xi_1 \xi_2 (X_1^2 - X_2^2)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2},$$

oder nach einfacher Umformung

$$a^2 - b^2 - 1 = \frac{M}{\mu} \cdot \frac{(X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2)^2 - (X_2 \xi_1 - X_1 \xi_2)^2}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2}$$

$$ab = \frac{M}{\mu} \frac{(X_1 \xi_1 + X_2 \xi_2)(X_2 \xi_1 - X_1 \xi_2)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2}.$$

Wie wir nun im Anhang zu §§ 376, 377 und § 383 3. das Imaginäre der Ausschläge bei den Aetherschwingungen entfernen durch eine Phasen-

verschiebung, so wollen wir auch hier verfahren und also, wenn der wirkliche Ausschlag in dem imaginären Streifen mit ξ_0 bezeichnet wird, setzen

$$\xi_1 = \xi_0 \cos \varDelta, \quad \xi_2 = \xi_0 \sin \varDelta.$$

Mit demselben Rechte können wir den Schwingungen der ponderablen Theilchen eine gewisse Phasenverschiebung zulegen und darnach setzen, wenn X_0 deren wirklichen Ausschlag bedeutet,

$$X_1 = X_0 \cos \mathrm{D}, \quad X_2 = X_0 \sin \mathrm{D}.$$

Damit ist durch Einführung dieser Werthe, wenn $\mathrm{D} - \varDelta = \vartheta$ gesetzt wird,

$$a^2 - b^2 - 1 = \frac{\Sigma m x_0^2}{\mu \xi_0^2} \cos 2\vartheta,$$

$$2ab = \frac{\Sigma m x_0^2}{\mu \xi_0^2} \sin 2\vartheta,$$

also

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2ab}{a^2 - b^2 - 1} \quad \text{und}$$

$$\frac{\Sigma m x_0^2}{\mu \xi_0^2} = \sqrt{(a^2 - b^2 - 1)^2 + 4a^2b^2}.$$

Der Verlauf der Curve zwischen den Punkten für λ_0'' und λ_0' ist gegeben durch das ν^2 der folgenden Nummer unter (VI.), also ist dieser Theil abhängig vom Einfallswinkel.

15. Allgemeines Dispersionsgesetz.

Im Folgenden soll ein allgemeines Gesetz gefunden werden, welches für absorbirende und durchsichtige Mittel giltig bleibt.

Wir beziehen die Untersuchung auf ein Coordinatensystem, dessen xy Ebene mit der Einfallsebene und yz Ebene mit der Grenzebene zusammenfällt. Wenn ferner C und $\varDelta$ die Amplituden, r und ϱ die Ausschläge der Körper und Aethermoleküle bedeuten, so zerfällt die Gleichung (9.) in die folgenden beiden Differentialgleichungen

$$\mu \varDelta \frac{\partial^2 \varrho}{dt^2} + \Sigma m C \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \alpha^2 \varDelta \left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2}\right), \tag{I.}$$

$$\varDelta \left[\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2}\right) + \mathfrak{k} \varrho\right] = C \left[\varepsilon' \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) + k r\right]. \tag{II.}$$

Deren Integrale setzen wir

$$\varrho = \varDelta e^{2\pi \left(\frac{x \cos\beta + y \sin\beta}{\lambda'} - \frac{t}{T'} - \Theta\right) i}, \tag{III.}$$

$$r = C e^{2\pi \left(\frac{x \cos\beta + y \sin\beta}{\lambda'} - \frac{t}{T'} - \Theta - 2\vartheta\right) i},$$

wo β den zum Einfallswinkel, α gehörigen Brechungswinkel bedeutet und das ϑ, der Phasenunterschied der Schwingungen von Aether- und Körpertheilchen der vorigen Nummer, beibehalten ist.

Bedenken wir, dass $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{c'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$ ist und nehmen wir

unserer Aufgabe entsprechend den Brechungsexponenten ganz allgemein complex, also $n = a + bi$, so ist $n \cos\beta = \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$, also auch complex. Wenn wir demnach für $\cos\beta$ setzen $p + qi$, so können wir nach Einführung des λ statt λ', wenn nur die reellen Theile der trigonometrischen Ausdrücke beibehalten werden, statt (III.) schreiben

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \mathcal{A} e^{\frac{2\pi}{\lambda} q x} \cos 2\pi \left(\frac{px + y\sin\alpha}{\lambda} - \frac{t}{T'} - \Theta\right), \\ r &= C\, e^{\frac{2\pi}{\lambda} q x} \cos 2\pi \left(\frac{px + y\sin\alpha}{\lambda} - \frac{t}{T'} - \Theta - 2\vartheta\right). \end{aligned}\right\} \quad \text{(III'.)}$$

a) Wir führen nun zunächst diese Werthe in die Gleichung (I.) ein, indem wir noch zur Abkürzung

$$2\pi\left(\frac{px + y\sin\alpha}{\lambda} - \frac{t}{T'} - \Theta\right) = \varphi \text{ setzen.}$$

Dies giebt nach Division mit gemeinschaftlichen Factoren und mit Berücksichtigung von

$$\alpha^2 = \mu c'^2 = \mu \frac{\lambda'^2}{T'^2}$$

$$\mu \mathcal{A}^2 \cos\varphi + \Sigma\, m C^2 \cos(\varphi - 2\vartheta) = \mu \mathcal{A}^2 [(p^2 - q^2 + \sin^2\alpha)\cos\varphi + 2pq\sin\varphi].$$

Da diese Gleichung für jedes t und damit auch für jedes φ gelten muss, so zerfällt sie durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ in

$$\left.\begin{aligned} p^2 - q^2 + \sin^2\alpha - 1 &= \frac{\Sigma\, m C^2 \cos 2\vartheta}{\mu \mathcal{A}^2}, \\ 2pq &= \frac{\Sigma\, m C^2 \sin 2\vartheta}{\mu \mathcal{A}^2}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV.)}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 + 2pqi &= (a + bi)^2 - \sin^2\alpha, \\ &= a^2 - b^2 - \sin^2\alpha + 2abi. \end{aligned}$$

Durch Trennung des Imaginären und Reellen folgt daraus

$$a^2 - b^2 = p^2 - q^2 + \sin^2\alpha \;,\; pq = ab. \quad \text{(V.)}$$

Bezeichnen wir das wirkliche, durch die Absorption erst veränderte Brechungsvermögen mit ν, so ist

$$p = \nu\cos\beta \;,\; \sin\alpha = \nu\sin\beta, \text{ mithin}$$
$$\nu^2 = p^2 + \sin^2\alpha.$$

Berechnet man dann aus (V.) durch Elimination von q den Werth p^2, so erhält man

$$p^2 = \tfrac{1}{2}\left[a^2 - b^2 - \sin^2\alpha + \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2\alpha)^2 + 4a^2b^2}\right],$$

also

$$\nu^2 = \tfrac{1}{2}\left[a^2 - b^2 + \sin^2\alpha + \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2\alpha)^2 + 4a^2b^2}\right]. \quad \text{(VI.)}$$

Setzen wir $\alpha = 0$, so folgt $p = a = \nu$, es ist mithin a das physikalische Brechungsverhältniss bei senkrechter Incidenz. Da nun $pq = ab$ ist, so ist bei senkrechter Incidenz, für die $p = a$ ist, $q = b$, es ist mithin b der Absorptionscoefficient bei dieser Incidenz.

Aus (V.) ergiebt sich noch

$$q = \frac{ab}{p} = \frac{ab}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2\alpha}} = \frac{ab}{\nu \cos\beta}.$$

Bezeichnet dann $\delta = \frac{x}{\cos\beta}$ die Dicke der durchlaufenen absorbirenden Schicht, so kann der Absorptionsfactor von (III'.) auch gesetzt werden

$$e^{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta \frac{ab}{\nu}}.$$

b) Die Einführung der Werthe (III'.) in die Gleichung (H.) liefert dann, wenn die Coefficienten von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ einzeln einander gleichgesetzt und die Grössen a und b eingeführt werden,

$$-\mathcal{A}^2[\varepsilon(a^2-b^2)-\mathfrak{k}\lambda^2] = C^2[\varepsilon'(a^2-b^2)-k'\lambda^2]\cos 2\vartheta - 2\varepsilon' ab \sin 2\vartheta,$$
$$2\mathcal{A}^2 \varepsilon ab = C^2[\varepsilon'(a^2-b^2)-k'\lambda^2]\sin 2\vartheta + 2\varepsilon' ab \cos 2\vartheta.$$

Daraus findet man

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathcal{A}^2\cos 2\vartheta}{C^2} &= \frac{[\varepsilon(a^2-b^2)-\mathfrak{k}\lambda^2][\varepsilon'(a^2-b^2)-k'\lambda^2]+4\varepsilon\varepsilon' a^2b^2}{[\varepsilon'(a^2-b^2)-k'\lambda^2]^2+4\varepsilon'^2a^2b^2},\\ \frac{\mathcal{A}^2\sin 2\vartheta}{C^2} &= \frac{2ab\lambda^2(\varepsilon'\mathfrak{k}-\varepsilon k')}{[\varepsilon'(a^2-b^2)-k'\lambda^2]^2+4\varepsilon'^2a^2b^2}.\end{aligned}\right\} \quad \text{(VII.)}$$

Werden nun hier die Abkürzungen aus 13. eingeführt, also

$$\frac{\varepsilon'}{k'} = L^2, \quad \frac{\mathfrak{k}}{k'} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = D'\frac{\mu}{m},$$

so erhält man nach einigen einfachen Transformationen das allgemeine Gesetz der Dispersionscurve

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 - 1 &= \Sigma\left(\frac{m}{\mu}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{\left(a^2-b^2-\frac{\lambda^2}{L^2}\right)D'\frac{\lambda^2}{L^2}}{\left(a^2-b^2-\frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2+4a^2b^2}\right),\\ 2ab &= \Sigma\frac{2ab\,D'\frac{\lambda^2}{L^2}}{\left(a^2-b^2-\frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2+4a^2b^2}.\end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII.)}$$

Setzen wir, was zur Controle der Formeln dient, den Brechungsexponenten reell, also $b = q = \vartheta = 0$, $n = \nu = a$, $p^2 = n^2 - \sin^2\alpha$, so geben die Gleichungen (IV.) und (VII.) die Formeln von 13.

16. Anwendung auf Körper mit nur einer complexen Zone.

Wenn nur eine complexe Zone vorhanden ist, so muss in den Formeln überall das Summenzeichen entfernt werden. Dann lassen sich die Grössen a und b explicite geben. Führen wir zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein: für $\lambda = 0$ sei n_0 und für $\lambda = \infty$ n_∞ der Brechungsexponent.

Es ist demnach

$$n_0^2 - 1 = \frac{m}{\mu}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \text{ und } n_\infty^2 - 1 = \frac{m}{\mu}\,\frac{r}{k'}.$$

Sei ferner $D' = n_\infty^2 - n_0^2 = D\,n_\infty^2$ und $\lambda_m = n_\infty L$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 - 1 &= \tfrac{1}{2}\left(n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right) - 1 \\ &= n_\infty^2 - 1 - \frac{n_\infty^2}{2}\left(1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right), \\ 2ab &= n_\infty^2 \sqrt{D - \tfrac{1}{4}\left(1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{n_\infty^2 \frac{\lambda^2}{L^2} - \tfrac{1}{4}\left(n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IX.)}$$

Es ist demnach ganz allgemein

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= a^2 - b^2 + 2abi - 1 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right) - 1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(n_0^2 + \frac{\lambda^2}{L^2}\right)^2 - n_\infty^2 \frac{\lambda^2}{L^2}}. \end{aligned}$$

Dies giebt, wenn nach dem Obigen gesetzt wird

$$n_0^2 = n_\infty^2 (1 - D),$$

$$n = \tfrac{1}{2} n_\infty^2 \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2 - D}\right].$$

Diese Gleichung stimmt überein mit der von § 309, S. 334, wenn die entsprechenden Bezeichnungen eingeführt werden. An der citirten Stelle ist auch angegeben, welches Vorzeichen genommen werden muss.

Innerhalb der complexen Zone haben wir als Verbindung der beiden Grenzpunkte die Curve zu vervollständigen durch die Gleichung für ν^2 unter (VI.), so dass also dieser Theil vom Einfallswinkel α abhängig ist. Es ergänzen sich demnach für ein einfaches Mittel die beiden vereinigten Curven zum vollen Umfang der Aetherstrahlung und diese Curven zur vollen Dispersionscurve, die also besteht aus zwei vom Einfallswinkel unabhängigen getrennten Zweigen, welche durch ein davon abhängiges bewegliches Curvenstück mit einander verbunden sind.

Die zugehörigen Phasenverschiebungen ergeben sich durch Division der Gleichungen (IV.) Man erhält demnach

$$\operatorname{tag} 2\vartheta = \frac{2pq}{p^2 - q^2 + \sin^2\alpha - 1} = \frac{2ab}{a^2 - b^2 - 1},$$

oder, wenn die Werthe aus (IX.) eingesetzt werden,

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{n_\infty^2 \sqrt{4D - \left(1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right)^2}}{2(n_\infty^2 - 1) - n_\infty^2\left(1 + D - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right)}.$$

Da die Grössen a und b stets positiv zu nehmen sind, so ist auch ϑ, das ist $D - \Delta$ positiv, d. h. die Körpertheilchen eilen den Aethertheilchen in ihren Schwingungen stets voraus.

Chemische Wirkung des Lichtes. (§ 332.)

Durch chemische Wirkung wird Licht verbraucht.

Nach § 326 ist das durchgegangene Licht

$$I = M x^n.$$

Setzt man $I = 0,1\,M$ und bezeichnet die dazu gehörige Dicke der Schicht $\frac{1}{\alpha}$, so ist

$$0,1\,M = M x^{1:\alpha}, \text{ also } x^{1:\alpha} = 10^{-1} \text{ oder } x = 10^{-\alpha}.$$

Wir erhalten damit

$$I = M\,10^{-\alpha n}$$

Die Grösse α nennt Bunsen den Extinctionscoefficienten des betreffenden Mittels.

Für trockenes Chlorgas ist $\alpha = 0,00577$, oder $\frac{1}{\alpha} = 173,3$.

Wenn nun für Luft bei den zur Untersuchung genommenen Schichten $\alpha = 0$ ist, so müsste für ein Gemisch von Luft und dem trockenen Chlorgas bei derselben Schichtdicke der Werth von α die Hälfte des obigen Werthes, also $\alpha = \frac{1}{346,6}$ sein.

Da aber hier eine chemische Verbindung stattfindet, so ist der Extinctionscoefficient ein anderer. In der Entfernung z von der Eintrittsstelle wird sein, wenn mit α_1 der betreffende Coefficient bezeichnet wird,

$$I = M\,10^{-\alpha_1 z} = M e^{-m\alpha_1 z}, \text{ wenn } m = \log. \text{ nat. } 10 \text{ ist.}$$

In der unendlich dünnen Schicht dz wird die Intensität dieselbe sein und da die chemische Wirkung der Intensität des Lichtes proportional gesetzt wird, so ist, wenn diese mit $d\omega$ bezeichnet wird,

$$d\omega = N. I. dz = N. M. e^{-m\alpha_1 z}\,dz.$$

Mithin ist die Gesammtwirkung in der Schicht h_1

$$\omega = N. M. \int_0^{h_1} e^{-m\alpha_1 z}\,dz = N. M. \frac{1}{m\alpha_1}\left(1 - e^{-m\alpha_1 h_1}\right).$$

Mit Hülfe dreier Beobachtungen kann hieraus N, M, α_1 bestimmt werden. Man fand dann $\alpha_1 = \frac{1}{234}$, also, wie zu erwarten war, einen grösseren Werth als derjenige ist, welcher der optischen Absorption allein entspricht.

Die optischen Kästen. (§ 358.)

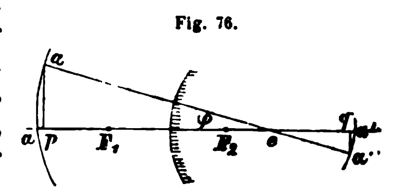
1. Petzval'sches aplanatisches Objectiv.*)

In § 304 ist angenommen, dass das Licht ausstrahlende Object sich befinde in einer Ebene, die entweder senkrecht oder schief steht zur Hauptaxe des Linsensystems und dann ergab sich, dass bei kleinem φ, das erzeugte Bild sich auch in einer Ebene senkrecht oder schief zur Hauptaxe befindet. Diese Annahme ist aber nicht mehr gerechtfertigt für die Linsen, welche beim Photographiren verwendet werden; denn einmal sind die verwendeten Objecte im allgemeinen gekrümmt, während die gebrochenen Strahlen auf einer ebenen Platte aufgefangen werden, dann ist φ nicht mehr so klein, dass $\cos\varphi = 1$ gesetzt werden darf; wir nehmen daher immer noch näherungsweise

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - 2\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Für diese Annahme hat Zinken**) die allgemeine Bedingungsgleichung aufgestellt, denen die Linsen unterworfen sein müssen, damit, wenn die Objectpunkte auf einer Rotationsfläche liegen, die Bildfläche eine von der Objectfläche verschiedene gegebene Krümmung hat. Wichtig ist es, die Untersuchung zu machen für die Strahlen, welche durch das Centrum der brechenden Fläche gehen, also für die den betreffenden Objectpunkten zugehörigen Nebenaxen.

Fig. 76.



Das Object möge sich befinden auf einer Kugelfläche mit dem Halbmesser ϱ, deren Mittelpunkt auf der Axe liege. Die Bildfläche betrachten wir auch als Kugelfläche, mit dem Halbmesser ϱ', deren Mittelpunkt ebenfalls in der Axe liegt.

An Figur 76 seien a, a' und α, α' conjugirte Punkte. Es ist demnach, da der geometrische Mittelpunkt der brechenden Fläche ein mit c conjugirter Punkt ist und dem § 303, 1. entsprechend genommen ist $H_1 = cF_1$, $H_2 = cF_2$

$$\frac{H_2}{ca'} + \frac{H_1}{ca} = 1, \qquad \text{(a.)}$$

$$\frac{H_2}{c\alpha'} + \frac{H_1}{c\alpha} = 1. \qquad \text{(b.)}$$

Da

$$cp = c\alpha\cos\varphi = c\alpha\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right),$$

$$cq = c\alpha'\cos\varphi = c\alpha'\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \text{ ist,}$$

*) Petzval, Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrisch. Untersuchungen. Pest 1843; Bericht über optische Untersuchungen. Wien 1857.

**) Zinken, über die Berechnung der Bildkrümmung bei optischen Apparaten. Pogg. Ann. 122.

so erhalten wir aus (b.) durch Einsetzung der hieraus folgenden Werthe von $c\alpha$ und $c\alpha'$

$$\frac{H_2}{cq}+\frac{H_1}{cp}=\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)^{-1},$$

oder näherungsweise

$$\frac{H_2}{cq}+\frac{H_1}{cp}=1+\frac{\varphi^2}{2}. \qquad \text{(c.)}$$

Nun ist nach Eigenschaften des Kreises

$$ap\,(2\varrho-pa)=\alpha p^2=cp^2\,tg^2\,\varphi=cp^2\frac{\varphi^2}{1-\frac{\varphi^2}{2}},$$

oder näherungsweise

$$=cp^2\varphi^2\left(1+\frac{\varphi^2}{2}\right)=cp^2\,\varphi^2.$$

Die Auflösung dieser Gleichung für ap giebt, wenn der absolute Werth von ϱ genommen wird,

$$ap=\varrho-\sqrt{\varrho^2-cp^2\,\varphi^2},$$

d. i. näherungsweise

$$ap=\varrho-\varrho\left(1-\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{cp^2}{\varrho^2}\,\varphi^2\right)=\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{cp^2}{\varrho}\,\varphi^2.$$

Damit findet man

$$\frac{1}{ac}=\frac{1}{cp+pa}=\frac{1}{cp+\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{cp^2}{\varrho}\,\varphi^2}=\frac{1}{cp\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{cp}{\varrho}\,\varphi^2\right)},$$

also nahezu

$$\frac{1}{ac}=\frac{1}{cp}\left(1-\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{cp}{\varrho}\,\varphi^2\right)=\frac{1}{cp}-\frac{\varphi^2}{2\varrho}.$$

Ebenso berechnet man

$$\frac{1}{ca'}=\frac{1}{cq}-\frac{\varphi^2}{2\varrho'}.$$

Werden die sich hieraus ergebenden Werthe von $\frac{1}{cq}$ und $\frac{1}{cp}$ in (c.) eingesetzt, so folgt

$$\frac{H_2}{ca'}+\frac{H_1}{ca}+\frac{\varphi^2}{2}\left(\frac{H_2}{\varrho}+\frac{H_1}{\varrho'}\right)=1+\frac{\varphi^2}{2}.$$

Dies von (a.) abgezogen giebt

$$\frac{H_2}{\varrho}+\frac{H_1}{\varrho'}=1. \qquad \text{(d.)}$$

Nun ist aber, wenn r_1 den Halbmesser der brechenden Fläche bedeutet,

$$H_2=F_2-r_1=F_1$$
$$H_1=F_1+r_1=F_2$$

nach Fig. 76 und § 304, 4. Dadurch geht (d.) über in

$$\frac{F_1}{\varrho}+\frac{F_2}{\varrho'}=1.$$

und dann wird, wenn die Werthe von F aus § 303 eingesetzt werden,

$$\frac{n_1}{\varrho} + \frac{n_2}{\varrho'} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}. \qquad \text{(e.)}$$

Gehen wir weiter und schliessen das zweite Mittel wieder durch eine kugelförmig gekrümmte Fläche, nennen ϱ_1 den Krümmungshalbmesser des nun erzeugten Bildes und setzen das dritte Mittel gleich dem ersten, so müssen wir statt der Grössen n_1, n_2, ϱ, ϱ', r_1 setzeu n_2, n_1, $-\varrho'$, ϱ_1, $-r_2$ und erhalten dann dem (e.) entsprechend

$$-\frac{n_2}{\varrho'} + \frac{n_1}{\varrho_1} = \frac{n_1 - n_2}{-r_2}. \qquad \text{(f.)}$$

Die Addition der Gleichungen (e.) und (f.) giebt

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Bei Vernachlässigung der Dicke der Linse ist dies nach 304, 4.

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Setzen wir dieses Verfahren fort, so ist, nach leicht verständlicher Bezeichnung für analoge auf einander folgende Linsen und Berücksichtigung der Lage der Krümmung gegen die Linsen

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{f_1},$$

$$-\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{f_2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$-\frac{1}{\varrho_{n-1}} + \frac{1}{\varrho_n} = \frac{1}{f_n}.$$

Durch deren Addition ergiebt sich endlich

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_n} = \Sigma \frac{1}{f_n}.$$

Soll nun das Bild eines Objectes durch die Linsen keine Krümmung erleiden, so muss $-\varrho = \varrho_n$ sein, es müssen also die Linsen der Bedingung $\Sigma \frac{1}{f_n} = 0$ genügen. Da nun die reciproke Summe verschwinden soll, so dürfen nicht alle f dasselbe Vorzeichen haben, es müssen also unter den vorhandenen Linsen Sammel- und Zerstreuungslinsen enthalten sein.

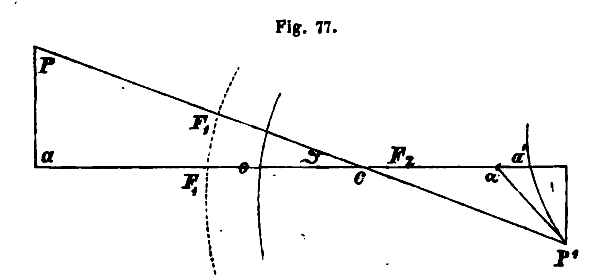
2. Bildflächen beliebig grosser Objectflächen.

Wir betrachten hier die optische Axe variabel und nehmen hierzu die jedesmalige Centrale Pc (Fig. 77, S. 406) des betreffenden Objectpunktes P und untersuchen dann den Weg derjenigen Strahlen, welche nur wenig von dieser Centralen abweichen und bestimmen den geometrischen Ort der Bildpunkte von den einzelnen Objectpunkten. Die ganze Untersuchung kann auch hier in der Ebene vorgenommen werden.

Seien zunächst noch sämmtliche Objectpunkte gelegen in einer Ebene aP senkrecht gegen die Hauptaxe. a und a′ sind conjugirte Punkte in der Hauptaxe und ebenso P und P′ in ihrer Hauptaxe PP′. ϑ bezeichne den Winkel der Nebenaxe mit der Hauptaxe, α den Winkel cPa, der also für unsere Annahme der senkrechten Objectebene $90 - \vartheta$ ist, α' den Winkel, welchen das Flächenelement des Bildes P′ mit der Nebenaxe bildet. Die Beziehung zwischen α und α' ist gefunden § 404, 1. nämlich

$$\frac{oF_1}{a'F_2}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha'.$$

Fig. 77.



Wenn wir cP′ mit ϱ und ea′ mit a′ bezeichnen, so ist nach § 303

$$ca = \frac{F_1 \cdot a'}{a' + F_2}\quad,\quad cP = \frac{F_1 \cdot \varrho}{\varrho + F_2}.$$

Da ferner $\frac{ca}{cP} = \sin\alpha = \cos\vartheta$ ist, so wird

$$\frac{a'}{\varrho}\,\frac{\varrho + F_2}{a' + F_2} = \cos\vartheta \text{ oder } \varrho\left\{\frac{a' + F_2}{a'}\cos\vartheta - 1\right\} = F_2.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel.

Führen wir statt der Polarcoordinaten rechtwinklige ein, indem wir aa′ als Abscissenaxe (x) und a′ zum Anfangspunkt nehmen. Es ist dann $x = \varrho\cos\vartheta - a'$, $y = \varrho\sin\vartheta$, also die Gleichung der Hyperbel nach vorgenommener Ordnung

$$y^2 = 2F_2 x + F_2\left[\frac{2a' + F_2}{a'^2}\right]x^2.$$

Es ist nun diese Betrachtung zu verallgemeinern:

1) aP ist ein Kegelschnitt, dann ist

$$cP(m\cos\vartheta - 1) = n$$

und da auch ist

$$cP = \frac{F_1\varrho}{\varrho + F_2},$$

so ist die Gleichung der Bildfläche bestimmt durch

$$\varrho\left(\frac{F_1 m}{F_1 + n}\cos\vartheta - 1\right) = \frac{nF_2}{F_1 + n},$$

also wiederum ein Kegelschnitt.

2) Ist a P irgend eine krumme Linie, deren Gleichung $aP = f(\vartheta)$ ist, so erhält man

$$\varrho\left(\frac{f(\vartheta) - F_1}{f(\vartheta)}\right) = -F_2.$$

Die Interferenz des Lichtes. (§ 368.)

Intensität des Lichtes in verschiedenen Punkten.

Bezeichnen wir mit ω den spitzen Winkel, welchen die beiden Spiegel mit einander bilden, und mit f die Entfernung des leuchtenden Punktes S (Fig. 78) von der Spiegelkante C, also auch mit f die Linien Ci und Ci′, welche gleich SC sein müssen.

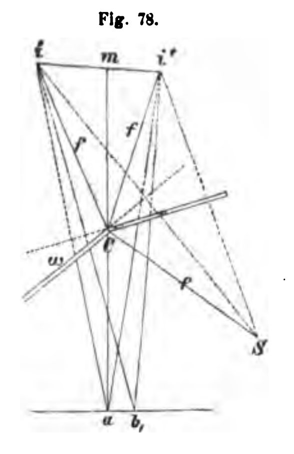


Fig. 78.

Die in einem Punkte b des Schirmes, der um β' von a entfernt ist, zusammentreffenden Schwingungen sind dann durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$\text{Von i aus } s = \frac{a}{z}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{ib - A}{l}\right),$$

$$\text{„ i′ „ } s' = \frac{a}{z}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{i'b - A}{l}\right),$$

wobei angenommen ist, dass die Entfernungen ib und i′b bei Beurtheilung der Intensität, die eine Folge des zurückgelegten Weges ist, nur wenig von einander verschieden sind. Die Amplituden müssen dann nach § 284 sein a : z, wo z den Weg bezeichnet.

Die Gesammtschwingung in b ist dann

$$S = s + s' = \frac{a}{z}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{ib - A}{l}\right) + \frac{a}{z}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{i'b - A}{l}\right),$$

$$= \frac{2a}{z}\cos\frac{\pi}{l}(ib - i'b)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{ib + i'b}{2l} + \frac{A}{l}\right).$$

Mithin ist die gesuchte Intensität I gegeben durch

$$I = \frac{4a^2}{z^2}\cos^2\frac{\pi}{l}(ib - i'b),$$

die nach der Entwickelung im Lehrbuch ist

$$= \frac{4a^2}{z^2}\cos^2\frac{\pi}{l}\frac{x\beta'}{y}.$$

Führt man endlich statt x die Grössen f und ω ein, so ergiebt sich, da $x = 2f\sin\omega$ ist,

$$I = \frac{4a^2}{z^2}\cos^2\frac{\pi}{l}\frac{2f\sin\omega}{y}\beta'.$$

Das Min. und Max. von I findet man dann, wenn

$$\beta' = \pm \frac{y}{f \sin\omega} (2n+1) \frac{l}{4}, \qquad \text{Min. } I = 0.$$

$$\beta' = \pm \frac{y}{f \sin\omega} 2n \frac{l}{4}, \qquad \text{Max. } I = \frac{4a^2}{z^2}.$$

Die Breite eines Streifens, d. h. die Entfernung zweier heller oder zweier dunkler Streifen, ist desshalb die Differenz zweier solcher aufeinander folgender berechneter β', also

$$\frac{y}{f \sin\omega} (2n+2) \frac{l}{4} - \frac{y}{f \sin\omega} 2n \frac{l}{4} =$$

$$\frac{y}{f \sin\omega} (2n+3) \frac{l}{4} - \frac{y}{f \sin\omega} (2n+1) \frac{l}{4} = \frac{y}{f \sin\omega} \frac{l}{2} = \frac{ly}{x}.$$

Zugleich folgt aus obiger Formel die Art der Abnahme und Zunahme der Intensität, die sich demnach periodisch von einem Streifen zum anderen wiederholt. Da ausserdem z immer grösser wird, je weiter wir uns von a entfernen, so muss die Intensität von a aus zu beiden Seiten abnehmen.

Die Farben dünner Blättchen. (§ 369.)

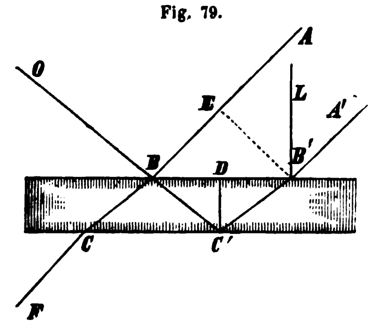
1. Farbenringe im reflectirten Licht.

Wir gehen aus von der Formel (31) § 225:

$$s = r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right)\right],$$

wo x bezeichnet die Entfernung des Punktes B (Fig. 79) von der Lichtquelle. Der Strahl, dessen Schwingung durch die eben aufgestellte Formel dargestellt ist, treffe in B das neue Mittel und werde daselbst reflectirt. Die damit verbundene Schwächung des Strahles drücken wir dadurch aus, dass wir die Amplitude r mit einem ächten Bruch ϱ, dem Reflexionsschwächungscoefficienten, multipliciren. Setzen wir das Material der Schicht, an dessen Grenze unser Strahl reflectirt wird, optisch dünner als das andere, so wird nach § 231. die Phase des Strahles nicht geändert, es muss demnach die Schwingung in O, wenn $OB = x'$ ist, dargestellt werden durch

Fig. 79.



$$s^1 = \varrho r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+x'}{l}\right)\right].$$

Ein dem ersten benachbarter Strahl A'B' trifft die dünne Schicht in einer Entfernung vom leuchtenden Punkte x — BE, für denselben gilt demnach

$$s = r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{l}\right)\right].$$

Dieser Strahl erleidet in B' eine Brechung und dadurch eine Schwächung, deren Coefficient β sei. Dabei findet nicht statt eine Veränderung der Phase, aber eine der Wellenlänge von l in l'. Es ist mithin die Schwingung in C' ausgedrückt durch

$$s_1 = \beta r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{l} - \frac{B'C'}{l'}\right)\right].$$

In C' wird dieser Strahl reflectirt und erfährt dabei ausser einer Schwächung der Amplitude, deren Schwächungscoefficient ϱ' sei, eine Phasenänderung (§ 376, 3.). Es ist mithin die Schwingung des in C' reflectirten Strahles

$$s_1' = \beta \varrho' r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{l} - \frac{B'C'}{l'} - \tfrac{1}{2}\right)\right].$$

Dieser reflectirte Strahl durchläuft dann den Weg C'B, welcher, wenn die das Blättchen begrenzenden Ebenen parallel, oder wenn bei dem Newton'schen Versuch die Strahlen senkrecht auffallen, gleich C'B' ist. Die Schwingung in B ist dann gegeben durch

$$s_1'' = \beta \varrho' r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{l} - \frac{2B'C'}{l'} - \tfrac{1}{2}\right)\right].$$

Dieser Strahl erleidet endlich in B abermals eine Brechung, so dass nun in O die Schwingung dieses Strahles ist

$$s_{11}'' = \beta\beta'\varrho' r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - BE}{l} - \frac{2B'C'}{l'} - \frac{x'}{l} - \tfrac{1}{2}\right)\right],$$

$$= -\beta\beta'\varrho' r \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' - BE}{l} - \frac{2B'C'}{l'}\right)\right].$$

Nach den Gesetzen der Interferenz ist nun die in O stattfindende Schwingung zur Zeit t

$$S = s^1 + s_{11}'' = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{l} - \frac{D}{l}\right),$$

wo zur Beurtheilung der Intensität des interferirten Lichtes der Coefficient A, oder die Schwingungsamplitude bestimmt werden muss. Durch Einführung der gefundenen Werthe von s^1 und s_{11}'' erhält man, wenn die darin enthaltenen sin. entwickelt werden,

$$\varrho r - \beta\beta'\varrho' r \cos 2\pi\left(\frac{BE}{l} - \frac{2B'C'}{l'}\right) = A_r \cos 2\pi\,\frac{D}{l},$$

$$\beta\beta'\varrho' r \sin 2\pi\left(\frac{BE}{l} - \frac{2B'C'}{l'}\right) = A_r \sin 2\pi\,\frac{D}{l}.$$

Diese Gleichungen geben dann quadrirt und addirt

$$A^2 = \varrho^2 r^2 + \beta^2\beta'^2\varrho'^2 r^2 - 2\beta\beta'\varrho\varrho' r^2 \cos 2\pi\left(\frac{BE}{l} - \frac{2B'C'}{l'}\right),$$

$$= r^2\left\{(\varrho - \beta\beta'\varrho')^2 + 4\beta\beta'\varrho\varrho' \sin^2\pi\left(\frac{2B'C'}{l'} - \frac{BE}{l}\right)\right\}.$$

Die nun gefundene Amplitude ist abhängig von B'C' und BE, also von der Dicke der Schicht und der Neigung des einfallenden Strahles. Ist die

Dicke des Blättchens $CD = \Delta$, so ist, wenn der Einfallswinkel $\angle A'B'L = \angle B'C'D$ mit i und der Brechungswinkel $= \angle B'C'D$ mit r bezeichnet wird,

$$B'C' = \frac{\Delta}{\cos r}, \quad BE = BB' \sin i, \quad BB' = 2\Delta \operatorname{tg} r$$

und nach bekannten Bezeichnungen

$$\sin i = n \sin r = \frac{c}{c'} \sin r = \frac{l}{l'} \sin r.$$

Mit Benutzung dieser Werthe ist die Amplitude des interferirten Strahles

$$A_r^2 = r^2 \left\{ (\varrho - \beta\beta'\varrho')^2 + 4\beta\beta'\varrho\varrho' \sin^2 2\pi \left(\frac{\Delta \cos r}{l'}\right) \right\}.$$

Man erkennt nun, da in A_r eine trigonometrische Function enthalten ist, dass diese Amplitude eine periodische Function ist, und findet leicht folgende Grenzwerthe

$$\text{Max. } A_r, \text{ wenn } \sin 2\pi \left(\frac{\Delta \cos r}{l'}\right) = \pm 1 \text{ oder } \Delta = \frac{2n-1}{\cos r} \cdot \frac{l'}{4},$$

$$\text{Min. } A_r, \text{ „ } \sin 2\pi \left(\frac{\Delta \cos r}{l'}\right) = 0 \text{ „ } \Delta = \frac{2n}{\cos r} \cdot \frac{l'}{4} \text{ ist,}$$

wo n jede beliebige ganze Zahl bedeutet.

Für senkrecht einfallendes Licht ist $i = r = 90^0$, also

$$\text{Max. } A_r, \text{ wenn } \frac{\Delta}{l'} = \frac{2n-1}{4}, \text{ also } \Delta = (2n-1)\frac{l'}{4},$$

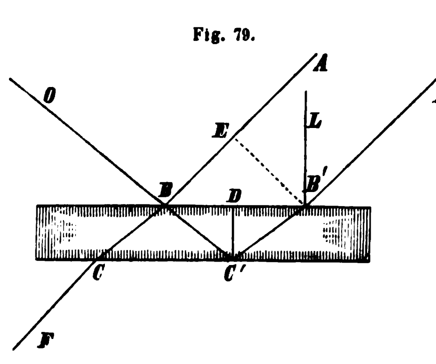
$$\text{Min. } A_r, \text{ „ } \frac{\Delta}{l'} = \frac{2n}{4}, \text{ „ } \Delta = 2n \cdot \frac{l'}{4} \text{ ist.}$$

Die Berechnung von Min. und Max. A_r findet sich in der nächsten Nummer zusammengestellt mit den dort zu untersuchenden Grenzwerthen.

2. Farbenringe im durchgelassenen Lichte.

Für den Theil des Lichtstrahles AB (Fig. 79), der nach zweimal stattfindender Brechung durch die Schicht hindurchgeht, ist nach den in 1. festgesetzten Bezeichnungen

Fig. 79.



$$\sigma' = \beta\beta' r \times \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{l} - \frac{BC}{l'}\right),$$

wo nun' x die Entfernung CF bezeichnet.

Von dem Strahl A'B' bleibt nach zweimaliger Reflexion im Punkt F

$$\sigma'' = \beta\varrho'^2\beta' r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + x' - BE}{l} - \frac{B'C'}{l'} - \tfrac{1}{2} - \frac{C'B + BC}{l'}\right).$$

Durch Interferenz ist in F

$$S = \sigma' + \sigma''.$$

Die Amplitude dieser interferirten Schwingung ist dann nach den obigen analogen Rechnungen, wenn, wie in 1., die Wege der Strahlen innerhalb des Blättchens gleich gesetzt werden dürfen,

$$A_d^2 = r^2 \left\{ (\beta \beta' + \varrho''^2 \beta \beta')^2 - 4 \beta^2 \beta''^2 \varrho'^2 \sin^2 2\pi \frac{\Delta \cos r}{l'} \right\}.$$

Daraus folgt

$$\text{Max. } A_d, \text{ wenn } \sin \frac{\Delta \cos r}{l'} = 0 \quad \text{oder } \Delta = \frac{2n}{\cos r} \frac{l'}{4},$$

$$\text{Min. } A_d, \text{ „ } \sin \frac{\Delta \cos r}{l'} = \pm 1 \quad \text{„ } \Delta = \frac{2n-1}{\cos r} \frac{l'}{4} \text{ ist.}$$

Man sieht also, dass im durchgelassenen Lichte da die dunklen (hellen) Stellen auftreten, wo im reflectirten die hellen (dunklen) sind.

Die Formeln lehren auch, dass die Erscheinung im durchgelassenen Lichte weniger brillant ist als im reflectirten. Es folgt nämlich aus § 376 und § 377, dass $1 - \varrho^2 = \beta^2$ ist; denn die Intensität des einfallenden Strahles ist gleich der des gebrochenen plus der des anderen reflectirten Strahles. Ferner ergiebt sich dann aus diesen §§, dass $\varrho = \varrho'$, und darnach $\beta = \beta'$ ist. Dies giebt für die dortigen Fälle A und B also auch allgemein.

Dadurch vereinfachen sich die Amplituden für die reflectirten und durchgehenden Strahlen in

$$A_r = r^2 \left\{ (\varrho - (1 - \varrho^2)\varrho)^2 + 4 (1 - \varrho^2) \varrho^2 \sin^2 2\pi \frac{\Delta \cos r}{l'} \right\},$$

$$A_d = r^2 \left\{ (1 - \varrho^2 + \varrho^2 (1 - \varrho^2))^2 - 4 (1 - \varrho^2) \varrho^2 \sin^2 2\pi \frac{\Delta \cos r}{l'} \right\}.$$

Daraus können wir, da ϱ nur ein kleiner Bruch ist, durch Vernachlässigung der 4ten und höheren Potenzen dieses Bruches erhalten.

$$A_r = 4 r^2 \varrho^2 \sin^2 2\pi \frac{\Delta \cos r}{l'},$$

$$A_d = r^2 \left\{ 1 - 4 \varrho^2 \sin^2 2\pi \frac{\Delta \cos r}{l'} \right\}.$$

$$\text{Max. } A_r = 4 r^2 \varrho^2, \quad \text{Min. } A_r = 0,$$

$$\text{Max. } A_d = r^2, \quad \text{Min. } A_d = r^2 (1 - 4\varrho^2),$$

also zeigen sich im durchgelassenen Lichte nur hellere und dunklere Stellen, nie vollständige Dunkelheit.

3. Verallgemeinerung für mehrere Lichtstrahlen.

Die Berücksichtigung mehrerer Lichtstrahlen ändert die Lage der dunklen Stellen, wenn die Wege der Strahlen im Blättchen gleich gesetzt werden dürfen, nicht, wie die folgenden Rechnungen ergeben.

Für die verschiedenen reflectirten Strahlen finden wir nach 1.

$$s^1 = \varrho r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+x'}{l}\right),$$

$$s' = \beta\beta'\varrho' r \sin \left(2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x+x'-BE}{l} - \frac{2B'C'}{l'} - \frac{1}{2}\frac{l'}{l'}\right]\right),$$

$$s'' = \beta\beta'\varrho'^3 r \sin \left(2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x+x'-2BE}{l} - \frac{4B'C'}{l'} - \frac{3}{2}\frac{l'}{l'}\right]\right),$$

$$s''' = \beta\beta'\varrho'^5 r \sin \left(2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x+x'-3BE}{l} - \frac{6B'C'}{l'} - \frac{5}{2}\frac{l'}{l'}\right]\right),$$

. . . .

$$s = \beta\beta'\varrho'^{2n-1} r \sin \left(2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x+x'-nBE}{l} - \frac{2nB'C'}{l'} - \frac{2n-1}{1}\frac{l'}{l'}\right]\right).$$

Aus diesen Formeln geht hervor, dass $\frac{BE}{l} - \frac{2B'C'}{l'}$ die Wegdifferenz je zweier aufeinander folgender Strahlen ist. Setzen wir diese Wegdifferenz, um unsere Behauptung, dass die Stellen, welche bei Berücksichtigung von nur zwei Strahlen dunkel sind auch dunkel bleiben, wenn mehr Strahlen zur Interferenz gebracht werden, zu beweisen, gleich einem geraden Vielfachen der halben Wellenlänge. Es bleibt dann noch der zweite Strahl durch einmalige innere Reflexion gegen den ersten um $\frac{1}{2}l'$, der dritte durch dreimalige um $\frac{3}{2}l'$, der vierte durch fünfmalige um $\frac{5}{2}l'$ verschoben u. s. f., also haben alle Strahlen die dem ersten entgegengesetzte Phase. Wenn aber zwei oder mehrere Strahlen mit entgegengesetzter Phase zusammentreffen, so ist die resultirende Amplitude die algebraische Summe der Theilamplituden. Die Amplitude der durch die Interferenz der sämmtlichen Strahlen entstehenden Schwingung ist demnach

$$A = \varrho r - \beta\beta'\varrho' r - \beta\beta'\varrho'^3 r - \beta\beta'\varrho'^5 r \ldots\ldots.$$

Dies ist nach den in 2. citirten Bedingungen für $\beta, \beta', \varrho' \ldots.$

$$A = r\varrho\,[1 - \beta^2(1 + \varrho^2 + \varrho^4 + \varrho^6 + \ldots.)],$$

oder, da ϱ ein kleiner Bruch ist

$$A = r\varrho\left[1 - \beta^2\frac{1}{1-\varrho^2}\right].$$

Wird nun endlich berücksichtigt, dass $1 - \varrho^2 = \beta^2$ ist, so folgt $A = 0$, d. h. die Resultirende sämmtlicher Strahlen verschwindet und die Ringe bleiben auch dann noch vollständig dunkel.

4. Berechnung der Intensität bei mehreren Lichtstrahlen.

Wir haben als resultirende Amplitude nach der vorigen Nummer

$$S = s^1 + \sum_{n=1}^{n=n} \beta\beta'\varrho'^{2n-1} r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+x'-nBE}{l} - \frac{2nB'C'}{l'} - \frac{2n-1}{2}\frac{l'}{l'}\right)$$

oder

$$S = s^1 - \beta\beta' r \sum_{n=1}^{n=n} \varrho'^{2n-1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x+x'-nBE}{l} - \frac{2nB'C'}{l'}\right).$$

Die Summe der Reihe erhalten wir, indem wir zunächst zur Abkürzung schreiben

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x+x'}{l}\right)=\vartheta,\quad 2\pi\left(\frac{2B'C'}{l'}-\frac{BE}{l}\right)=\eta,$$

dann jedes Glied mit $2\cos\eta$ multipliciren und folgende Zerlegung vornehmen

$$2\cos\eta\sin(\vartheta-n\eta)=2\cos\eta\sin(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta-\eta),$$
$$=2\cos^2\eta\sin(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta)-\sin 2\eta\cos(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta).$$

Wird rechts $\sin^2\eta\sin(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta)$ addirt und subtrahirt, so ist

$$2\cos\eta\sin(\vartheta-n\eta)=(\cos^2\eta-\sin^2\eta)\sin(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta)-\sin 2\eta\cos(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta)$$
$$+(\sin^2\eta+\cos^2\eta)\sin(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta),$$
$$=\sin(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta-2\eta)+\sin(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta),$$
$$=\sin(\vartheta-\overline{n+1}\,\eta)+\sin(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta).$$

Wenn wir demnach unsere gesuchte Summe mit R bezeichnen, so erhalten wir

$$2\cos\eta\,R=\sin\vartheta+\varrho'^2\sin(\vartheta-\eta)+\ldots\ldots\ldots+\varrho'^n\sin(\vartheta-\overline{n-1}\,\eta)$$
$$+\sin(\vartheta-2\eta)+\varrho'^2\sin(\vartheta-3\eta)+\ldots\ldots+\varrho'^n\sin(\vartheta-\overline{n+1}\,\eta).$$

Durch gehörige Zusammenstellung ist dann

$$2\cos\eta\,R=\varrho'\sin\vartheta+\varrho'^2R+\frac{R}{\varrho'^2}-\frac{\sin(\vartheta-\eta)}{\varrho'}.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung finden wir

$$R=\frac{\varrho'(\varrho'^2\sin\vartheta-\sin(\vartheta-\eta))}{2\varrho'^2\cos\eta-\varrho'^4-1}.$$

Dies giebt also

$$S=\varrho r\sin\vartheta-\beta\beta' r\varrho'\frac{\varrho'^2\sin\vartheta-\sin(\vartheta-\eta)}{2\varrho'^2\cos\eta-\varrho'^4-1},$$
$$=\frac{\varrho r(2\varrho'^2\cos\eta-\varrho'^4-1)-\beta\beta' r\varrho'^3+\beta\beta' r\varrho'\cos\eta}{2\varrho'^2\cos\eta-\varrho'^4-1}\sin\vartheta$$
$$-\frac{\beta\beta' r\varrho'\sin\eta}{2\varrho'^2\cos\eta-\varrho'^4-1}\cos\vartheta.$$

Diesen Ausdruck können wir dann abgekürzt, wenn wir die Werthe ϑ und η wieder einsetzen, in Folgendem zusammenfassen:

$$S=A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x+x'}{l}\right)+B\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x+x'+\frac{1}{4}l}{l}\right).$$

Diese Rechnung giebt also statt der n Strahlen nur noch 2, welche eine Phasendifferenz von einer Viertel-Wellenlänge besitzen. Nach denselben Rechnungen, wie sie in 1. angestellt sind, erhalten wir dann die Intensität

$$I=A^2+B^2.$$

Die weiter anzustellende Rechnung vereinfacht sich, wenn die in 2., citirten Gleichungen zwischen den Schwächungscoefficienten benutzt werden. Man findet

$$A=r\varrho\frac{(1+\varrho^2)(1-\cos\eta)}{1+\varrho^4-2\varrho^2\cos\eta},\quad B=r\varrho\frac{(\varrho^2-1)\sin\eta}{1+\varrho^4-2\varrho^2\cos\eta},$$

also
$$I = r^2 \varrho^2 \frac{(\varrho^2+1)^2(1-\cos\eta)^2 + (\varrho^2-1)^2\sin^2\eta}{(1+\varrho^4-2\varrho^2\cos\eta)^2}$$
$$= \frac{4r^2\varrho^2\sin^2\frac{1}{2}\eta}{(1-\varrho^2)^2+4\varrho^2\sin^2\frac{1}{2}\eta}.$$
$$\text{Max. } I = \frac{4r^2\varrho^2}{(1+\varrho^2)^2}, \quad \text{Min. } I = 0.$$

Die Bedingungen, unter denen dies erreicht ist, sind dieselben wie oben. Damit erhält zugleich 3. eine Bestätigung.

5. Interferenz bei grossen Gangunterschieden.

Newton's Farbenringe erscheinen nur, wenn die Gläser sehr nahe beisammen sind, verschwinden also bei grösseren Gangunterschieden, während die in 2 gefundenen Werthe die Periodicität der Erscheinung geben, welches auch der Werth von $\varDelta$ sei. Das Nichteintreten der Farbenringe unter den genannten Umständen erklärt sich wie folgt. Wir sind genöthigt, anzunehmen, dass das homogenste Licht, welches wir zu derartigen Versuchen benutzen, doch noch besteht aus Licht von verschiedenen Wellenlängen. Der Unterschied der Wellenlängen dieser verschiedenfarbigen Strahlen sei eine sehr kleine Grösse dl. Ist $\varDelta$ eine kleine Grösse, also gleich einem kleinen Vielfachen von $\frac{1}{4}$l, so ist es auch beinahe ein ebensogrosses Vielfaches von $\frac{1}{4}$(l+dl). Wenn aber $\varDelta$ nicht mehr klein ist, so wird, wenn $\varDelta = m\frac{l}{4}$ ist, m eine grosse Zahl und es ist dann vielleicht $\varDelta = n\frac{l+dl}{4}$, wo n eine von m verschiedene Zahl bedeutet. Es kann dann, wenn m eine gerade Zahl ist, n eine ungerade werden, also wenn die Wellen von der Länge l an der betreffenden Stelle sich schwächen, so werden die von der Länge l + dl sich gerade verstärken.

Dass diese Erklärung die richtige ist, folgt aus Beobachtungen, bei denen man Sorge trägt, dass man möglichst homogenes Licht hat. Fizeau (Pogg. Ann. 119) hat bei einer Phasendifferenz von 50000 Wellenlängen noch die Interferenz beobachtet.

6. Berücksichtigung der Polarisation

In § 376 ist gefunden für die Reflexion des Lichtes, wenn die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stattfinden:

an dem dichteren, an dem dünneren Mittel
$$x = -c\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad x' = c\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Geschehen die Schwingungen in der Einfallsebene, so ist die Reflexion gegeben durch

an dem dichteren, an dem dünneren Mittel,
$$x = -c\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}, \quad x' = c\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}.$$

Im ersten Fall haben wir stets, d. h. für jeden Einfallswinkel, bei der Reflexion an dem dichteren Mittel eine Verzögerung einer halben Wellenlänge, anders im zweiten Fall; denn da wechselt $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ das Zeichen, wenn $\alpha + \beta > 90^0$ wird. Im Allgemeinen d. h. wenn die Begrenzung der dünnen Schicht auf beiden Seiten dieselbe ist, kann das die Erscheinung nicht ändern, da dann mit x gleichzeitig x' sein Zeichen ändert.

Ist das untere dichtere Mittel von dem oberen verschieden, ist z. B. sein Brechungsexponent grösser als der des oberen, so ändern sich die Erscheinungen in der Nähe des Polarisationswinkels. Dies geschieht z. B. wenn wir eine Glaslinse, deren Brechungsexponent 1,5 sei, auf einen Diamant, dessen Brechungsexponent 2,4 sei, legen. So lange der Einfallswinkel kleiner ist als der Polarisationswinkel dieses Glases, also kleiner als $56^0\ 19'$, erscheint das Ringsystem wie früher, sobald aber dieser Winkel erreicht ist, wird von der oberen Grenze der Luftschicht, da diese dann unter dem Polarisationswinkel bei der Reflexion an Luft in Glas getroffen wird, kein Licht reflectirt, sondern nur an der unteren Grenze, am Diamant. Wird der Einfallswinkel noch grösser, so wird an der oberen Grenze wieder Licht reflectirt, aber jetzt mit Verlust einer halben Wellenlänge. So lange nun der Einfallswinkel kleiner ist als der Polarisationswinkel am Diamant also $< 67^0\ 40'$, tritt ebenfalls an der unteren Grenze der Verlust einer halben Wellenlänge ein, also giebt die Reflexion allein den reflectirten Wellen keine Phasendifferenz, die Ringe erscheinen mit weissem Centrum und, wo vorher ein heller Ring war, ist jetzt ein dunkler und umgekehrt. Ist der Einfallswinkel $67^0\ 40'$, so reflectirt Diamant garnicht, die Ringe verschwinden, und überschreitet der Einfallswinkel 70^0, so erscheinen sie wieder, wie bei kleinen Einfallswinkeln.

Einen passenden Apparat zur Beobachtung dieser Erscheinung hat Duboscq construirt.

Die Beugung oder Diffraction des Lichtes. (§ 370.)

1. Vorbereitende Gleichungen*).

An der Figur 80 S. 416, deren Anlage leicht verständlich ist, bezeichne N den Schnittpunkt der Axe des Auges oder des Fernrohrs, welches nach dem Lichtpunkte S gerichtet ist. Dieser Punkt N heisse der optische Mittelpunkt des Schirmes. Die Entfernung des leuchtenden Punkts S ist im Vergleich zu den anderen hier vorkommenden Dimensionen unendlich gross, so dass alle von ihm ausgehenden Strahlen als unter sich parallel angesehen werden können. $AA' = \gamma$ ist die Breite der Oeffnung, deren Höhe h ist. Man setze die Winkel der Normalebene zu den Strahlen mit der

*) Schwerd, die Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.

Schirmebene d. i. $\angle A'Af = \chi$ und $\angle A'Ag = \psi$. Der Beugungswinkel ist $\angle HAT = \angle fAg = \vartheta = \psi - \chi$. x bezeichne die Entfernung des Punktes N vom Lichtpunkt und β die Grösse NA.

Wir theilen den Spalt in $(m + 1)$ Horizontalstreifen, deren Breite dh sei, so dass $h = (m + 1)\, dh$ ist, und in $(n + 1)$ Verticalstreifen, deren Breite $d\gamma$ sei, so dass

$$\gamma = (n + 1)\, d\gamma \text{ ist.}$$

Fig. 80.

Die Entfernungen der beiden Ränder des Spaltes, A und A′, von der Lichtquelle werden ausgedrückt durch

$$x - \beta \sin\chi, \text{ und } x - (\beta + \gamma) \sin\chi.$$

Der Abstand des Mittelpunktes eines jeden Verticalstreifens von der Lichtquelle lässt sich durch folgende Formel geben:

$$x - \beta \sin\chi - \tfrac{1}{2} d\gamma \sin\chi - (r - 1)\, d\gamma \sin\chi,$$

wo r die Werthe 1. 2. ..... $(n + 1)$ erhält, wenn wir die Streifen von A gegen A′ rechnen.

Die Oscillationsgeschwindigkeiten der in diesen Punkten befindlichen Moleküle sind dann bestimmt durch eine Gleichung von der Form

$$U_r = V \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x - (\beta + \frac{1}{2} d\gamma + (r - 1)\, d\gamma \sin\chi}{l}\right].$$

Nach dem Huyghens'schen Princip ist jeder dieser Punkte als der Anfangspunkt einer Wellenbewegung zu betrachten. Bedenken wir nun, dass die Entfernung dieser Punkte von der Normalebene NL des gebeugten Strahles ist

$$\beta \sin\psi + \tfrac{1}{2} d\gamma \sin\psi + (r - 1)\, d\gamma \sin\psi,$$

so werden für die Aethertheilchen, welche sich in der Richtung der gebeugten Strahlen auf der Ebene NL befinden, die Oscillationsgeschwindigkeiten gegeben durch die Gleichung:

$$U_r = V \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x - (\beta + \frac{1}{2} d\gamma + (r - 1)\, d\gamma) \sin\chi}{l} - \frac{(\beta + \frac{1}{2} d\gamma + (r - 1)\, d\gamma) \sin\psi}{l}\right],$$

$$= V \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \frac{(\beta + \frac{1}{2} d\gamma)(\sin\psi - \sin\chi)}{l} - \frac{(r - 1)\, d\gamma (\sin\psi - \sin\chi)}{l}\right].$$

Die durch Interferenz hervorgebrachte Wirkung finden wir nach § 226. Die einzelnen Strahlen haben alle dasselbe V und die Phasen bilden eine arithmetische Progression, deren erstes Glied

$$2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x}{l}-\frac{(\beta+\frac{1}{2}d\gamma)(\sin\psi-\sin\chi)}{l}\right],$$

und deren Differenz

$$-2\pi\frac{d\gamma(\sin\psi-\sin\chi)}{l}\ \text{ist.}$$

Die Interferenzschwingung ist demnach, wenn wir statt des dort S. 144 C. genommenen ersten Gliedes $\alpha-\gamma$ und des Exponenten ε die hier gewonnenen Grössen einführen, durch die folgende Form bestimmt:

$$\Sigma U_r = V\frac{\sin\left[(n+1)\pi d\gamma(\sin\psi-\sin\chi)l^{-1}\right]}{\sin\left[\pi d\gamma(\sin\psi-\sin\chi)l^{-1}\right]}\times$$
$$\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x}{l}-\frac{(\beta+\frac{1}{2}(n+1)d\gamma)(\sin\psi-\sin\chi)}{l}\right].$$

Dafür setzen wir, da $\pi d\gamma(\sin\psi-\sin\chi)l^{-1}$ sehr klein, so dass der Bogen für den sin. genommen werden kann, und $(n+1)d\gamma=\gamma$ ist,

$$\Sigma U_r = (n+1)V\frac{\sin\left[\pi\gamma(\sin\psi-\sin\chi)l^{-1}\right]}{\pi\gamma(\sin\psi-\sin\chi)l^{-1}}\times$$
$$.\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{x}{l}-\frac{(\beta+\frac{1}{2}\gamma)(\sin\psi-\sin\chi)}{l}\right].$$

Weil dieser Ausdruck offenbar für einen jeden der $(m+1)$ horizontalen Streifen gilt, so wird für alle diese Streifen zusammen oder für die ganze Oeffnung des Schirmes die Hauptresultante sein

$$\Sigma\Sigma U_r = (m+1)\,\Sigma U_r.$$

Die Gesammtvibrationsintensität, welche immer mit I bezeichnet werden möge, ist daher

$$I = (m+1)(n+1)V\frac{\sin\left[\pi\gamma(\sin\psi-\sin\chi)l^{-1}\right]}{\pi\gamma(\sin\psi-\sin\chi)l^{-1}}.$$

Wird dann eine Grösse, die proportional der Intensität des Lichtes ist, mit I^2 bezeichnet, so ist

$$I^2 = (m+1)^2(n+1)^2V^2\frac{\sin^2\left[\pi\gamma(\sin\psi-\sin\chi)l^{-1}\right]}{\left[\pi\gamma(\sin\psi-\sin\chi)l^{-1}\right]^2}.$$

Nehmen wir endlich die Vibrationsintensität des ungebeugten Lichtbündels, welches durch die ganze Oeffnung des Schirmes hindurchgeht, wenn man die Ebene des Schirmes senkrecht auf die Strahlen hält, gleich 1, so ist $\cos\chi$ die Vibrationsintensität desjenigen Lichtbündels, welches unter dem Einfallswinkel χ durch dieselbe Oeffnung ungebeugt hindurch gehen kann. Da dies aber das obige $(m+1)(n+1)V$ ist, so können wir diese Grösse in dem Ausdruck für I^2 immer durch $\cos\chi$ ersetzen.

Wollte man nun die Interferenz der Wellen im Brennpunkt des Fernrohres oder im Auge berechnen, so müsste man eigentlich noch ein anderes t nehmen, dies aber hat keinen Einfluss auf I, und ausserdem noch einen Schwächungscoefficienten hinzusetzen. Da es sich aber überhaupt nicht um absolute Lichtintensitäten handelt, sondern nur um diesen proportionale Grössen, so können auch diese Coefficienten unberücksichtigt bleiben.

2. Anwendung auf specielle Fälle.

A) Die directen Strahlen stehen senkrecht auf der Ebene des Spaltes. Dann ist Fig. 80 $\chi = 0$, $\psi = \vartheta$, und in Folge dessen, da $\cos \chi = 1 = (m+1)(n+1)V$ ist,

$$I^2 = \frac{\sin^2(\pi\gamma \sin\psi\, l^{-1})}{(\pi\gamma \sin\psi\, l^{-1})^2}.$$

Hier wird $I^2 = 0$, wenn der Zähler 0 ist, ohne dass gleichzeitig der Nenner verschwindet. Dies ist erreicht, wenn

$\frac{\pi\gamma \sin\psi}{l} = \pm m\pi$, $m = 1, 2, 3 \ldots\ldots$, oder wenn

$$\gamma \sin\psi = A'g = \pm m l \text{ ist.}$$

Die Intensität des gebeugten Lichtes ist daher 0, wenn der Gangunterschied der Randstrahlen gleich ist einer ganzen Anzahl von Wellenlängen.

I kann nur dann $= 1$ werden, wenn

$$\sin(\pi\gamma \sin\psi\, l^{-1}) = \pi\gamma \sin\psi\, l^{-1} \text{ ist.}$$

Dies kann aber nur geschehen, wenn ψ so klein ist, dass man statt des sin. den Bogen setzen kann, also nur für den nicht gebeugten Strahl.

Der Zähler von I^2 ist $= 1$, d. h. erhält sein Max., wenn $\gamma \sin\psi = \pm\frac{(2n+1)l}{2}$ ist, dann aber wird der Nenner immer grösser, so dass also die Maxima von I^2 immer kleiner werden, je weiter wir uns von dem ersten Maximum entfernen. Es ist z. B. für $n = 0, 1, 2 \ldots\ldots$

$$I^2 = \frac{1}{1\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}, \frac{1}{9\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}, \frac{1}{25\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}, \ldots\ldots$$

Ist γ im Vergleich zu l gross, was immer stattfinden wird, so ist $\frac{l}{\gamma}$ sehr klein und infolge dessen kann an den dunklen Stellen, wo $\sin\psi = m\frac{l}{\gamma}$ ist, gesetzt werden $\psi = \pm m\frac{l}{\gamma}$. Diese Gleichung und für grössere Beugungswinkel die genauere für $\sin\psi$ lehrt, dass die Beugungswinkel oder die sin. der Beugungswinkel, welche den dunklen Stellen entsprechen, proportional sind den Wellenlängen und umgekehrt proportional der Breite des Spaltes. Je länger die Lichtwelle, je enger der Spalt ist, desto breiter werden desshalb die Streifen.

Ist $\gamma < l$, so ist für den ersten dunklen Streifen $\sin\psi = \frac{l}{\gamma} > 1$, d. h. es giebt keinen solchen Beugungswinkel; durch einen solchen Spalt würde also das mittlere Spectrum eine unbegrenzte Breite erhalten. (cf. S. 252.)

Die Gleichung $\gamma \sin\psi = \pm m l$ giebt ein Mittel die Grösse der Wellenlängen zu bestimmen.

B) Der Schirm wird vor das Objectiv des Fernrohres senkrecht auf die optische Axe befestigt, dann ist

$$\psi = 0, \quad \text{also } \vartheta + \chi = 0, \quad \sin\vartheta = -\sin\chi,$$

$$I^2 = \cos^2\vartheta \frac{\sin^2[\pi\gamma \sin\vartheta\, l^{-1}]}{[\pi\gamma\sin\vartheta\, l^{-1}]^2}.$$

Hier haben wir dem vorigen analoge Betrachtungen und wir erhalten dieselben Resultate wie vorhin, wenn ϑ, der Beugungswinkel, so klein ist, dass wir $\cos^2\vartheta = 1$ setzen können. Ist dies nicht der Fall, so müssen die Intensitäten unter A) mit $\cos^2\vartheta$ multiplicirt werden. Die hierdurch entstehende Verminderung der Intensität rührt offenbar nur von der Verminderung der Menge des Lichts her, welche auf die Oeffnung fällt, wenn diese eine schiefe Lage gegen die directen Strahlen annimmt.

C) Für den allgemeinen Fall ergeben sich die analogen Erörterungen. Die Symmetrieverhältnisse sind aber anders, während unter A) das Beugungsbild symmetrisch ist, so liegen im allgemeinen Fall die Maxima an der Seite der Normalen, an der das ungebeugte Bild sich befindet, weiter auseinander als an der anderen Seite.

3. Beugung durch eine paralleltrapezförmige Oeffnung.

Der Punkt N (Fig. 81) sei der optische Mittelpunkt des Schirmes, in dem ABCD, das gegebene Paralleltrapez, sich befindet. Die Lage dieses Paralleltrapezes und damit des Schirmes ist gegeben durch die Coordinaten der Eckpunkte bezogen auf das rechtwinklige Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit N zusammenfällt, dessen x Axe die Richtung der Axe des Fernrohres hat, welches auf den leuchtenden Punkt eingestellt ist, dessen z Axe die Schnittlinie der Schirmebene mit der Ebene ist, die senkrecht gelegt wird zu den directen Strahlen, der sogenannten Normalebene.

Fig. 81.

Die Entfernungen der Punkte A, B, C, D von der Normalebene oder die x dieser Punkte seien a_1, a_2, a_3, a_4.

Die Entfernung des leuchtenden Punktes von der Normalebene sei x.

Wir theilen ferner das Paralleltrapez in unendlich viele gleiche Elementartheilchen, so dass auf der Linie AB $n + 1$ solcher Theilchen liegen und es im Ganzen $(m + 1)$ solcher Reihen giebt. Setzen wir nun die Anzahl der Theilchen welche auf CD liegen $= u$, so ist

$$AB : CD = n + 1 : u, \quad \text{also } u = \frac{(n+1)\, CD}{AB},$$

mithin liegen dann im ganzen Paralleltrapez $\frac{(n+1)(m+1)}{2} \frac{AB + CD}{AB}$ solcher Theilchen.

Die Entfernungen der verschiedenen Punkte der Linie AB von der Lichtquelle lassen sich wie folgt angeben, da die des Punktes A ist $x - a_1$, wenn $d a_1$ die Projection eines Theilchens auf die xAxe bedeutet:

Der Mittelpunkt

des 1ten Theilchens ist: $x - a_1 - \frac{1}{2} d a_1$,

„ rten „ „ : $x - a_1 - \frac{1}{2} d a_1 - (r - 1) d a_1$,

„ letzt. „ „ : $x - a_1 - \frac{1}{2} d a_1 - n d a_1 = x - a_2 + \frac{1}{2} d a_1$

von der Lichtquelle entfernt.

Mithin werden die Oscillationen der $n + 1$ auf AB befindlichen Aethertheilchen vorgestellt durch

$$U_r = V \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x - a_1 - \frac{1}{2} d a_1 - (r - 1) d a_1}{l}\right].$$

Wir legen nun eine Ebene senkrecht auf die gebeugten Strahlen durch den Punkt N und bezeichnen die Entfernungen der Punkte A, B, C, D von dieser Ebene mit a_1', a_2', a_3', a_4'. Es ist dann dem obigen entsprechend die Entfernung des Mittelpunktes des rten Theilchens der AB von dieser Normalebene $a_1' + \frac{1}{2} d a_1' + (r - 1) d a_1'$.

Nach dem Huyghens'schen Princip sind dann die Oscillationsgeschwindigkeiten für die Aethertheilchen dieser zweiten Normalebene

$$U_r' = V \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x - a_1 - \frac{1}{2} d a_1 - (r-1) d a_1}{l} - \frac{a_1' + \frac{1}{2} d a_1' + (r-1) d a_1'}{l}\right],$$

$$= V \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + (a_1' - a_1) + \frac{1}{2}(d a_1' - d a_1) + (r - 1)(d a_1' - d a_1)}{l}\right].$$

Daraus erhalten wir nach § 226 C., wenn wir setzen

$$2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + (a_1' - a_1) + \frac{1}{2}(d a_1' - d a_1)}{l}\right] \text{ für } \alpha - \gamma,$$

$$2\pi \left(\frac{d a_1' - d a_1}{l}\right) \text{ für } \varepsilon,$$

$$\sum U_r' = V \frac{\sin [(n + 1) \pi (d a_1' - d a_1) l^{-1}]}{\sin [\pi (d a_1' - d a_1) l^{-1}]} \times$$

$$\sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + (a_1' - a_1) + \frac{1}{2}(n + 1)(d a_1' - d a_1)}{l}\right].$$

Nun ist aber $(n + 1) d a_1 = a_2 - a_1$, $(n + 1) d a_1' = a_2' - a_1'$, also

$$\sum U_r' = V \frac{\sin [\pi \{(a_2' - a_2) - (a_1' - a_1)\} l^{-1}]}{\sin [\pi (d a_1' - d a_1) l^{-1}]} \times$$

$$\sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{2}(a_2' - a_2) + \frac{1}{2}(a_1' - a_1)}{l}\right].$$

Ganz ebenso werden sich bilden die Interferenzoscillationen für die folgenden Elementarreihen parallel der AB.

Die letzte dieser Reihen giebt, wenn nun $d a'$, $d a$ für $d a_1$, $d a_1$ steht:

$$\sum U_r^{(m+1)} = V \frac{\sin [\pi ((a_4' - a_4) - (a_3' - a_3)) l^{-1}]}{\sin [\pi (d a' - d a) l^{-1}]} \times$$

$$\sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{2}(a_4' - a_4) + \frac{1}{2}(a_3' - a_3)}{l}\right].$$

Um schliesslich die Resultante dieser Summen zu finden, ist nur zu bedenken, dass die in denselben vorkommenden $(m + 1)$ Grössen, von denen

die erste $a_2' - a_2 - (a_1' - a_1)$, die letzte $(a_4' - a_4) - (a_3' - a_3)$ ist, eine arithmetische Progression bilden, deren Differenz

$$\frac{(a_4' - a_4) - (a_3' - a_3) - (a_2' - a_2) + (a_1' - a_1)}{m + 1} \text{ ist.}$$

Dasselbe gilt von den Grössen, deren erstes Glied $\frac{1}{2}(a_2' - a_2) - \frac{1}{2}(a_1' - a_1)$ und deren letztes $\frac{1}{2}(a_4' - a_4) - \frac{1}{2}(a_3' - a_3)$ ist.

Die Differenz dieser Reihe ist

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(a_4' - a_4) - (a_3' - a_3) - (a_2' - a_2) + (a_1' - a_1)}{m + 1}\right].$$

Die Resultante ergiebt sich dann nach § 226 D., wenn wir setzen

$$\delta = \frac{\pi}{m+1}\left[(a_4' - a_4) - (a_3' - a_3) - (a_2' - a_2) + (a_1' - a_1)\right],$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{m+1}\left[(a_4' - a_4) + (a_3' - a_3) - (a_2' - a_2) - (a_1' - a_1)\right],$$

$$V = \frac{V}{\sin[\pi(d a' - d a) l^{-1}]},$$

$$a = \pi\,[(a_2' - a_2) - (a_1' - a_1)]\, l^{-1},$$

$$\gamma = \pi\,[(a_2' - a_2) + (a_1' - a_1)]\, l^{-1},$$

$$\frac{\varepsilon + \delta}{2} = \frac{\pi}{m+1}\left[(a_4' - a_4) - (a_2' - a_2)\right],$$

$$\frac{\varepsilon - \delta}{2} = \frac{\pi}{m+1}\left[(a_3' - a_3) - (a_1' - a_1)\right],$$

wenn wir statt des sin. der unendlich kleinen Bögen

$$\pi\frac{d a' - d a}{l}, \quad \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \delta), \quad \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta)$$

die Bögen selbst nehmen und abgekürzt setzen

$$(a_u' - a_u) \pm (a_v' - a_v) \pm \ldots = a^{(u \pm v \pm \ldots)},$$

$$\Sigma v_r = \tfrac{1}{2} V \frac{m+1}{\pi(d a' - d a) l^{-1}} \left\{\frac{\sin[\pi a^{(4-2)} l^{-1}]}{\pi a^{(4-2)} l^{-1}} \sin[\pi a^{(4+2)} l^{-1}] - \frac{\sin[\pi a^{(3-1)} l^{-1}]}{\pi a^{(3-1)} l^{-1}} \sin[\pi a^{(3+1)} l^{-1}]\right\},$$

$$\Sigma v_r' = \tfrac{1}{2} V \frac{m+1}{\pi(d a' - d a) l^{-1}} \left\{\frac{\sin[\pi a^{(4-2)} l^{-1}]}{\pi a^{(4-2)} l^{-1}} \cos[\pi a^{(4+2)} l^{-1}] + \frac{\sin[\pi a^{(3-1)} l^{-1}]}{\pi a^{(3-1)} l^{-1}} \cos[\pi a^{(3+1)} l^{-1}]\right\}.$$

Nennen wir 1 die Vibrationsintensität des gesammten senkrecht durch die ganze Oeffnung hindurchgehenden Lichtes, so ist dieselbe, wenn der Schirm den Winkel χ mit der Normalebene bildet, $\cos\chi$.

Da ferner nach dem Vorigen die Anzahl der Elemente ist

$$\frac{(n+1)(m+1)}{2} \cdot \frac{AB + CD}{AB},$$

so ist
$$\cos\chi = \frac{(n+1)(m+1)}{2} \; \frac{AB + CD}{AB} \; V.$$

Da weiter
$$\frac{CD}{AB} = \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_1} = \frac{a_4' - a_2'}{a_2' - a_1'} \text{ ist,}$$

so erhält man
$$\cos\chi = \frac{(n+1)(m+1)}{2} \; \frac{(a_4 - a_3 + a_2 - a_1)}{a_2 - a_1} \; V$$
$$= \frac{(n+1)(m+1)}{2} \; \frac{(a_4' - a_3' + a_2' - a_1')}{a_2' - a_1'} \; V.$$

Berücksichtigt man dann, dass
$$a_2 - a_1 = (n+1)\, da, \quad a_2' - a_1' = (n+1)\, da' \text{ ist,}$$
so können aus den obigen Werthen von Σv_r und $\Sigma v_r'$ die Grössen m, da, da' entfernt werden. Es ergiebt sich nämlich:
$$\tfrac{1}{2} V \, \frac{m+1}{\pi (da' - da)\, \mathrm{l}^{-1}} = \frac{\cos\chi\, (a_2 - a_1)}{\pi [(a_4 - a_3) + (a_2 - a_1)]\, a^{(2-1)}\, \mathrm{l}^{-1}},$$
$$= \frac{\cos\chi\, (a_2' - a_1')}{\pi [(a_4' - a_3') + (a_2' - a_1')]\, a^{(2-1)}\, \mathrm{l}^{-1}}.$$

4. Die Beugungsöffnung ist ein Parallelogramm.

Die Formeln der vorigen Nummer vereinfachen sich, wenn die Oeffnung ein Parallelogramm ist; denn es ist dann
$$a_2 - a_1 = a_4 - a_3, \quad a_2' - a_1' = a_4' - a_3',$$
$$a_4 - a_2 = a_3 - a_1, \quad a_4' - a_2' = a_3' - a_1',$$
und in Folge dessen
$$a^{4-2} = a^{3-1}, \quad a^{4-3+2-1} = 2(a^{2-1}).$$

Dadurch gehen die Ausdrücke Σv_r, $\Sigma v_r'$ in die folgenden über:
$$\Sigma v_r = \frac{\cos\chi\, (a_2 - a_1)}{\pi [(a_4 - a_3) + (a_2 - a_1)]\, a^{2-1}} \; \frac{\sin [\pi a^{(3-1)}\, \mathrm{l}^{-1}]}{\pi a^{(3-1)}\, \mathrm{l}^{-1}} \left\{ \sin [\pi a^{(4+2)}\, \mathrm{l}^{-1}] - \sin [\pi a^{(3+1)}\, \mathrm{l}^{-1}] \right\},$$
$$\Sigma v_r' = \frac{\cos\chi\, (a_2 - a_1)}{\pi [(a_4 - a_3) + (a_2 - a_1)]\, a^{(2-1)}} \; \frac{\sin \pi a^{(3-1)}\, \mathrm{l}^{-1}}{\pi a^{(3-1)}\, \mathrm{l}^{-1}} \left\{ - \cos [\pi a^{(4+2)}\, \mathrm{l}^{-1}] + \cos [\pi a^{(3+1)}\, \mathrm{l}^{-1}] \right\}.$$

Nach den bekannten Formeln
$$\sin x - \sin y = 2 \cos \tfrac{1}{2}(x + y) \sin \tfrac{1}{2}(x - y),$$
$$- \cos x + \cos y = 2 \sin \tfrac{1}{2}(x + y) \sin \tfrac{1}{2}(x - y),$$
unter Berücksichtigung der obigen Beziehung erhält man daraus

$$\Sigma v_r = \frac{\cos\chi(a_2 - a_1)}{\pi[(a_4 - a_3) + (a_2 - a_1)]a^{(2-1)}} \frac{\sin\pi a^{(3-1)} l^{-1}}{\pi a^{(3-1)} l^{-1}} \sin\pi a^{(2-1)} l^{-1} \cos\tfrac{1}{2}\pi a^{(4+3+2+1)},$$

$$\Sigma v_r' = \frac{\cos\chi(a_2 - a_1)}{\pi[(a_4 - a_3) + (a_2 - a_1)]a^{(2-1)}} \frac{\sin\pi a^{(3-1)} l^{-1}}{\pi a^{(3-1)} l^{-1}} \sin\pi a^{(2-1)} l^{-1} \sin\tfrac{1}{2}\pi a^{(4+3+2+1)}.$$

Die für unsere Untersuchung nothwendige Formel für die Intensität ist darnach

$$I^2 = \Sigma v_r^2 + \Sigma v_r'^2,$$

$$= \frac{\cos^2\chi\,(a_2 - a_1)^2}{\pi^2[(a_4 - a_3) + (a_2 - a_1)]^2\,[a^{(2-1)}]^2} \frac{\sin^2\pi a^{(3-1)} l^{-1}}{\pi^2[a^{(3-1)} l^{-1}]^2} \sin^2\pi a^{(2-1)} l^{-1}.$$

Um nun die sich hieraus ergebende Beugungserscheinung finden zu können, ist es nöthig die Lage und Grösse der Oeffnung und die der Normalen zum gebeugten Strahl genauer zu bestimmen. Sei $AB = CD = a$, (Fig. 82), $AC = BD = b$. Die Verlängerung der Linie BA, AC bis zur z Axe bilden mit derselben die Winkel ϱ, φ, das Stück der Verlängerung von BA bis zur z Axe heisse β. Der Neigungswinkel der Schirmebene gegen die yz Ebene sei χ und gegen die Normalebene zum Beugungsstrahl ψ. Dann ist

Fig. 82.

$$a_1 = \beta \sin\varrho \sin\chi, \quad a_2 = (\beta + a)\sin\varrho \sin\chi,$$
$$a_3 = (\beta \sin\varrho - b \sin\varphi)\sin\chi, \quad a_4 = ([\beta + a]\sin\varrho - b\sin\varphi)\sin\chi.$$

Bezeichnen wir die diesen entsprechenden Grössen bezogen auf die zweite Normalebene mit β', ϱ', φ', so ist

$$a_1' = \beta' \sin\varrho' \sin\psi, \qquad a_2' = (\beta' + a)\sin\varrho' \sin\psi,$$
$$a_3' = (\beta' \sin\varrho' - b\sin\varphi')\sin\psi, \quad a_4' = ([\beta' + a]\sin\varrho' - b\sin\varphi')\sin\chi.$$

Die Einsetzung dieser Werthe giebt dann die weiter zu untersuchende Formel

$$I^2 = \cos^2\chi \,.\, \frac{\sin^2[\pi a(\sin\varrho' \sin\psi - \sin\varrho\sin\chi) l^{-1}]}{[\pi a(\sin\varrho'\sin\psi - \sin\varrho\sin\chi) l^{-1}]^2} \times$$
$$\frac{\sin^2[\pi b(\sin\varphi'\sin\psi - \sin\varphi\sin\chi) l^{-1}]}{[\pi b(\sin\varphi'\sin\psi - \sin\varphi\sin\chi) l^{-1}]^2},$$
$$= \cos^2\chi \,.\, i^2 \,.\, i'^2.$$

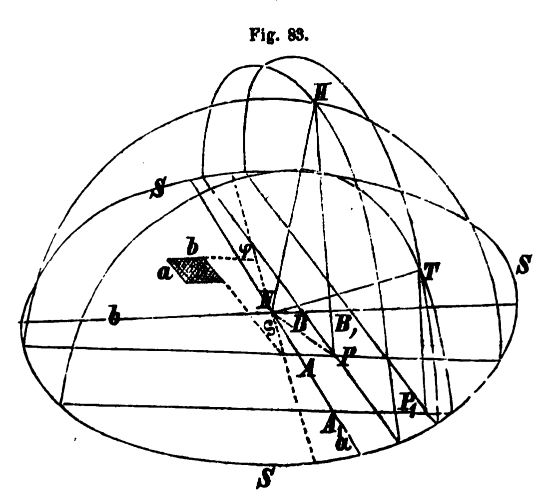
Die Ausdrücke i und i' entsprechen den in 1. entwickelten und gehen in diese über, wenn $\varrho' = \varrho = \varphi' = \varphi = 90^0$ ist. Dies kann als Controle für die Richtigkeit der obigen Formel betrachtet werden.

Um dieses Resultat in seiner vollständigen Allgemeinheit zu untersuchen, construiren wir die folgende Figur 83:

Ueber die Ebene des Schirmes S sei eine Halbkugel gezeichnet, deren Mittelpunkt N und deren Halbmesser $NH = NT$ die Brennweite des Objectives oder die Vereinigungsweite der Strahlen im Auge ist. Diese Kugeloberfläche ist dann der Ort der Erscheinung. N ist der optische Mittelpunkt,

NH, NT seien entsprechend der Figur 80 die Richtungen der directen und gebeugten Strahlen. Ziehen wir in der Ebene des Schirmes Na und Nb den Seiten a und b des Parallelogrammes parallel und legen durch H und T Ebenen senkrecht auf diese Linien, so wird durch dieselben die Kugel

Fig. 83.



geschnitten in zwei Kreisen, die einander parallel sind. Sei dann P die Projection von H auf den Schirm, so ist $\angle$ PNA $= 90^0 - (180^0 - \varrho) = \varrho - 90^0$, $\angle$ PNB $= 90^0 - \varphi$ und $\angle$ HNP $= 90^0 - \chi$, also

$$NP = NH \sin\chi, \; NA = NH \sin\chi \sin\varrho, \; NB = NH \sin\chi \sin\varphi.$$

Dem analog erhalten wir, wenn wir die dem A und B entsprechenden Punkte, welche zu T gehören, mit A_1 und B_1 bezeichnen,

$$NA_1 = NT \sin\varrho' \sin\psi, \quad NB_1 = NT \sin\varphi' \sin\psi.$$

Setzen wir ferner NH $=$ NT $= 1$, so ist dann

$$AA_1 = \sin\varrho' \sin\psi - \sin\varrho \sin\chi, \quad BB_1 = \sin\varphi' \sin\psi - \sin\varphi \sin\chi.$$

Diese Werthe in I^2 substituirt giebt:

$$I^2 = \cos^2\chi \cdot \frac{\sin^2[\pi a AA_1 l^{-1}]}{[\pi a AA_1 l^{-1}]^2} \cdot \frac{\sin^2[\pi b BB_1 l^{-1}]}{[\pi b \,.\, BB_1 l^{-1}]^2}.$$

Ist nun $AA_1 = BB_1 = 0$, so wird $I^2 = \cos^2\chi$, d. h. die Intensität des ungebeugten Lichtes ist, wie vorauszusehen war, unverändert.

I^2 ist $= 0$, wenn $i = 0$ oder $i' = 0$ wird. Diess tritt ein, wenn ist

$$\pi a AA_1 l^{-1} = \pm n\pi, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\pi b BB_1 l^{-1} = \pm n\pi, \; n = 0, 1, 2 \ldots \quad \text{oder}$$

$$AA_1 = \pm n\pi \frac{l}{a},$$

$$BB_1 = \pm n\pi \frac{l}{b}.$$

Das Licht verschwindet demnach auf den Kreisen, in denen die Halbkugel geschnitten wird von Ebenen senkrecht zu den Linien a und b des

Parallelogrammes in den Abständen $\pi \frac{1}{a}$ und $\pi \frac{1}{b}$ von einander und zwar an keinem anderen Punkte, denn I^2 als Product kann nur verschwinden, wenn ein Factor Null wird. Es ist demnach das Beugungsbild von zwei Systemen dunkler unter einander parallelen Geraden durchzogen, die senkrecht zu den Seiten des Parallelogrammes sind.

Setzen wir nun statt des sin. seine Reihe, d. h.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \ldots, \text{ also dann}$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{1.3} + \frac{x^6}{(1.2.3)^2} \ldots$$

und brechen, da ψ nur kleine Winkel sind, diese Reihe bei $\frac{x^4}{1.3}$ ab, so ist

$$I^2 = \cos^2\chi \left[1 - \frac{\pi^2 a^2 AA_1^{\,2} l^{-2}}{1.3}\right] \left[1 - \frac{\pi^2 b^2 BB_1^{\,2} l^{-2}}{1.3}\right].$$

Hieraus erkennt man leicht, dass die Intensität von der Mitte aus abnimmt, dass sie für $AA_1 = 0$ und $BB_1 = 0$ am grössten ist und dass sie demnach für die beiden Fälle AA_1 allein $= 0$ und BB_1 allein $= 0$ noch besonders gross bleibt. Das Bild wird darnach gebildet von farbigen Spectren, die begrenzt werden durch dunkle Streifen, die parallel sind der Senkrechten auf den Seiten des beugenden Parallelogrammes. Die Intensität der Spectren ist am grössten zwischen den dunklen Linien, die das nicht gebeugte Licht begrenzen. An den Stellen zwischen diesem Kreuze ist die Intensität nur schwach, da daselbst weder AA_1 noch BB_1 verschwindet.

Es ist nun nicht schwer das Bild zu bestimmen, wenn statt des beliebig genommenen Parallelogrammes die Beugungsöffnung ein Rechteck, Quadrat Rhombus wird.

Ist $\chi = 0$, also der Schirm normal zur Visirlinie, und ausserdem $\varrho = 90^\circ$, so ist einfacher

$$AA_1 = \sin\varrho' \sin\psi \text{ und } BB_1 = \sin\varphi' \sin\psi.$$

In Bezug auf die Symmetrie des Bildes gilt dann, wie immer in den folgenden Figuren, die zum Schluss von 2. gemachte Bemerkung.

5. Die Beugungsöffnung ist ein Dreieck.

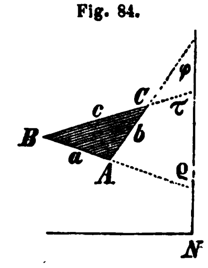


Fig. 84.

Nach den Bezeichnungen von 3. wird, da hier die beiden Punkte des Paralleltrapezes C und D in einem C (Fig. 84) zusammenfallen,

$$a_4 = a_3 = \alpha, \quad a'_4 = a'_3 = \alpha'.$$

Es ist demnach

$$\frac{1}{4}V \cdot \frac{m+1}{\pi(d a' - d a) l^{-1}} = \frac{\cos\chi}{\pi a^{(2-1)} l^{-1}}$$

und

$$I^2 = \Sigma v_r^2 + \Sigma v_r'^2$$
$$= \frac{\cos^2\chi}{[\pi a^{(2-1)} l^{-1}]^2} \left\{ \frac{\sin^2[\pi a^{(4-2)} l^{-1}]}{[\pi a^{(4-2)} l^{-1}]^2} + \frac{\sin^2[\pi a^{(3-1)} l^{-1}]}{[\pi a^{(3-1)} l^{-1}]^2} \right.$$
$$\left. - 2 \frac{\sin[\pi a^{(4-2)} l^{-1}]}{\pi a^{(4-2)} l^{-1}} \cdot \frac{\sin[\pi a^{(3-1)} l^{-1}]}{\pi a^{(3-1)} l^{-1}} \cdot \cos[\pi a^{(4-3+2-1)} l^{-1}] \right\}.$$

Behalten wir die Bezeichnungen von 4. bei, setzen ausserdem die Seite $BC = c$ und nennen τ, τ' die Winkel, welche diese Seite mit der betreffenden Schnittlinie in der Normalebene bildet, so gilt

$$a_1 = \beta \sin\varrho \sin\chi,$$
$$a_2 = (\beta + a) \sin\varrho \sin\chi,$$
$$a_3 = [(\beta + a)\sin\varrho - c\sin\tau]\sin\chi = [\beta\sin\varrho - b\sin\varphi]\sin\chi,$$

mithin

$$a_2 - a_1 = a\sin\varrho\sin\chi, \quad a_4 - a_2 = c\sin\tau\sin\chi, \quad a_3 - a_1 = b\sin\varphi\sin\chi,$$

und dem entsprechend

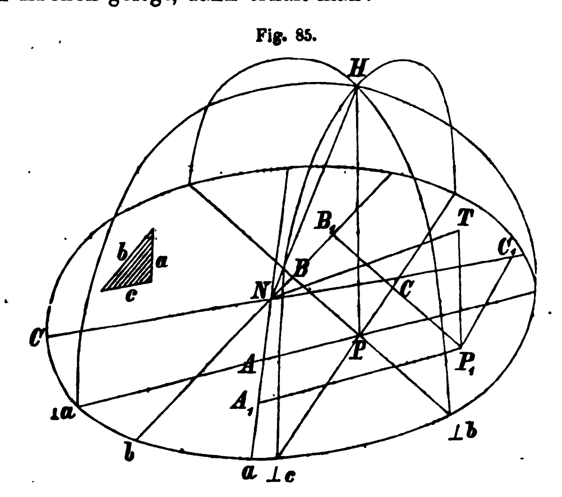
$$a_2' - a_1' = a\sin\varrho'\sin\psi, \; a_4' - a_2' = c\sin\tau'\sin\psi, \; a_3' - a_1' = b\sin\varphi'\sin\psi.$$

Daraus findet man

$$a^{(4-2)} = c(\sin\tau'\sin\psi - \sin\tau\sin\chi),$$
$$a^{(2-1)} = a(\sin\varrho'\sin\psi - \sin\varrho\sin\chi),$$
$$a^{(3-1)} = b(\sin\varphi'\sin\psi - \sin\varphi\sin\chi),$$
$$a^{(4-3+2-1)} = a^{(2-1)}.$$

Statt dieser Werthe setzen wir andere ein, die durch eine der vorigen Nummer entsprechende Zeichnung (Fig. 85) gefunden werden. Auf der Schirmebene ziehen wir durch N drei den Seiten a, b, c parallele Linien, die heissen Na, Nb, Nc. Durch H und T werden die zu den Parallelen senkrechten Ebenen gelegt, dann erhält man:

Fig. 85.



$$NA = \sin\varrho\sin\chi, \quad NA_1 = \sin\varrho'\sin\psi, \quad AA_1 = \sin\varrho'\sin\psi - \sin\varrho\sin\chi.$$
$$NB = \sin\varphi\sin\chi, \quad NB_1 = \sin\varphi'\sin\psi, \quad BB_1 = \sin\varphi'\sin\psi - \sin\varphi\sin\chi.$$
$$NC = \sin\tau\sin\chi, \quad NC_1 = \sin\tau'\sin\psi, \quad CC_1 = \sin\tau'\sin\psi - \sin\tau\sin\chi.$$

Die Einführung dieser Werthe giebt

$$I^2 = \frac{\cos^2\chi}{[\pi a\, AA_1\, l^{-1}]^2} \left\{ \frac{\sin^2[\pi c\, CC_1\, l^{-1}]}{[\pi c\, CC_1\, l^{-1}]^2} + \frac{\sin^2[\pi b\, BB_1\, l^{-1}]}{\pi b\, BB_1\, l^{-1}]^2} \right.$$
$$\left. - 2\frac{\sin[\pi c\, CC^1\, l^{-1}]}{\pi c\, CC_1\, l^{-1}} \cdot \frac{\sin[\pi b\, BB_1\, l^{-1}]}{[\pi b\, BB_1\, l^{-1}]} \cos[\pi a\, AA_1\, l^{-1}]. \right.$$

Ist nun $CC_1 = BB_1 = 0$ und damit $AA_1 = 0$, so erhalten wir den Werth I^2, indem wir für kleine Winkel x setzen

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}x^3, \quad \cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Dann lässt sich I^2 schreiben

$$I^2 = \frac{\cos^2\chi}{x^2}\left[(1 - \tfrac{1}{6}x^2)^2 + (1 - \tfrac{1}{6}x^2)^2 - 2(1 - \tfrac{1}{6}x^2)(1 - \tfrac{1}{6}x^2)(1 - \tfrac{1}{2}x^2\right]$$
$$= \frac{\cos^2\chi}{x^2}[x^2] = \cos^2\chi.$$

Dieser Werth war zu erwarten, denn dann haben wir den ungebeugten Lichtstrahl.

1) Setzen wir $CC_1 = 0$, so ist

$$I_c^2 = \frac{\cos^2\chi}{[\pi a\, AA_1\, l^{-1}]^2}\left\{1 + \frac{\sin^2[\pi b\, BB_1\, l^{-1}]}{[\pi b\, BB_1\, l^{-1}]^2} - 2\frac{\sin[\pi b\, BB_1\, l^{-1}]}{\pi b\, BB_1\, l^{-1}} \times \right.$$
$$\left. \cos[\pi a\, AA_1\, l^{-1}]\right\}.$$

2) $BB_1 = 0$, so ist

$$I_b^2 = \frac{\cos^2\chi}{[\pi a\, AA_1\, l^{-1}]}\left\{\frac{\sin^2[\pi c\, CC_1\, l^{-1}]}{[\pi c\, CC_1\, l^{-1}]^2} + 1 - 2\frac{\sin[\pi c\, CC_1\, l^{-1}]}{[\pi c\, CC_1\, l^{-1}]} \times \right.$$
$$\left. \cos[\pi a\, AA_1\, l^{-1}]\right\}.$$

3) $AA_1 = 0$, so können wir I_a^2 unter folgende Form bringen:

$$I_a^2 = \frac{\cos^2\chi}{[\pi a\, AA_1\, l^{-1}]^2}\left[\frac{\sin[\pi c\, CC_1\, l^{-1}]}{\pi c\, CC_1\, l^{-1}} - \frac{\sin[\pi b\, BB_1\, l^{-1}]}{\pi b\, BB_1\, l^{-1}}\right].$$

Es soll zunächst nachgewiesen werden, dass diese Ausdrücke nie 0 werden können, dass also auf den drei Linien, welche senkrecht zu den Seiten des Dreiecks sind, das Licht nie verschwinden kann.

Die Parenthesen haben die Form $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos c$. Es kann demnach jede der Parenthesen gedeutet werden als das Quadrat der dritten Seite eines Dreiecks, dessen andere Seiten α, β, den Winkel c einschliessen.

Nun kann aber eine solche dritte Seite eines Dreiecks nur dann verschwinden, wenn entweder a) $\alpha = \beta$, $c = 0$ oder b) $\alpha = \beta = 0$, was überhaupt hier nicht möglich ist, da $\alpha = 1$ ist. Die Bedingung a) wird für I_c erfordern $BB_1 = 0$. Dann wird aber, weil $CC_1 = 0$ ist, nothwendig auch $AA_1 = 0$, der Strahl überhaupt nicht gebeugt, also I_c kann nicht gleich Null werden.

Für I_b müsste nach Bedingung a) für $I_b = 0$ sein $CC_1 = 0$, also wiederum, damit $BB_1 = 0$ auch $AA_1 = 0$, giebt es hier überhaupt keine Beugung. Die Bedingung b) kann hier auch nicht angewendet werden. Bei

I_a kann ein Verschwinden nach der Form des Ausdrucks nicht gedacht werden.

Dieselben Bemerkungen auf den allgemeinen Ausdruck I^2 übertragen, geben dann, wenn dunkle Punkte gesucht werden, da AA_1 wegen der Form I_a nicht $= 0$ gesetzt werden kann, nach der Bedingung b) die Orte für $I = 0$, wenn gleichzeitig gesetzt wird

$$\frac{\sin[\pi c\, CC_1\, l^{-1}]}{\pi c\, CC_1\, l^{-1}} = 0\ ,\quad \frac{\sin[\pi b\, BB_1\, l^{-1}]}{\pi b\, BB_1\, l^{-4}} = 0.$$

Für $I = 0$ muss also gleichzeitig sein

$$\pi c\, CC_1\, l^{-1} = \pm\, n\pi\ ,\quad \pi b\, BB_1\, l^{-1} = \pm\, m\pi$$

oder

$$CC_1 = \pm\,\frac{nl}{c}\ ,\quad BB_1 = \pm\,\frac{ml}{c}.$$

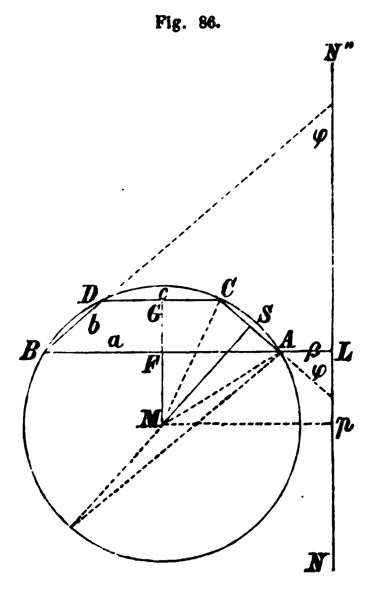
Dunkle Stellen giebt es also nur an einzelnen Punkten.

Beachten wir ferner, dass die I_c, I_b, I_a relative Max. sind im Vergleich zu den Werthen von I^2, die man erhält, wenn man CC_1, BB_1, AA_1 zunehmen lässt, wie man durch eine einfache Rechnung erhält, so wird man Folgendes finden:

Das Bild besteht aus einem sechsseitigen ganz hellen Stern, auf dessen Seiten die Intensität, vom Scheitelpunkt an gerechnet, nach den Formeln I_c, I_b, I_a, abnimmt. Ferner ist die ganze Erscheinung unterbrochen von dunklen Punkten, die auf Streifen liegen, welche dem Stern parallel sind. Nirgends ist sonst vollkommene Dunkelheit.

6. Die Beugungsöffnung ist ein Kreis.

Fig. 86.



Um eine kreisförmige Oeffnung für die directen Strahlen zu behalten, müssen wir annehmen, dass dieselben senkrecht auf die Schirmebene fallen. Unter dieser Annahme verschwinden alle die Entfernungen, die im Obigen mit einem a, welches nur einen unteren Index hat, bezeichnet sind, ferner ist $\chi = 0$.

Den Kreis denken wir uns zunächst als ein solches regelmässiges Vieleck, das wir in lauter symmetrische Paralleltrapeze zerlegen können, deren parallele Seiten senkrecht zur Schnittlinie NN'' der Schirmebene mit der Beugungsebene stehen.

Uebertragen wir darnach zunächst die Formeln von 3. auf $ABDC$ (Fig. 86).

Es ist mit Hülfe der an der Figur angegebenen, dem Früheren entsprechenden Bezeichnung

$$a_1' = \beta \sin\psi, \qquad a_3' = (\beta + b \sin\varphi) \sin\psi,$$
$$a_2' = (\beta + a) \sin\psi, \quad a_4' = (\beta + a - b \sin\varphi) \sin\psi, \text{ also}$$
$$a_4' - a_2' = a_3' - a_1' = - b \sin\varphi \sin\psi = a^{(4-2)} = a^{(3-1)},$$
$$a_4' + a_2' = (2[\beta + a] - b \sin\varphi) \sin\psi \; a^{(4+2)}$$
$$a_3' + a_1' = [2\beta + b \sin\varphi] \sin\psi = a^{(3+1)},$$
$$a_2' - a_1' = a \sin\psi = a^{(2-1)} = a_4' - a_3'.$$

Setzen wir diese Werthe in 3. ein, so erhalten wir mit Benutzung der in 4. gebrauchten trigonometrischen Formeln

$$\Sigma v_r = \frac{A}{\pi (a - b \sin\varphi) \sin\psi\, l^{-1}} : \frac{\sin[\pi b \sin\varphi \sin\psi]\, l^{-1}}{\pi b \sin\varphi \sin\psi\, l^{-1}} \times$$
$$\sin[\pi (a - b \sin\varphi) \sin\psi\, l^{-1}] \cos[\pi (2\beta + a) \sin\psi\, l^{-1}],$$
$$\Sigma v_r' = \frac{A}{\pi (a - b \sin\varphi) \sin\psi\, l^{-1}} \cdot \frac{\sin[\pi b \sin\varphi \sin\psi\, l^{-1}]}{\pi b \sin\varphi \sin\psi\, l^{-1}} \times$$
$$\sin[\pi (a - b \sin\varphi) \sin\psi\, l^{-1}] \sin[\pi (2\beta + a) \sin\psi\, l^{-1}],$$

wo nur noch der Factor A hinzugefügt ist, der bedeutet die Vibrationsintensität des durch die trapezförmige Oeffnung gehenden Lichtes, für den im Obigen 1 gesetzt ist.

Mit Benutzung dieser Werthe ergiebt sich

$$I^2 = (\Sigma v_r)^2 + (\Sigma v_r')^2$$
$$= A^2 \frac{\sin^2[\pi b \sin\varphi \sin\psi\, l^{-1}]}{[\pi b \sin\varphi \sin\psi\, l^{-1}]^2} \cdot \frac{\sin^2[\pi (a - b \sin\varphi) \sin\psi\, l^{-1}]}{[\pi (a - b \sin\varphi) \sin\psi\, l^{-1}]^2}.$$

Statt der Grössen A, b, a sollen nur Grössen eingesetzt werden, die sich auf den Kreis oder vielmehr auf das Vieleck beziehen. Bezeichnen wir mit 1 die Vibrationsintensität des Lichtes durch den ganzen Kreis, so ist zunächst nach den auf der Figur zu ersehenden Bezeichnungen

$$A = 1 \,.\, \frac{\frac{1}{2}(a + c)\, FG}{\pi r^2}.$$

Nennen wir n die Anzahl der Ecken des regelmässigen Vielecks, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\angle SM\mu = \varphi, \; \angle SMA = \frac{\pi}{n}, \; \angle AM\mu = \angle MAF = \varphi - \frac{\pi}{n},$$
$$a = 2r \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{n}\right), \; b = 2r \sin \angle SMA = 2r \sin\frac{\pi}{n}, \; c = a - 2b \sin\varphi.$$

Die Einsetzung dieser Werthe in die Formel für I^2 giebt

$$I^2 = \frac{16}{\pi^2} \cos^2\varphi \sin^2\frac{\pi}{n} \,.\, \cos^2\frac{\pi}{n} \frac{\sin^2[\pi \,.\, 2r \sin(\pi : n) \sin\varphi \sin\psi\, l^{-1}]}{[\pi \,.\, 2r \sin(\pi : n) \sin\varphi \sin\psi\, l^{-1}]^2} \times$$
$$\frac{\sin^2[\pi \,.\, 2r \cos(\pi : n) \cos\varphi \sin\psi\, l^{-1}]}{[\pi \,.\, 2r \cos(\pi : n) \cos\varphi \sin\psi\, l^{-1}]^2}.$$

Will man daraus die Gesammtintensität berechnen, so ist nur nöthig, diese Werthe für alle φ zu addiren. Die numerische Rechnung für irgend ein n giebt dann die Entfernung der dunklen Ringe von einander; denn dass wir dunkle concentrische Ringe finden müssen, ist selbstverständlich. Die hier in Formel angedeutete Rechnung ist von Schwerd für $n = 180$ ausgeführt worden.

7. Thorie der Beugung nach Fresnel.

Wenn auch im Vorhergehenden die hauptsächlichsten Beugungserscheinungen theoretisch erörtert sind, so erübrigt doch noch hier anzuführen die Theorie derselben, wie sie von Fresnel*) zuerst gegeben worden ist für den Fall, dass der leuchtende Punkt nicht unendlich weit entfernt ist.

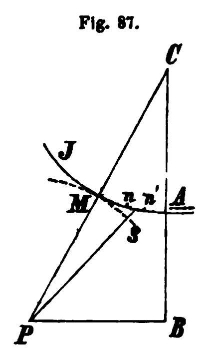


Fig. 87.

Bedeute C (Fig. 87) den leuchtenden Punkt und A die Projection der einen Kante eines undurchsichtigen Schirmes, dessen Grenze nach der anderen Seite so weit von C entfernt ist, dass sie unberücksichtigt bleiben kann. Hinter diesem Schirme befinde sich die Ebene, auf der die Lichtwellen aufgefangen werden. Es sei $CA = a$, $AB = b$. Wir nehmen nun zuerst nach Fresnel nicht Rücksicht auf eine andere Dimension, als die der Figurebene, so dass wir also als Wellenfigur Kreise nehmen, deren Mittelpunkte in C liegen, und untersuchen die Interferenz in einem Punkte P, dessen Abstand von B mit ξ bezeichnet werde. M sei der Punkt, in dem die Welle, welche an A ankommt, von der Linie CP geschnitten wird. Wir zeichnen nun um P mit einem Halbmesser gleich PM einen Kreis, der die ankommende Welle vorstellt, theilen die Welle AMI in kleine Stücke von der Grösse dx und bezeichnen die Entfernungen eines solchen Theiles von M nach rechts mit $+x$ und nach links mit $-x$. In P kommen dann zur Interferenz alle Wellen, deren Phasen die betreffenden ns sind, also Schwingungen, die bestimmt sind durch Ausdrücke von der folgenden Form:

$$dx \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{ns}{l}\right).$$

Nach § 226, S. 143 können wir statt dessen setzen:

$$v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T}\right) \text{ und } - v_1 \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

wo

$$v = dx \cos 2\pi \frac{ns}{l}, \quad v_1 = dx \sin 2\pi \frac{ns}{l}$$

*) Pogg. Ann. 30.: „Ueber die Diffraction des Lichtes." Gehlers Wörterbuch „Undulation" p. 1413, von Littrow.

ist, so dass also die Oscillationsgeschwindigkeit dieses einen Wellenstrahles gegeben ist durch

$$\sqrt{\left(dx \cos 2\pi \frac{ns}{l}\right)^2 + \left(dx \sin 2\pi \frac{ns}{l}\right)^2}.$$

Die Oscillationsgeschwindigkeit der sämmtlichen in P zusammentreffenden Wellen ist demnach

$$\sqrt{\left[\int_{MA}^{-\infty} dx \cos 2\pi \frac{ns}{l}\right]^2 + \left[\int_{MA}^{-\infty} dx \sin 2\pi \frac{ns}{t}\right]^2}.$$

Die Intensität des Lichtes ist also dann

$$\left[\int_{MA}^{-\infty} dx \cos 2\pi \frac{ns}{l}\right]^2 + \left[\int_{MA}^{-\infty} dx \sin 2\pi \frac{ns}{l}\right]^2.$$

Da wir näherungsweise setzen können

$$ns = \frac{Mn^2}{2a} + \frac{Ms^2}{2MP} = \frac{x^2}{2a} + \frac{x^2}{2b} = \tfrac{1}{2} x^2 \frac{a+b}{ab},$$

so ist unsere nächste Aufgabe, zu berechnen

$$\int dx \cos \pi \frac{x^2(a+b)}{abl} \text{ und } \int dx \sin \pi \frac{x^2(a+b)}{abl}.$$

Setzen wir

$$\frac{x^2(a+b)}{abl} = \tfrac{1}{2} s^2, \text{ also } dx = ds \sqrt{\frac{abl}{2(a+b)}},$$

so wird es sich nun handeln um die Integrale

$$\int ds \cos(\tfrac{1}{2}\pi s^2), \quad \int ds \sin(\tfrac{1}{2}\pi s^2),$$

deren obere Grenze $-\infty$ bleibt, während die untere wird

$$MA \sqrt{\frac{2(a+b)}{abl}}.$$

Ein Theil unserer Integrale ist bekannt, es ist nämlich

$$\int_0^{-\infty} ds \cos(\tfrac{1}{2}\pi s^2) = \int_0^{-\infty} ds \sin(\tfrac{1}{2}\pi s^2) = \tfrac{1}{2}.$$

Den noch übrigen Theil berechnet Fresnel durch Näherung und zwar wie folgt. Hat man $U = \int S ds$, so hat man für die beiden Werthe von U, die zu $s+h$ und zu $s-h$ gehören, nach dem Taylor'schen Lehrsatz

$$U + \frac{\partial U}{\partial s} h + \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{\partial^3 U}{\partial s^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \dots \text{ und}$$

$$U - \frac{\partial U}{\partial s} h + \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} - \frac{\partial^3 U}{\partial s^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \dots$$

Mithin

$$\int_{s-h}^{s+h} S ds = 2 \frac{\partial U}{\partial s} h + 2 \frac{\partial^3 U}{\partial s^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \dots,$$

$$= 2 S . h + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} \frac{h^3}{1.2.3} + \dots.$$

Nimmt man nun die beiden Grenzen $s + h$ und $s - h$ nur wenig verschieden, also h sehr klein, so genügt bei einer numerischen Rechnung das erste oder wenigstens die beiden ersten Glieder des letzten Ausdrucks. Auf diese Art hat Fresnel eine Tafel der Integrale berechnet zwischen den Grenzen 0 bis 0,1 0,2, 0,3 bis 5,5. Um nun mittelst dieser Tafel die Lichtstärke zu finden, für eine gegebene Lage des Punktes P, muss man das dem P entsprechende x berechnen nach der Proportion $\xi : x = a + b : a$ und dann das diesem x zugehörige s. Man nimmt dann aus der Tabelle die für diese Grösse berechneten Integralwerthe, vermehrt sie um $\frac{1}{2}$, addirt die Quadrate der so erhaltenen Zahlen und multiplicirt dann mit $\frac{abl}{2(a+b)}$; denn es ist nach dem Obigen

$$\left[\int dx \cos\pi \frac{x^2(a+b)}{abl}\right]^2 + \left[\int dx \sin\pi \frac{x^2(a+b)}{abl}\right]^2 = \frac{abl}{2(a+b)} \times \left\{\left[\int ds \cos(\tfrac{1}{2}\pi s^2)\right]^2 + \left[\int d s \sin(\tfrac{1}{2}\pi s^2)\right]^2\right\}.$$

8. Anwendung der obigen Formeln für eine schmale Oeffnung.

Die Intensität des Lichtes in P (die Figur 88 ist nach dem Obigen klar) ist

$$\left[\int_{MG}^{-MA} dx \cos\left(\pi \frac{x^2(a+b)}{abl}\right)\right]^2 + \left[\int_{MG}^{-MA} dx \sin\left(\pi \frac{x^2(a+b)}{abl}\right)\right]^2.$$

Nach der oben erwähnten Tafel berechnet man darnach für gegebene ξ die Intensität, nur hat man noch zu achten darauf, ob P so liegt, dass man M zwischen A und G oder ausserhalb A und G hat.

Fig. 88.

Wollte man noch die Länge der betreffenden Oeffnung berücksichtigen, so hätte man oben zu schreiben als Intensität

$$\left[\iint dx\, dy \cos 2\pi \frac{ns}{l}\right]^2 + \left[\iint dx\, dy \cos 2\pi \frac{ns}{l}\right]^2$$

und darnach ns zu bestimmen.

Die angedeutete Integration kann aber nur benutzt werden mit Zugrundelegung der erwähnten Tafel bei einfachen Figuren, wie Kreis, Rechteck.

Die Ausführung für eine kreisförmige Oeffnung wird nun wie folgt vorgenommen:

Man theile den Kreis in unendlich viele concentrische Ringe und nenne den inneren Halbmesser eines dieser Ringe r und den äusseren $r + dr$, so dass also für kleine dr dessen Oberfläche $2\pi r\, dr$ ist. Nach der ersten oben

angegebenen Formel ist dann die Vibration des Lichtes von einem solchen kleinen Ring bestimmt durch

$$2\pi r\, dr \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{ns}{l}\right)=2\pi r\, dr \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\tfrac{1}{2}r^2\,\frac{a+b}{abl}\right).$$

Mithin ist die Schwingung im Mittelpunkt diejenige, welche hervorgebracht wird von der Gesammtheit dieser Ringe. Ist demnach R der Halbmesser der Oeffnung, so ist die Schwingung im Centralpunkt bestimmt durch

$$\int\limits_0^R 2\pi r\, dr \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\tfrac{1}{2}r^2\,\frac{a+b}{abl}\right)$$

$$=\frac{2abl}{a+b}\sin 2\pi R^2\,\frac{a+b}{4abl}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-R^2\,\frac{a+b}{4abl}\right).$$

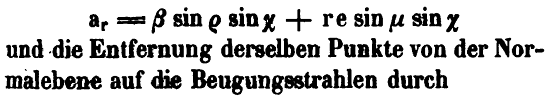
Die Intensität des Lichtes im Mittelpunkt ist daher

$$I=4\left(\frac{abl}{a+b}\right)^2\sin^2\left(\pi R_J^2\,\frac{a+b}{2abl}\right).$$

Beugung durch ein Stabgitter. (§ 371.)

1. Allgemeine Gleichung für die Beugung durch eine Reihe congruenter und gleichweit von einander entfernter Oeffnungen.

Seien A, A′, A″ (Fig. 89) die sich entsprechenden Eckpunkte der n + 1 Oeffnungen, deren gegenseitige Entfernung e ist, und sei μ der Winkel der Verbindungslinie dieser Punkte mit NN′, so ist die Entfernung dieser Punkte von der Normalebene der einfallenden Strahlen unter Beibehaltung der Bezeichnung des vorigen Paragraphen allgemein durch



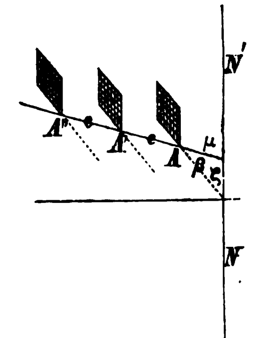
$$a_r=\beta\sin\varrho\sin\chi+re\sin\mu\sin\chi$$

und die Entfernung derselben Punkte von der Normalebene auf die Beugungsstrahlen durch

$$a_r=\beta'\sin\varrho'\sin\psi+re\sin\mu'\sin\psi$$

ausgedrückt, wo für die verschiedenen Oeffnungen r alle Werthe von 0 bis n hat.

Fig. 89.



Da nun alle Oeffnungen einander congruent sein sollen und die einfallenden sowie die gebeugten Strahlen alle einander parallel sind, so sind die Resultanten aller Strahlenbündel durch die einzelnen Oeffnungen einander gleich und eine Verschiedenheit kann nur in Bezug auf den Gang stattfinden. Dieser Unteschied hängt ab von dem der Wege, welche die entsprechenden Elemente der verschiedenen Strahlenbündel von der Normalebene der directen bis zu der der gebeugten Strahlen zurückzulegen haben.

Diese Unterschiede sind

$$(a'_r - a'_1) - (a_r - a_1) = r\,e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi).$$

Ist nun die Resultante des ersten Strahlenbündels in der Normalebene des gebeugten Strahles

$$U_1 = V \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right) - i\right) = V \sin(\alpha - i),$$

so haben die Resultanten der übrigen Strahlenbündel in derselben Ebene folgende allgemeine Form:

$$U_r = V \sin\left[\alpha - i - r\,2\pi e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)\,l^{-1}\right]$$
$$= V\left[\sin\alpha - i - r\varepsilon\right],$$

wenn $\varepsilon = 2\pi e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)\,l^{-1}$ gesetzt wird.

Diese sämmtlichen Resultanten haben dasselbe V und ihre gleichzeitigen Phasen bilden eine arithmetische Progression, mithin ist nach § 226. C.

$$\sum U_r = V \frac{\sin\left[(n+1)\pi e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)\,l^{-1}\right]}{\sin\left[\pi e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)\,l^{-1}\right]} \sin\left(\alpha - i - \frac{n}{2}\varepsilon\right).$$

Die Intensität des gebeugten Lichtes aller n + 1 Oeffnungen ist daher

$$I^2 = V^2 \frac{\sin^2\left[(n+1)\pi e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)\,l^{-1}\right]}{\sin^2\left[\pi e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)\,l^{-1}\right]},$$

wo nun V^2 die Intensität des gebeugten Lichtes einer einzigen Oeffnung darstellt.

Das I^2 kann auf folgende Form gebracht werden

$$I^2 = (n+1)^2 V^2 \frac{\sin^2\left[(n+1)\pi e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)\,l^{-1}\right]}{(n+1)^2 \sin^2\left[\pi e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)\,l^{-1}\right]}.$$

In diesem Ausdruck ist $[(n+1)\,V]^2$ die Intensität des Lichtes durch eine Oeffnung mit dem Quadrat der Anzahl der Oeffnungen und kann also angesehen werden als die durch die Anzahl der Oeffnungen verstärkte Intensität des gebeugten Lichtes einer einzigen Oeffnung.

Der zweite Factor, der nun mit P^2 bezeichnet werde, enthält nichts, was sich auf die Gestalt und Grösse der Oeffnungen bezieht, sondern ist nur abhängig von der Anzahl und Lage der Oeffnungen, gilt demnach für eine Reihe von Oeffnungen von einer beliebigen Gestalt und Grösse. Der erste Factor bildet also die Grundlage des Bildes, der zweite wird nur dieses Bild verändern, indem er an bestimmten Stellen die dem ersten Factor entsprechende Lichtmenge entweder nur vermindert oder ganz aufhebt.

2. Die Untersuchung des Factors P^2.

Die Aenderung des ursprünglichen Bildes ist nach der vorigen Nummer abhängig von dem Factor von I^2, d. i. von

$$P^2 = \frac{\sin^2\left[(n+1)\pi e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)\,l^{-1}\right]}{(n+1)^2 \sin^2\left[\pi e\,(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)\,l^{-1}\right]}.$$

1) Der Factor ist periodisch; denn es gelten die folgenden Gleichungen:

$$\sin^2 [(n+1)\pi e (\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi) l^{-1}]$$
$$= \sin^2 [(n+1)\{\pi e (\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi) l^{-1} \pm m\pi\}],$$
$$\sin^2 [\pi e (\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi) l^{-1}]$$
$$= \sin^2 [\pi e (\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi) l^{-1} \pm m\pi].$$

Wenn mithin $e(\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi)$ zu- oder abnimmt um m l, d. h. wenn der Gangunterschied von zwei aufeinander folgenden Strahlenbündeln um eine ganze Anzahl von Wellenlängen zu- oder abnimmt, erhält P^2 wieder denselben Werth. Innerhalb einer solchen Periode ist die eine Hälfte der Werthe von P^2 der anderen gleich und symmetrisch, denn es ist

$$\sin^2 [(n+1)(m\pi + \tfrac{1}{2}\pi - y)] = \sin^2 [(n+1)(m\pi + \tfrac{1}{2}\pi + y)],$$
$$\sin^2 [m\pi + \tfrac{1}{2}\pi - y] = \sin^2 (m\pi + \tfrac{1}{2}\pi + y).$$

2) Es ist $P^2 = 1$, und damit $I^2 = [(n+1)V]^2$, also ist die Intensität die durch die vielfachen Oeffnungen verstärkte, wenn gilt

$$\pi e (\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi) l^{-1} = \pm m\pi, \; m = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

denn für einen unendlich kleinen Werth von φ ist

$$\sin(n+1)(m\pi + \varphi) = \sin[(n+1)m\pi + (n+1)\varphi] = \pm (n+1)\varphi,$$
$$(n+1)\sin(m\pi + \varphi) = \pm (n+1)\varphi,$$

also

$$P^2 = \left[\frac{(n+1)\varphi}{(n+1)\varphi}\right]^2 = 1$$

für alle φ, die unendlich wenig von $\pm m\pi$ verschieden sind.

Nach dem in 1) Gesagten erreicht demnach der Factor P^2 seine Maxima, wenn der Gangunterschied von zwei auf einander folgenden Strahlenbündeln einer ganzen Anzahl von Wellenlängen gleich ist. Diese grössten Werthe von P^2 heissen M a x i m a z w e i t e r C l a s s e. Dass wirklich die hier angegebenen Werthe von P^2 die grössten Werthe von P^2 sind, erhellt daraus, dass der sin. des mfachen Winkels nie grösser werden kann, als das mfache des sin. des einfachen Winkels.

3) Es ist $P^2 = 0$ und damit $I^2 = 0$, also die Intensität des Lichtes bis zu 0 geschwächt durch mehrere Oeffnungen, wenn

$$(n+1)\pi e (\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi) l^{-1} = \pm m\pi,$$

oder

$$\pi e (\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi) l^{-1} = \pm \frac{m}{n+1}\pi$$

ist, mit Ausnahme derjenigen Fälle, für welche $\frac{m}{n+1}$ eine ganze Zahl ist; denn diese Fälle gehören zu 2), also zu Max. von P^2. Diese Minima von P^2 heissen die M i n i m a z w e i t e r C l a s s e.

4) Von Interesse ist ferner der Fall, wo der Zähler von $P^2 = 1$ wird. Dies geschieht, wenn

$$(n+1)\pi e (\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi) l^{-1} = \pm (m + 1/2)\pi,$$

oder

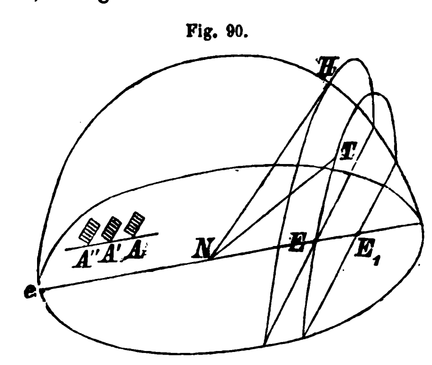
$$(n+1) e (\sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi) = \pm (2m+1)\frac{l}{2}$$

ist, d. h. wenn der $(n+1)$fache Gangunterschied von zwei auf einander folgenden Strahlenbündeln einer ungeraden Anzahl von halben Wellenlängen gleich ist. Diese kleineren Maxima von P^2, welche geben

$$P^2 = \left[\frac{1}{(n+1)\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{n+1}}\right]^2, \text{ also } I^2 = V^2\left[\frac{1}{\sin\frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{n+1}}\right]^2,$$

heissen Maxima dritter Classe, deren kleinster Werth offenbar $I^2 = V^2$ ist, also gleich der Intensität durch eine Oeffnung.

Fig. 90.



Um endlich die zu beobachtende Erscheinung leicht aus den Formeln ableiten zu können, bedarf es nur noch einer Projection der Veränderung der Erscheinung von $(n+1)^2 V^2$, die hervorgebracht wird durch den Factor P^2. Analog den Constructionen zu den vorigen Paragraphen legen wir unserer jetzigen die Schirmebene und eine darüber gezeichnete Halbkugel zu Grunde (Fig. 90) und bedienen uns derselben Bezeichnungen wie vorhin. Es ist also N H die Richtung der directen und N T die der gebeugten Strahlen. Durch N ziehen wir Ne || A A′ A″ und legen dann durch H und T Ebenen ⊥ Ne, welche die Ne in E und E_1 treffen. Es ist dann wie § 370, 4.

$$EE_1 = \sin\mu' \sin\psi - \sin\mu \sin\chi,$$

mithin ist

$$P^2 = \frac{\sin^2[(n+1)\pi e\, EE_1\, l^{-1}]}{(n+1)^2 \sin^2[\pi e\, EE_1\, l^{-1}]}.$$

Die Maxima zweiter Classe treten also ein nach 2), wenn

$$\pi e\, EE_1\, l^{-1} = \pm m\pi \text{ oder } EE_1 = \pm\frac{ml}{e}$$

ist. Auf den hierdurch bestimmten Kreisumfängen, deren gegenseitiger Abstand $\frac{l}{e}$ ist, wird also das durch die Anzahl der Oeffnungen verstärkte Licht unverändert bleiben, denn es ist daselbst $I^2 = (n+1)^2 V^2$.

Für die Minima der zweiten Classe ist nach 3)

$$\pi e\, EE_1\, l^{-1} = \pm\frac{m}{n+1}\pi, \text{ oder } EE_1 = \pm\frac{m}{n+1}\frac{l}{e}.$$

Diesen Werthen entsprechen wieder den obigen parallele Kreise, deren gegenseitiger Abstand $\frac{1}{n+1}\frac{l}{e}$ ist.

Auf diesen Halbkreisen befinden sich die Minima zweiter Classe. Hier wird durch mehrere Oeffnungen die Lichterscheinung völlig aufgehoben, also erscheint das Bild, welches im Uebrigen gerade so geformt ist, wie es

erscheinen würde bei einer Oeffnung, von dunklen, einander parallelen geraden Linien, den Projectionen der Halbkreise, durchschnitten.

Für die Maxima der dritten Classe ist nach 4)

$$\pi e E E_1 l^{-1} = \pm \frac{m + \frac{1}{2}}{n + 1} \pi, \text{ oder } E E_1 = \pm \frac{m + \frac{1}{2}}{n + 1} \frac{l}{e}.$$

Die gegenseitigen Abstände der hierdurch bestimmten Halbkreise sind

$$\frac{\frac{1}{2}}{n + 1} \frac{l}{e}.$$

Aus diesen Formeln können nun folgende allgemeine Gesetze geschlossen werden:

A) Die Lage der Maxima zweiter Classe ist unabhängig von der Anzahl der Oeffnungen, während das Maximum der Lichtintensität im quadratischen Verhältniss zunimmt.

B) Die Minima der zweiten Classe sind von der Anzahl der Oeffnungen abhängig; je mehr Oeffnungen, desto näher an einander liegen sie.

C) Die Maxima der dritten Classe sind auch von der Anzahl der Oeffnungen abhängig und sind dieser Anzahl proportional.

3. Anwendung auf specielle Fälle.

Alle Beugungsbilder von mehreren gleich geordneten congruenten Oeffnungen unterscheiden sich demnach in der allgemeinen Form nicht von den durch eine derartige Oeffnung hervorgebrachten, nur werden sie vor Allem durchzogen von dunklen Streifen parallel der Verbindungslinie dieser Oeffnungen. Diese Geraden entsprechen den Minimis der zweiten Classe. Haben wir mehrere Reihen congruenter beugender Oeffnungen neben-einander, so kommen selbstverständlich zu den dunklen Streifen, die den Verbindungslinien der Oeffnungen der ersten Reihe entsprechen, noch dunkle, unter sich parallele Gerade, welche die ersteren schneiden und von den anderen Reihen congruenter Oeffnungen verursacht werden.

A) Haben wir zwei neben einander liegende paralellogrammförmige Spalte, also $n + 1 = 2$, durch die das Licht gebeugt wird, so verwandeln sich die allgemeinen Ausdrücke der vorigen Nummer in die folgenden:

1) Die Maxima der zweiten Classe befinden sich bei

$$0, \pm \frac{l}{e}, \pm \frac{2l}{e}, \pm \frac{3l}{e} \ldots\ldots,$$

2) die Minima der zweiten Classe bei

$$\pm \frac{1}{2} \frac{l}{e}, \pm \frac{3}{2} \frac{l}{e}, \pm \frac{5}{2} \frac{l}{e}, \pm \frac{7}{2} \frac{l}{e} \ldots\ldots,$$

also giebt es in der Mitte zwischen den Maximis der zweiten Classe dunkle Streifen,

3) die Maxima der dritten Classe bei

$$\pm \frac{1}{4} \frac{l}{e}, \frac{3}{4} \frac{l}{e}, \frac{5}{4} \frac{l}{e} \ldots\ldots$$

Diese aber sind, weil sie den ersten zu nahe liegen, nicht bemerkbar.

Für ein sogenanntes Stabgitter müssen wir n + 1 sehr gross nehmen und die einzelnen Oeffnungen parallelogrammförmig voraussetzen.

B) Sei dann der Einfachheit wegen die Schirmebene senkrecht zu den einfallenden Strahlen, so ist nach 1. und § 370, 4.

$$I^2 = \left(\overline{n+1}\,\frac{\sin\left[\pi a \sin\psi\, l^{-1}\right]}{\pi a \sin\psi\, l^{-1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(n+1)\pi e \sin\psi\, l^{-1}}{(n+1)\sin\pi e \sin\psi\, l^{-1}}\right)^2$$

$$= \left(\overline{n+1}\,\frac{\sin\pi a\, AA_1\, l^{-1}}{\pi a\, AA_1\, l^{-1}}\right)^2 \left(\frac{\sin(n+1)\pi e\, EE_1\, l^{-1}}{\pi e\, EE_1\, l^{-1}}\right)^2.$$

Selbstverständlich sind hier Maxima der zweiten Classe an denselben Stellen wie oben, da deren Ort nach 2. A) unabhängig von der Anzahl der Oeffnungen ist,

$$0\,,\ \pm\frac{l}{e}\,,\ \pm\frac{2l}{e}\,,\ \pm\frac{3l}{e}.$$

Die Orte der Minima der zweiten Classe finden wir z. B. für n + 1 = 1000.

$$\pm\,0{,}0001\,\frac{l}{e}\,,\ \pm\,0{,}0002\,\frac{l}{e}\,,\ \pm\,0{,}0003\,\frac{l}{e}\,,$$

bis wieder ist

$$\pm\frac{m}{1000}\,\frac{l}{e} = \pm\frac{l}{e},$$

also bis m = 1000 ist. Die Entfernung dieser Minima sind $0{,}0001\,\frac{l}{e}$, also sehr nahe beisammen.

Zwischen diesen ausgezeichneten Werthen liegen die Maxima der dritten Classe bei

$$0{,}00005\,\frac{l}{e}\,,\ 0{,}00006\,\frac{l}{e}\,,\ldots\ldots$$

Es liegen mithin zwischen zwei benachbarten hellen Streifen, also z. B. zwischen 0 und $\frac{l}{e}$, sehr nahe eine grosse Menge dunkler Stellen, zwischen denen nur ganz lichtschwache, also unbemerkbare Lichtstreifen enthalten sind, so dass wir für ein Stabgitter nur getrennte helle Linien im homogenen Licht, dessen Wellenlänge l ist, unterscheiden können, deren Intensitäten abnehmen, wenn sie weiter vom nicht gebeugten Strahl abliegen.

Nehmen wir daher statt des homogenen Lichtes zusammengesetztes, so erzeugt eine jede einzelne Farbe ihr eigenes Bild, die alle einander ähnlich concentrisch und ähnlich liegend sind. Die rothen Bilder sind die grössten und liegen am weitesten von der Mitte entfernt, die violetten am kleinsten und der Mitte am nächsten. Fehlt dem Lichtpunkt ein Wellen system von einer gewissen Wellenlänge, so fehlt auch das entsprechende Bild. Sind nun die Oeffnungen in gehöriger Anzahl vorhanden, so sind die einzelnen farbigen Streifen ganz von einander getrennt und man erhält also dann Farbenspectren mit den betreffenden dunklen Linien.

Erklärung der doppelten Brechung.*) (§ 373.)

1. Cauchy's Annahme über Anordnung der Aethermoleküle.

Die Annahme von Cauchy, welche im Lehrbuch auseinandergesetzt ist, widerspricht nach den Rechnungen von Briot der Erscheinung.

Nehmen wir einen Krystall des regulären Systems, so lehrt uns das Experiment, dass ein Lichtstrahl, der durch denselben in jeder beliebigen Richtung gegangen ist, nicht eine Spur von Polarisation zeigt; es verhält sich demnach ein Krystall dieses Systems gegen das Licht wie ein Glasstück, in welchem offenbar der Aether keine regelmässige Anordnung hat. Wenn aber der Aether krystallisirt wäre, so könnte, wie nun bewiesen werden soll, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes nicht nach allen Richtungen dieselbe sein und müsste das Licht beim Durchgang durch den Krystall polarisirt werden.

Nehmen wir, dieser Hypothese entsprechend, die Aethermoleküle in Reihen vertheilt an, welche drei auf einander rechtwinkligen Geraden, die wir zu Coordinatenaxen nehmen, parallel sind, so reduciren sich die Summen, welche in den Gleichungen der Schwingungsbewegung § 279 vorkommen, auf drei von einander verschiedene Werthe, die wir kurz mit g, h, h′ bezeichnen. Es werden nämlich nach den in § 279, 6. eingeführten Bezeichnungen für die Grössen unter (1.) und (3.) zu setzen sein 2 g und 2 h. Die dort unter (2.) aufgeführten Werthe können aber nun nicht mehr aus denen unter (3.) stehenden abgeleitet werden, da das Coordinatensystem nicht beliebig genommen werden darf. Wir setzen deshalb jetzt statt der Werthe (2.) die Abkürzung 6 h′ und erhalten dann statt der allgemeinen Gleichungen mit den Vernachlässigungen, wie sie § 279, 5. vorgenommen worden sind, folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = (g+h)\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)+3\,(h'-h)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$
$$+\,2h\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\delta\eta^2}{\partial x\,dy}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = (g+h)\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right)+3\,(h'-h)\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}$$
$$+\,2h\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = (g+h)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\delta^2\zeta}{\partial z^2}\right)+3\,(h'-h)\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}$$
$$+\,2h\left(\frac{\partial^2\xi}{dx\,\partial z}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right).$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der ebenen Wellen werden dann (§ 279, (9.) oder (10.)), wenn wir der grösseren Deutlichkeit wegen für m, n, p

*) Briot, Mathematische Theorie des Lichtes, übers. von Klinkerfuss, Leipzig. Beer, Einleitung in die höhere Optik, Braunschweig.

setzen cos a, cos b, cos c, wo also nach § 225. a, b, c die Winkel sind, welche die Normale zur Wellenebene mit den Coordinatenaxen bildet:

$$c^2 A = A(g + h + 3(h' - h)\cos^2 a) + 2h\cos a(A\cos a + B\cos b + C\cos c),$$
$$c^2 B = B(g + h + 3(h' - h)\cos^2 b) + 2h\cos b(A\cos a + B\cos b + C\cos c),$$
$$c^2 C = C(g + h + 3(h' - h)\cos^2 c) + 2h\cos c(A\cos a + B\cos b + C\cos c).$$

Bedenkt man dann noch, dass $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ ist, so haben wir vier Gleichungen zur Bestimmung von c^2, A, B, C, aus denen im Allgemeinen diese Werthe berechnet werden können. Da also A, B, C bestimmte Werthe erhalten, so müsste das Licht (§ 279, 3.) im Allgemeinen polarisirt sein. Es giebt aber, da $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 a = 1$ ist, sieben Richtungen, in denen das Licht nicht polarisirt ist, nämlich in den Richtungen der drei Kanten und in den der vier Diagonalen eines Cubus. Macht man z. B. $\cos a = 1$, $\cos b = \cos c = 0$, so erhält man die nichtpolarisirte Schwingung $A = 0$, $c^2 = g + h$. Wenn $\cos^2 a = \cos^2 b = \cos^2 c = \frac{1}{3}$ ist, also die Wellennormale mit der Diagonale des Cubus zusammenfällt, erhält man die transversale, nichtpolarisirte Schwingung

$$A\cos a + B\cos b + C\cos c = 0, \; c = g + h'.$$

Die Gleichungen gehen über in die für isotrope Mittel, wenn $h' = h$, d. h. wenn die für derartige Mittel charakteristischen Gleichungen S. 267 gelten, also die Wahl der Axen ohne Einfluss ist.

2. Briot's Annahme und die daraus gefolgerten Schwingungsgleichungen.

Briot (a. a. O. S. 48) giebt seine Annahme in folgenden Worten:

„Wir betrachten das Aethermedium, welches einen Krystall durchdringt, als ein dem freien Aether analoges, jedoch durch Anwesenheit der ponderablen Moleküle modificirtes Medium, welche Modification wir uns auf folgende Weise vorstellen. Dividirt man die Länge einer Geraden von einer gewissen Ausdehnung durch die sehr grosse Zahl der Aethermoleküle, welche auf dieser Geraden liegen, so erhält man den mittleren Abstand der Aethermoleküle in dieser Richtung. Es ist klar, dass im freien Aether der mittlere Abstand für alle Richtungen derselbe ist. Es liegt nahe, zu denken, dass die Anwesenheit der ponderablen Moleküle diesen mittleren Abstand der Aethermoleküle modificirt, und zwar nach verschiedenen Richtungen verschieden, Denkt man sich demnach ein isotropes Mittel, welches mit dem betrachteten von gleicher Dichtigkeit ist, und dass dasselbe nach gewissen Richtungen, welche den Linien des Krystalls entsprechen, auseinander oder zusammengezogen werde, so wird man den Aether, welcher den Krystall erfüllt, dem so modificirten isotropen Mittel anpassen können. In der Wirklichkeit ist die Dichtigkeit des Aethers nicht in allen Punkten einer Zelle, in deren Centrum oder in dem Rande, die nämliche, wird vielmehr nur wieder die nämliche an den homologen Punkten der verschiedenen Zellen; wir vernachlässigen einstweilen diese periodischen Ungleichheiten

in der Vertheilung des Aethers und substituiren für die periodische wirkliche Anordnung den erwähnten mittleren Zustand. Wir dürfen, wie gesagt, voraussetzen, dass dieser mittlere Zustand der Formveränderung eines isotropen Mittels derselben Dichtigkeit, welches nach gewissen, durch die Linien des Krystalles bestimmten Richtungen, ausgedehnt oder zusammengezogen wurde, entsprungen sei."

Nach den Lehren der Elasticitätstheorie (§ 64) kann die Gesammtheit aller Ausdehnungen und Zusammenziehungen, welche der Aether in einem symmetrischen Krystall erfährt, auf drei Ausdehnungen und Zusammenziehungen nach auf einander rechtwinkligen Richtungen zurückgeführt werden. Der folgenden Untersuchung mögen diese zu einander rechtwinkligen Richtungen als Coordinatenaxen zu Grunde gelegt werden.

Wenn wir demnach durch δ diese Aenderungen bezeichnen, so ist

$$\delta x' = a x' \;,\; \delta y' = b y' \;,\; \delta z = c z',$$

wo a, b, c kleine Grössen sind, so dass deren Quadrate und Producte vernachlässigt werden dürfen. Da ausserdem die Dichtigkeit nicht wechselt, so ist nahe $a + b + c = 0$.

Ferner ist

$$\delta r = \frac{x' \delta x' + y' \delta y' + z' \delta z'}{r} = \frac{a x'^2 + b y'^2 + c z'^2}{r}.$$

Damit ergeben sich die Variationen der Ausdrücke, welche die L ... P ... bestimmen.

Wir finden z. B.

$$\delta [\tfrac{1}{2} \Sigma m f(r) (u x' + v y' + w z')^2]$$

$$= \Sigma m f(r) (u x' + v y' + w z') (u \delta x' + v \delta y' + w \delta z') + \tfrac{1}{2} \Sigma m \frac{f'(r)}{r} (u x' + v y' + w z')^2 r \,\delta r$$

$$= \Sigma m f(r) (u x' + v y' + w z') (u a x' + v b y' + w c z') + \tfrac{1}{2} \Sigma m \frac{f'(r)}{r}\, u x' + v y' + w z') (a x'^2 + b y'^2 + c z'^2)$$

$$= h (a + b + c) (u^2 + v^2 + w^2) + 2 (g + h) (a u^2 + b v^2 + c w^2)$$

$$= 2 (g + h) (a u^2 + b v^2 + c w^2),$$

$$\delta \left[\tfrac{1}{2} \Sigma m \frac{f'(r)}{r} (u x' + v y' + w z')^2 y' z'\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \Sigma m \frac{f'(r)}{r} \{2 (u x' + v y' + w z') (a u x' + b v y' + c w z') y' z' + (u x' + v y' + w z')^2 (b + c) y' z'\} + \tfrac{1}{2} \Sigma m \left[d \frac{f'(r)}{r} : r\right] (u x' + v y' + w z')^2 (a x'^2 + b y'^2 + c z'^2).$$

Nach der in § 279, 6. angewandten Methode haben wir

$$\Sigma x'^4 z'^2 \varphi (r) = 3 \Sigma m x'^2 y'^2 z'^2 \varphi (r).$$

Um auch $\Sigma m x'^6 \varphi (r)$ zu finden, verfahren wir analog dem § 279, 6. Es muss nämlich sein, wenn x'^6 entwickelt wird,

$$\Sigma m x'^6 \varphi(r) = (\cos^6\vartheta + \sin^6\vartheta)\Sigma m x'^6 \varphi(r) + 15 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \Sigma m x'^4 y'^2 \varphi(r),$$
$$= m x'^6 \varphi(r) + 3 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta [5 \Sigma m x'^4 y'^2 \varphi(r) - \Sigma m x'^6 \varphi(r)],$$

dies kann aber nur gelten, wenn

$$\Sigma m x'^6 \varphi(r) = 5 \Sigma m x'^4 y'^2 \varphi(r) \text{ ist.}$$

Wenden wir nun diese Gleichungen mit der allgemeinen Function $\varphi(r)$ auf unseren Fall an, so ist

$$\frac{1}{2} \Sigma m x'^2 y'^2 z'^2 \frac{d\frac{f'(r)}{r}}{r} = \frac{1}{2.3} \Sigma x'^4 z'^2 \frac{d\frac{f'(r)}{r}}{r} = \frac{1}{2.3.5} \Sigma m x'^6 \frac{d\frac{f'(r)}{r}}{r}$$
$$= \frac{1}{2.3.5.7} \Sigma m r^6 \frac{d\frac{f'(r)}{r}}{r} = l,$$

mithin ist, da $b + c = -a$ ist,

$$\delta\left[\frac{1}{2} \Sigma m \frac{f'(r)}{r} (u x' + v y' + w z') y'^2 z'\right] = 4 (h + l)(b + c).$$

Mit Berücksichtigung dieser Variation werden dann die $L \ldots P \ldots$ aus § 279, indem man zu den dort gegebenen Werthen die Grössen $\delta L \ldots \delta P \ldots$ hinzunimmt,

$$L = [g + h + 2(h + l)a](u^2 + v^2 + w^2) + 2(g + 2h + l)(a u^2 + b v^2 + c w^2)$$
$$+ 2[h + 4(h + l)a] u^2,$$
$$P = 2[h + 2(h + l)(b + c)] v w = 2[h - 2(h + l)a] v w.$$

Diese Werthe in § 279 eingesetzt geben die verlangten Schwingungsgleichungen. Vereinfachung tritt ein bei einem Krystall des regulären Systems, wo $a = b = c = 0$ zu setzen ist, und wir erhalten der Annahme entsprechend die Gleichungen von § 279, 6., so dass also die Bewegung in derartigen Krystallen, der Beobachtung entsprechend, so ist, wie im freien Aether.

3. Ebene Wellen in Krystallen mit einer optischen Axe.

Wir müssen unsere eben gefundenen Werthe einsetzen in die Gleichungen von S. 265, nachdem wir vorher eine Beziehung zwischen den Grössen a, b, c aufgefunden haben, welche die Krystalle dieses Systems charakterisirt. Es muss nun ein jeder derartiger Krystall, nachdem er um seine ausgezeichnete Axe um einen gewissen Winkel $\frac{2\pi}{n}$, wobei n eine ganze Zahl grösser als 2 bedeutet, gedreht worden ist, mit sich selbst zusammenfallen. Es wird demnach für dieselben (§ 64. 8.) die Stellungsfläche ein Rotationsellipsoid sein, dessen Rotationsaxe mit der Axe des Krystalles zusammenfällt, d. h. es ist der Aether um die Axe des Krystalles isotrop.

Nehmen wir diese Axe zur x Axe, so muss $b = c$, und, da $a + b + c = 0$ ist, $= -\frac{a}{2}$ sein.

Wenn wir nun zu den ebenen Wellen übergehen, setzen wir statt u, v, w, die dort S. 265 eingeführten Werthe $x \cos a$, $x \cos b$, $x \cos c$, wo also a, b, c die Winkel bedeuten, welche die Normale zu der Wellenebene mit den Axen bildet, und erhalten

$$L_2 = [g + h + 2(h + l)a] + (g + 2h + l)a(2\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c) + 2[h + 4(h + l)a]\cos^2 a,$$

$$= [g + h + (l - g)a] + \cos^2 a[3g + 6h + 3l + 8(h + l)]a + 2h\cos^2 a$$

$$P_2 = 2[h - 2(h + l)a]\cos b \cos c.$$

Diese Werthe und die ähnlich gebildeten M .. Q .. müssen dann in die Gleichungen (9.) S. 265 substituirt werden.

Aus den dadurch erhaltenen Gleichungen kann man durch eine einfache Transformation ableiten

$$P_2\left(c^2 - L_2 + \frac{Q_2 R_2}{P_2}\right) A = Q_2\left(c^2 - M_2 + \frac{R_2 P_2}{Q_2}\right) B$$

$$= R_2\left(c^2 - N_2 + \frac{P_2 Q_2}{R_2}\right) C = P_2 Q_2 R_2\left(\frac{A}{P_2} + \frac{B}{Q_2} + \frac{C}{R_2}\right). \qquad \text{(a.)}$$

Hieraus folgen

$$A = \frac{P_2 Q_2 R_2\left(\frac{A}{P_2} + \frac{B}{Q_2} + \frac{C}{R_2}\right)}{P_2\left(c_2 - L_2 + \frac{Q_2 Q_2}{P_2}\right)}$$

und dem ähnliche Ausdrücke für B und C, und daraus endlich

$$A(c^2 - L_2) = Q_2 R_2\left(\frac{A}{P_2} + \frac{B}{Q_2} + \frac{C}{R_2}\right) - \frac{A Q_2 R_2}{P_2}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die erste der Gleichungen (9) S. 265, substituirt dann die eben aufgestellten Werthe von A, B, C und dividirt durch den gemeinschaftlichen Factor

$$\frac{A}{P_2} + \frac{B}{Q^2} + \frac{C}{R_2},$$

so erhält man die Gleichung der Geschwindigkeiten:

$$\frac{1}{P_2^2\left(c^2 - L_2 + \frac{Q_2 R_2}{P_2}\right)} + \frac{1}{Q_2^2\left(c^2 - M_2 + \frac{R_2 P_2}{Q_2}\right)} + \frac{1}{R_2^2\left(c^2 - N_2 + \frac{P_2 Q_2}{R_2}\right)}$$

$$- \frac{1}{P_2 Q_2 R_2} = 0. \qquad \text{(b.)}$$

Nun unterscheiden sich für unseren Fall die Q_2 und R_2 nur durch die cos., denn es ist

$Q_2 = 2[h + (h + l)a]\cos c \cos a$, $\quad R_2 = 2[h + (h + l)a]\cos a \cos b$.

oder abgekürzt $\quad Q_2 = h_2 \cos c \cos a$

$R_2 = h_2 \cos a \cos b$ und dem entsprechend abgekürzt $\quad P_2 = h_1 \cos b \cos c$.

Ferner ist nach der im Obigen angegebenen Einsetzung in die Ausdrücke M_2 und N_2

$$M_2 - \frac{R_2 P_2}{Q_2} = N_2 - \frac{Q_2 P_1}{R_2} = (g+h) - (g+3h+2l)a + 3(g+2h+l)a\cos^2 a.$$

Bezeichnen wir abgekürzt diese Werthe mit c_2^2 und den entsprechenden $L_2 - \frac{Q_2 R_2}{P_2}$ mit c_1^2, so erhalten die Gleichungen (a) und (b) die folgende Form:

$$\frac{h_1}{\cos a}(c^2 - c_1^2)A = \frac{h_2}{\cos b}(c^2 - c_2^2)B = \frac{h_2}{\cos c}(c^2 - c_2^2)C =$$

$$h_1 h_2^2 \left(\frac{A\cos a}{h_1} + \frac{B\cos b + C\cos c}{h_2}\right), \qquad \text{(a.*)}$$

$$\frac{\frac{\cos^2 a}{h_1^2}}{c^2 - c_1^2} + \frac{\frac{\cos^2 b + \cos^2 c}{h_2^2}}{c^2 - c_2} - \frac{1}{h_1 h_2^2} = 0. \qquad \text{(b.*)}$$

A) Fällt die Normale zur Wellenebene mit der Krystallaxe zusammen, so ist $\cos a = 1$, $\cos b = \cos c = 0$ und damit $Q_2 = R_2 = 0$.

Dann folgen aus (a*) die beiden Lösungen

1) $c^2 = c_2{}^2 = 0$, $A = 0$.

2) $B = C = 0$, $c^2 = c_1^2 + \frac{h_2^2}{h_1} = c_1^2 + \frac{2[h + (h+l)a]^2}{h - 2(h+l)a}$.

Der ersten Lösung entspricht eine unbestimmte Transversalschwingung, der zweiten Lösung eine Longitudinalschwingung, die also nicht als Licht wahrgenommen wird.

Wenn also ein Lichtstrahl mit der Richtung der Hauptaxe zusammenfällt, so bleibt der Strahl ein einfacher ohne polarisirt zu werden, da B und C unbestimmt sind.

B) In dem allgemeinen Fall findet man aus (a*) durch Gleichsetzung des zweiten und dritten Ausdrucks

$$(c_2 - c_2^2)\left(\frac{B}{\cos b} - \frac{C}{\cos c}\right) = 0.$$

Dieser Bedingung wird auf zwei Arten genügt:

1) $c^2 = c_2^2$,

Dann ist nach (a*)

$$A = 0, \quad B\cos b + C\cos c = 0. \text{ d. h.}$$

die Schwingung ist geradlinig polarisirt, findet statt in einer zur Hauptaxe des Krystalles senkrechten Ebene und in der Wellenebene. Dies ist also eine vollständig transversale Schwingung, die stattfindet senkrecht auf dem Hauptschnitt des Krystalles.

2) $\frac{B}{\cos b} - \frac{C}{\cos c} = 0$.

Setzen wir hier statt B und C andere Ausdrücke, indem wir irgend einen Punkt der Schwingung betrachten, dessen Entfernung vom Coordinatenanfang r ist. Da dann $B = \frac{y}{r}$, $C = \frac{z}{r}$ ist, so gilt $\frac{y}{\cos b} - \frac{z}{\cos c} = 0$. Dies aber ist die Gleichung einer Ebene, die durch die x Axe also durch

die Axe des Krystalles geht und parallel einer Geraden ist, die mit der y und z Axe die Winkel b und c bildet. Die beiden Schwingungen, welche der obigen Bedingung genügen, finden demnach statt in einer Ebene senkrecht zur Wellenebene durch die Hauptaxe, also im Hauptschnitt. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten derselben sind gegeben durch (b^*), wenn die Lösung unter 1) $c^2 = c_2^2$ unterdrückt wird. Dieser Gleichung können wir folgende Form geben:

$$\frac{\cos^2 a}{h_1^2}(c^2 - c_2^2) + \frac{\cos^2 b + \cos^2 c}{h_2^2}(c^2 - c_1^2) - \frac{1}{h_1 h_2^2}(c^2 - c_1^2)(c^2 - c_2^2) = 0.$$

Setzen wir dann $c^2 = c_1^2$ und $c^2 = c_2^2$, so wechselt dieser Ausdruck das Vorzeichen, folglich liegt eine der Wurzeln dieser Gleichung zwischen c_1 und c_2. Da nun diese beiden Grössen schon wenig von einander verschieden sind, denn ihre Differenzen enthalten den Factor a, so sind es noch weit weniger $c^2 - c_1^2$, $c^2 - c_2^2$. Wenn wir demnach Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen, so können wir diese Gleichung auf die folgende reduciren:

$$\cos^2 a\,(c^2 - c_2^2) + (\cos^2 b + \cos^2 c)(c^2 - c_1^2) = 0.$$

Daraus findet man

$$c^2 = (\cos^2 b + \cos^2 c)\,c_1^2 + \cos^2 a\,c_2^2 = c_1^2 + \cos^2 a\,(c_2^2 - c_1^2).$$

Setzt man dann diesen Werth in den ersten und letzten Theil von (a^*), so findet man nach einer einfachen Transformation und Vernachlässigung der zweiten Potenz von a

$$A \cos a + B \cos b + C \cos c = -\frac{9(h + l)\,a\,A \cos a}{2h}.$$

Die Grösse links ist der cos. des Winkels, den die Schwingungsrichtung mit der Normale der Wellenebene einschliesst, und rechts steht eine kleine Grösse wegen des Factors a. Mithin macht diese Schwingung einen sehr kleinen Winkel mit der Wellenebene, sie ist eine quasitransversale im Hauptschnitt.

Die Geschwindigkeit der dritten Schwingung, welche, da sie senkrecht zu den beiden ersteren sein muss, nach § 279 S. 266, nahezu normal zur Wellenebene ist und deshalb nicht als Licht wahrgenommen werden kann, ist gegeben durch

$$c = \sqrt{c_2^2 + h_1 + 15\,(h + l)\,a \cos^2 a} \quad \text{fort,}$$

wie man findet, indem man die Gleichung (b^*) soweit transformirt, dass man den Coefficienten von c^2 berechnet und dann davon die bekannte Wurzel abzieht, natürlich mit den einmal festgesetzten Vernachlässigungen.

4. Berechnung der Constanten.

Die Constanten der Gleichungen in der vorigen Nummer können bestimmt werden mit Hülfe des Erfahrungssatzes, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einen von zwei transversalen Schwingungen nach allen Richtungen die nämliche ist.

Die Geschwindigkeit der quasitransversalen Schwingung ist in 3. gefunden worden

$$c^2 = c_1^2 + \cos^2 a\,(c_2^2 - c_1^2).$$

Werden hier die Werthe von c_1 und c_2 wieder eingesetzt, so ist

$$c^2 = g + h - (g - l)\,a + 3\,(g + h)\,a \cos^2 a.$$

Damit diese Grösse unabhängig von $\cos a$ würde, müsste $g + h = 0$ sein, dies ist aber nach § 279 6. unmöglich; denn es müsste sonst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Schwingung in einem isotropen Mittel Null sein.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der vollständig transversalen Schwingung ist nach Herstellung des Werthes c_2^2

$$c^2 = c_2^2 = g + h - (g + 3h + 2l)\,a + 3\,(g + 2h + l)\,a \cos^2 a,$$

welche Grösse unabhängig von der Richtung wird, wenn $g + 2h + l = 0$ ist. Dieser Bedingung widerspricht nichts, kann also, um der im Anfang angegebenen Erfahrung zu genügen, als erfüllt angenommen werden.

Folglich besteht der ordinäre Strahl aus vollständig transversalen Schwingungen, die senkrecht auf dem Hauptschnitt stattfinden, während die Schwingungen des extraordinären quasitransversal sind und zwar im Hauptabschnitt geschehen.

Diese gefundenen Resultate lassen sich weiter verwerthen für eine Untersuchung über die Molekularkräfte. Setzen wir nämlich voraus, dass diese sich ändert im umgekehrten Verhältniss der $n$ten Potenz des Abstandes, und nehmen daher $f(r) = \frac{\mu}{r^{n+1}}$, so erhalten wir

$$g = \frac{1}{2.3} \Sigma\, m r^2 f(r) = \frac{1}{2.3} \Sigma \frac{m\mu}{r^{n-1}},\quad h = -\frac{n+1}{2.3.5} \Sigma \frac{m\mu}{r^{n-1}} = -\frac{n+1}{5}\, g,$$

$$l = \frac{(n+1)(n+3)}{2.3.5.7} \Sigma \frac{m\mu}{r^{n-1}} = -\frac{n+3}{7}\, h = \frac{(n+1)(n+3)}{5.7} . g.$$

Mithin ist

$$g + h = -\frac{n-4}{5}\, g,\quad h + l = -\frac{n-4}{7}\, h = \frac{(n+1)(n-4)}{5.7} . g, \text{ also}$$

$$g + 2h + l = \frac{(n-4)(n-6)}{5.7} . g.$$

$g + 2h + l$ verschwindet also für $n = 4$ und $n = 6$.

Die Bedingung $n = 4$ führt aber zugleich auf $g + h = 0$, was nach dem Obigen unmöglich ist, es bleibt demnach nur die eine Bedingung $n = 6$ übrig.

Da ferner in § 279 6. gefunden ist $c^2 = g + h = \frac{4-n}{5}\, g$, so muss nun, da $n = 6$ sein soll, damit c^2 positiv wird, g negativ und damit die Molekularkraft (S. 257) eine abstossende Kraft sein.

Behalten wir nun dies Gesetz der Molekularkraft bei, so ist, wenn wir zur Abkürzung schreiben $p = \frac{1}{30} \Sigma \frac{m\mu}{r^5}$,

$$g = -5p,\ h = 7p,\ l = -9p,\ g + h = 2p,\ h + l = -2p,$$
$$h_1 = 14p(1 + \tfrac{4}{7}a),\ h_2 = h_3 = 14p(1 - \tfrac{2}{7}a),$$
$$c_1^2 = 2p(1 - 2a),\ c_2^2 = c_3^2 = 2p(1 + a.)$$

5. Bestimmung der Wellenfläche.

Die hier zu untersuchende Wellenfläche muss jedenfalls eine zusammengesetzte sein, da sie sowohl den ordinären als den extraordinären Strahl enthalten muss.

Für den ordinären ist dieselbe einfach, wie für ein isotropes Medium, eine Kugel, deren Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - c_2^2 = 0$ ist.

Für den extraordinären ist die Wellenfläche die Enveloppe der Wellenebene

$$x\cos a + y\cos b + z\cos c = c,\ \text{wo}\ c^2 = c_1^2 + (c_2^2 - c_1^2)\cos^2 a = c_2^2\cos^2 a + c_1^2(\cos^2 b + \cos^2 c)\ \text{ist.}$$

Eine der ersteren benachbarte Wellenebene ist gegeben durch

$$x(\cos a + d\cos a) + y(\cos b + d\cos b) + z(\cos c + d\cos c) = c + dc.$$

Durch Subtraction der Gleichung der ersten Wellenebene von dieser erhalten wir

$$x\,d\cos a + y\,d\cos b + z\,d\cos c = dc.$$

Aus der Gleichung für c^2 folgt aber

$$dc = \frac{c_2^2\cos a\,d\cos a}{c} + \frac{c_1^2(\cos b\,d\cos b + \cos c\,d\cos c)}{c}.$$

Setzt man diese beiden Werthe von dc einander gleich und dann beziehungsweise die Coefficienten von $d\cos a$, $d\cos b$, $d\cos c$, so erhält man

$$x = \frac{c_2^2\cos^2 a}{c},\quad y = \frac{c_1^2\cos b}{c},\quad z = \frac{c_1^2\cos c}{c},\ \text{und daraus}$$

$$\cos a = \frac{cx}{c_2^2},\quad \cos b = \frac{cy}{c_1^2},\quad \cos b = \frac{cz}{c_1^2}.$$

Setzt man diese Werthe in

$$x\cos a + y\cos b + z\cos c = c\ \text{ein, so erhält man}$$

$$\frac{x^2}{c_2^2} + \frac{y^2}{c_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1$$

als die Gleichung der gesuchten Enveloppe, welche also ein Rotationsellipsoid ist.

Es ist mithin die vollständige Gleichung der zusammengesetzten Wellenfläche

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{c_2^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{c_2^2} + \frac{y^2 + z^2}{c_1^2} - 1\right) = 0.$$

Die sphärische Welle berührt also das Ellipsoid an dem Ende der Rotationsaxe, die der Hauptaxe des Krystalles entspricht und zwar entweder von aussen oder von innen, je nachdem $c_2 \lesseqgtr c_1$ ist.

Hiermit ist die Richtigkeit der Construction von Huyghens zur Bestimmung der gebrochenen Strahlen die der folgenden Nummer zu Grunde gelegt ist, bewiesen.

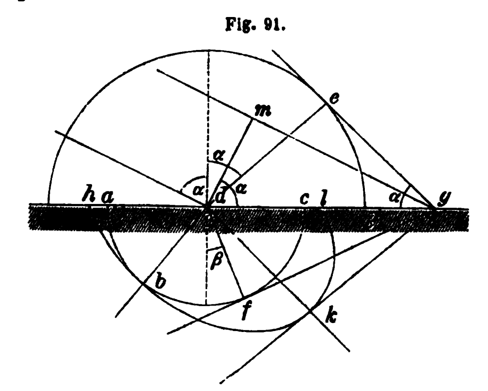
6. Richtung der gebrochenen Welle und des gebrochenen Strahles.

Die ordinäre Welle mit dem ordinären Strahl erfordert nicht eine besondere Auseinandersetzung, denn hier gilt dasselbe Gesetz wie bei den isotropen Mitteln.

Bei der Untersuchung des extraordinären Strahles legen wir Fig. 91 (Fig. 201 des Lehrbuches) zu Grunde, übertragen dieselbe aber auf den allgemeinen Fall. Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem isotropen Mittel mit v, so ist die Zeit, in der die einfallende Welle den Weg mg zurücklegt, $\frac{mg}{v}$.

Dann ist $db = c_2 \cdot \frac{mg}{v}$, $dk = c_1 \cdot \frac{mg}{v}$. Wird dann in g ein Perpendikel auf die Einfallsebene errichtet und durch dieses eine Tangentialebene an die Wellenfläche gezeichnet, so ist diese die gebrochene Wellenebene und die Linie von d nach dem Berührungspunkte die Richtung des gebrochenen Strahles. Bezeichnen wir ferner mit r die Neigung der gebrochenen Welle gegen die brechende Fläche und mit n den Fusspunkt eines von d auf die gebrochene Welle gefällten Perpendikels (dieser Punkt n fällt in Fig. 91 wegen des dort gezeichneten speciellen Falles mit k zusammen.) Die z Axe sei das Einfallsloth und die x Axe liege in der Einfallsebene. Die optische Axe bilde mit den Coordinatenaxen Winkel, deren cos. mit u, v, w bezeichnet werden.

Fig. 91.



Dann ist
$$\frac{mg}{dn} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{c}. \qquad (1.)$$

Das hierhergehörige c finden wir ausgedrückt durch den Winkel φ, welchen die Wellennormale mit der Hauptaxe einschliesst, indem wir die Entfernung des Mittelpunktes der Wellenfläche aus 5.

$$\frac{x^2}{c_2^2} + \frac{y^2 + z^2}{c_1^2} - 1 = 0,$$

von der zur Wellenebene parallel an diese Fläche gelegten Tangentialebene berechnen. Dies giebt

$$c^2 = c_2^2 \cos^2\varphi + c_1^2 \sin^2\varphi. \qquad (2.)$$

Zur Bestimmung von φ gilt dann nach der bekannten cos-Gleichung

$$\cos\varphi = u \sin r + w \cos r. \qquad (3.)$$

Diese drei Gleichungen geben zunächst

$$\sin^2 r = \sin^2 i \left[\frac{c_1}{v^2} + \left(\frac{c_2^2}{v^2} - \frac{c_1^2}{v^2}\right)(u \sin r + w \cos r)^2\right]$$

und dann (3.) das zugehörige φ und (2.) dann c.

Ist speciell

1) $u = 0$, $w = 0$, $v = 1$, so erhält man $\sin r = \sin i \frac{c_1}{v}$, d. h. wenn die optische Axe senkrecht auf der Einfallsebene steht, so findet gewöhnliche Brechung statt.

2) $v = 0$ und i habe einen solchen Werth, dass die gebrochene Welle auf die optische Axe senkrecht zu stehen kommt. Dann ist $u \sin r + w \cos r = 1$, folglich $\sin r = \sin i \frac{c_2}{v}$, also werden dann die ausserordentlichen Wellen ebenso wie die ordentlichen gebrochen.

Es ist endlich noch die Richtung des gebrochenen Strahles zu finden, d. i. die Richtung des Radiusvectors der Wellenfläche nach dem Berührungspunkte, die Linie dk.

Die Grösse der Hauptaxen sind nach dem Obigen

$$d\,b = c_1 \frac{m\,g}{v} = \sin i \frac{c_1}{v} = a, \text{ wenn wir } d\,g = 1 \text{ setzen,}$$

$$d\,k = c_2 \frac{m\,g}{v} = \sin i \frac{c_2}{v} = b.$$

Da ferner unser Coordinatensystem anders als in 5. liegt, so ist

$$u x + v y + w z = 0$$

die Gleichung des Aequators der Wellenfläche, mithin ist deren Gleichung

$$\frac{1}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2) + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)[u x + v y + w z]^2 = 1.$$

Seien nun x', y', z' die Coordinaten des gesuchten Berührungspunktes und sei zur Abkürzung gesetzt

$$A' = u x' + v y' + w z',$$

so ist die Gleichung der Tangentialebene an die Wellenfläche

$$\left[\frac{1}{a^2} x' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) A' u\right] x + \left[\frac{1}{a^2} y' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) A' v\right] y$$
$$+ \left[\frac{1}{a^2} z' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) A' w\right] z = 1.$$

Diese Gleichung muss nun mit der für die gebrochene Wellenebene identisch sein. Deren Gleichung ist aber

$$\sin r x + \cos r z = \sin r, \quad \text{oder } x + \operatorname{cotg} r z = 1.$$

Dies führt durch Gleichsetzung der Coefficienten zu folgenden Bedingungen:

$$\frac{1}{a^2} x' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) A' u = 1. \qquad (4.)$$

$$\frac{1}{a^2} y' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) A' v = 0. \qquad (5.)$$

$$\frac{1}{a^2} z' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) A'w = \cotg r. \qquad (6.)$$

Dnrch die Gleichungen (4.) und (5.) und die der Wellenfläche oder, wenn r schon anderweitig bekannt ist, durch (4.), (5.), (6.) kann berechnet werden x', y', z', wodurch dann die Gleichungen des Strahles

$$z = \frac{z'}{x'} x, \quad y = \frac{y'}{x'} x \text{ gegeben sind.}$$

Eine derartige Rechnung ist ausgeführt § 382. 2. 4.).

Es sind demnach die cos. der Winkel, welche der Strahl mit den Coordinatenaxen bildet,

$$\mathfrak{a} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \mathfrak{b} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \mathfrak{c} = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Bedeutet ψ den Winkel, den der Strahl mit der optischen Axe macht, so ist

$$\cos\psi = \mathfrak{a}u + \mathfrak{b}v + \mathfrak{c}w.$$

Die Geschwindigkeit des Strahles s ergiebt sich aus der Wellenfläche für die Zeiteinheit, wenn ψ gegeben ist. Es ist nämlich dann $\frac{x'}{s} = \cos\psi$ und $\frac{\sqrt{z'^2 + y'^2}}{s} = \sin\psi$, also nach Einsetzung in $\frac{x'^2}{c_2^2} + \frac{y'^2 + z'^2}{c_1^2} = 1$

$$s = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}}}.$$

Der Lichtstrahl bleibt nur dann in der Einfallsebene, wenn y' verschwindet. Diess kann aber nach 5. nur eintreten, wenn

$$1)\ v = 0, \quad 2)\ A' = 0 \text{ ist.}$$

Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn die optische Axe in die Einfallsebene fällt, und die zweite, wenn diese Axe der gebrochenen Welle parallel ist.

Optisch zweiaxige Krystalle. (§ 374.)

1. Allgemeine Gleichungen.

Wir gehen bei Betrachtung der Erscheinungen an den zweiaxigen Krystallen aus von den Annahmen zu § 373. 2. und verallgemeinern dieselben, indem wir nicht mehr wie dort in 3. vorausgesetzt wurde $b = c = -\frac{a}{2}$ setzen, sondern lassen, weil nun die Stellungsfläche ein dreiaxiges Ellipsoid ist, a, b, c als drei von einander verschiedene Werthe gelten und zwar sei $a > b > c$.

Statt der Formeln (a*) (b*) des vorigen § erhalten wir demnach jetzt

$$\frac{h_1}{\cos a}(c^2 - c_1^2) A = \frac{h_2}{\cos b}(c^2 - c_2^2) B = \frac{h_3}{\cos c}(c^2 - c_3^2)$$

$$= h_1 h_2 h_3 \left(\frac{A \cos a}{h_1} + \frac{B \cos b}{h_2} + \frac{C \cos c}{h_3}\right), \qquad (a^{**})$$

$$\frac{\frac{\cos^2 a}{h_1^2}}{c^2 - c_1^2} + \frac{\frac{\cos^2 b}{h_2^2}}{c^2 - c_2^2} + \frac{\frac{\cos c}{h_3^2}}{c^2 - c_3^2} - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} = 0, \qquad (b^{**})$$

wo $h_2 = 2[h - 2(h+l)b]$, $h_3 = 2[h - 2(h+l)c]$ und

$$M_2 - \frac{R_2 P_2}{Q_2} = c_2^2, \quad N_2 - \frac{Q_2 P_2}{R_2} = c_3^2 \text{ ist.}$$

Die Grössen c_1^2, c_2^2, c_3^2 unterscheiden sich wenig von einander, denn die Glieder ohne die kleinen Factoren a, b, c sind einander gleich. Ferner ist wegen unserer Annahme über die Grösse a, b, c $c_1^2 > c_2^2 > c_3^2$. Setzt man nämlich die allgemeinen Werthe von $L_2 \ldots$ ein, so erhält man

$$c_1^2 = g + h + 2(h+l)a + 2(g + 2h + l)(a\cos^2 a + b\cos^2 b + c\cos^2 c),$$
$$c_2^2 = g + h + 2(h+l)b + 2(g + 2h + l)(a\cos^2 a + b\cos^2 b + c\cos^2 c),$$
$$c_3^2 = g + h + 2(h+l)c + 2(g + 2h + l)(a\cos^2 a + b\cos^2 b + c\cos^2 c).$$

Diese Werthe sind constant, wenn wir das S. 446 gefundene Molekulargesetz, nach dem $g + 2h + l = 0$ ist, beibehalten. Von den drei Wurzeln der Gleichung (b^{**}) liegt die eine zwischen c_1^2 und c_2^2, die andere zwischen c_2^2 und c_3^2, denn der Gleichung (b^{**}) kann man folgende Form geben:

$$A(c^2 - c_2^2)(c^2 - c_3^2) + B(c^2 - c_3^2)(c^2 - c_1^2) + C(c^2 - c_1^2)(c^2 - c_2^2)$$
$$- (c^2 - c_1^2)(c^2 - c_2^2)(c^2 - c_3^2) = 0.$$

Setzt man hier der Reihe nach $c^2 = c_1^2, c_2^2, c_3^2$, so erhält man

$$> 0, \; < 0, \; > 0.$$

Da nun c_1^2, c_2^2, c_3^2 wenig von einander verschieden sind, so müssen die Differenzen $c^2 - c_1^2$, $c^2 - c_2^2$, $c^2 - c_3^2$ sehr klein sein.

Vernachlässigen wir nun, nachdem in der Gleichung (b^{**}) die Multiplication mit den Nennern ausgeführt ist, die kleinen Grössen zweiter Ordnung, so können wir statt (b^{**}) schreiben

$$\frac{\cos^2 a}{c^2 - c_1^2} + \frac{\cos^2 b}{c^2 - c_2^2} + \frac{\cos^2 c}{c^2 - c_3^2} = 0, \qquad (b^{***})$$

wodurch die Gleichung zur Berechnung von c in eine quadratische übergeht.

Um die Schwingungsrichtung zu finden, müssen wir den Ausdruck $A\cos a + B\cos b + C\cos c$ zu bestimmen suchen. Dazu setzen wir in (a.) S. 443 unsere abgekürzten Bezeichnungen ein und erhalten somit

$$\frac{h_1(c^2 - c_1^2)A}{\cos a} = \frac{h_2(c^2 - c_2^2)B}{\cos b} = \frac{h_3(c^2 - c_3^2)C}{\cos c}$$
$$= h_1 h_2 h_3 \left(\frac{A\cos a}{h_1} + \frac{B\cos b}{h_2} + \frac{C\cos c}{h_3}\right).$$

Da nun die h_1, h_2, h_3 wenig von einander verschieden sind, so ist $A\cos a + B\cos b + C\cos c$ wenig von $h_1\left(\frac{A\cos a}{h_1} + \frac{B\cos b}{h_2} + \frac{C\cos c}{h_3}\right)$

und damit von $\frac{h_1(c^2 - c_1^2)A}{h_2 h_3 \cos a}$ verschieden. Der letztere Ausdruck ist aber wenig von 0 verschieden, so dass also für unsere beiden Werthe von c der zu untersuchende Ausdruck auch nur sehr klein ist. Es entspricht demnach jeder der beiden Wurzeln von (b^{***}), eine quasitransversale Schwingung. Der dritten Wurzel c der allgemeinen Gleichung entspricht dann nach § 279 eine quasilongitudinale Vibration.

2. Polarisationsellipsoid, Elasticitätsfläche, Elasticitätsellipsoid.

Setzen wir in die Gleichung des Polarisationsellipsoides § 279 (8.) unsere Werthe von $L_2 \ldots$ ein, so erhalten wir nach einer einfachen Transformation

$$c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2 + c_3^2 z^2 + h_1 h_2 h_3 \left(\frac{x \cos a}{h_1} + \frac{y \cos b}{h_2} + \frac{z \cos c}{h_3}\right)^2 = 1.$$

Da es nach 1. zwei quasitransversale Schwingungen giebt und da die geradlinigen Schwingungen welche einer und derselben ebenen Welle entsprechen nach den Axen des Ellipsoides gehen, so kann die Wellenebene nur wenig von einem der Hauptschnitte dieses Ellipsoides verschieden sein, sie schneidet also das Ellipsoid in einer Ellipse, deren beide Axen beinahe mit zwei von den Axen des Ellipsoides zusammenfallen.

Zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit müssen wir unsere Werthe von $L_2 \ldots$ einsetzen in den Ausdruck für c^2 in § 279 5. Dadurch erhalten wir

$$c^2 = c_1^2 A^2 + c_2^2 B^2 + c_3^2 C^2 + h_1 h_2 h_3 \left(\frac{A \cos a}{h_1} + \frac{B \cos b}{h_2} + \frac{C \cos c}{h_3}\right)^2.$$

Da aber nach 1. das letzte Glied dieser Gleichung sehr klein ist, so ist nahezu

$$c^2 = c_1^2 A^2 + c_2^2 B^2 + c_3^2 C^2.$$

Trägt man nun auf der Schwingungsrichtung eine Länge c auf, so dass also $c^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $A = \frac{x}{c}$, $B = \frac{y}{c}$, $C = \frac{z}{c}$ ist, so liegen die Endpunkte dieser Längen auf einer Fläche, deren Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2 + c_3^2 z^2 \text{ ist.}$$

Diese Fläche heisst **Elasticitätsfläche**.

Wird aber auf der Schwingungsrichtung eine Länge $\frac{1}{c}$ aufgetragen, so dass also $\frac{1}{c^2} = x^2 + y^2 + z^2$, $A = cx$, $B = cy$, $C = cz$ ist, so erhält man $c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2 + c_3^2 z^2 = 1$.

Diese hierdurch gefundene Fläche heisst **Elasticitätsellipsoid**.

Sucht man nun den Durchschnitt einer Wellenebene, die nach unseren Bezeichnungen gegeben ist durch $x \cos a + y \cos b + z \cos c = 0$, mit dem Polarisationsellipsoid, so wird die Gleichung des Polarisationsellipsoides,

da dann deren letztes Glied sich auf eine kleine Grösse zweiter Ordnung reducirt, zusammenfallen mit der des Elasticitätsellipsoides. Letzteres reicht also hin zur Bestimmung der Oscillationsrichtung und Fortpflanzungsgeschwindigkeit der quasitransversalen Schwingungen. Legt man demnach eine Ebene durch den Mittelpunkt des Elasticitäts- oder Polarisationsellipsoides parallel der Wellenebene oder senkrecht zur Wellennormale, so geben die reciproken Längen der Hauptaxen der Schnittellipse die Geschwindigkeiten der beiden Wellen und die Richtungen dieser Hauptaxen die zugehörigen Schwingungsrichtungen.

Aehnliches ergiebt die Elasticitätsfläche. Aus der Art der Construction derselben verglichen mit der des Elasticitätsellipsoides geht schon hervor, dass beide Flächen einen gemeinsamen Mittelpunkt haben, dass eine Ebene, welche durch den gemeinsamen Mittelpunkt beider Flächen gelegt wird, die Elasticitätsfläche in einer geschlossenen, zweiaxigen Curve schneidet, in der zwei aufeinander senkrechte Axen den grössten und kleinsten Durchmesser dieser Schnittcurve bilden, deren Richtungen zusammenfallen mit den Hauptaxen der Schnittellipse des Elasticitätsellipsoides.

Das oben für das Elasticitätsellipsoid angegebene Verfahren der Construction zur Auffindung der Schwingungsrichtung ist demnach dasselbe, die Geschwindigkeit wird aber gegeben durch die Länge des Radius.

3. Bestimmung der Lage der optischen Hauptaxen.

Wir stellen uns zuerst folgendes allgemeine Problem. Wenn gegeben sind zwei Wellenebenen

$$x \cos a + y \cos b + z \cos c = \text{const.},$$

deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch c' und c'' bezeichnet werden mögen und deren gemeinsame Normale also mit den Coordinaten die Winkel a, b, c bildet, so sollen Ausdrücke gefunden werden, welche diese Winkel durch c', c'', c_1, c_2, c_3 bestimmen.

Die Gleichung (b^{***}) lässt sich umformen in

$$c^4 - [\cos^2 a\,(c_3^2 + c_2^2) + \cos^2 b\,(c_1^2 + c_3^2) + \cos^2 c\,(c_2^2 + c_1^2)]\,c^2 \qquad (c.)$$
$$+ \cos^2 a\, c_2^2 c_3^2 + \cos^2 b\, c_3^2 c_1^2 + \cos^2 c\, c_1^2 c_2^2 = 0.$$

Nach der Theorie der Gleichungen ist demnach, wenn c'^2 und c''^2 die Wurzeln dieser Gleichung bedeuten,

$$\cos^2 a\,(c_3^2 + c_2^2) + \cos^2 b\,(c_1^2 + c_3^2) + \cos^2 c\,(c_2^2 + c_1^2) = c'^2 + c''^2,$$
$$\cos^2 a\, c_2^2 c_3^2 + \cos^2 b\, c_3^2 c_1^2 + \cos^2 c\, c_1^2 c_2^2 = c'^2 c''^2.$$

Ferner hat man $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$ (d.), also drei Gleichungen, welche hinreichen zur Berechnung der verlangten Grössen cos a, cos b, cos c.

Die Ausrechnung giebt

$$\cos^2 a = -\frac{(c'^2 - c_1^2)(c''^2 - c_1^2)}{(c_3^2 - c_1^2)(c_1^2 - c_2^2)},$$

$$\cos^2 b = -\frac{(c'^2 - c_2^2)(c''^2 - c_2^2)}{(c_1^2 - c_2^2)(c_2^2 - c_3^2)},$$

$$\cos^2 c = -\frac{(c'^2 - c_3^2)(c''^2 - c_3^2)}{(c_2^2 - c_3^2)(c_3^2 - c_1^2)}.$$

Diese Ausdrücke geben eine Bestätigung der Behauptung über die Grössenverhältnisse von c' und c'' zu c_1, c_2, c_3 welche in 1. benutzt worden ist; denn da links nur positive Grössen stehen, muss sein

$$c_1 > c' > c_2 > c'' > c_3.$$

Die Richtung der Hauptaxen ist nun dadurch definirt, dass in diesen beide ebene Wellen mit derselben Geschwindigkeit sich fortpflanzen. Für dieselben ist demnach $c' = c'' = c_2$. Dann aber erhält man, wenn die Winkel dieser Richtung mit einem Index 0 versehen werden,

$$\cos^2 a_0 = \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2 - c_3^2}, \quad \cos^2 b_0 = 0, \quad \cos^2 c_0 = \frac{c_2^2 - c_3^2}{c_1^2 - c_3^2}.$$

Da man hier die Winkel findet durch das Quadrat der cos., so können deren Werthe positiv oder negativ sein, es giebt demnach zwei optische Axen, die mit einander einen Winkel bilden, für dessen Hälfte der cos. entweder $\sqrt{\frac{c_2^2 - c_3^2}{c_1^2 - c_3^2}}$ oder $\sqrt{\frac{c_1^2 - c_2^2}{c_1^2 - c_3^2}}$ ist.

Aus der Bedingung $c' = c_2 = c''$ ersieht man ferner, dass die Wellenebene dann das Polarisationsellipsoid oder nach 2. das Elasticitätsellipsoid in einem Kreise schneidet, also in einer Curve ohne Hauptaxen, so dass demnach die Schwingungsrichtung unbestimmt bleibt. Längs der optischen Axen findet mithin weder Doppelbrechung noch Polarisation statt.

4. Gleichung der Wellenfläche in Punktcoordinaten*).

Eine Wellenebene hat nach der Zeiteinheit zur Gleichung

$$x \cos a + y \cos b + z \cos c = c', \tag{e.}$$

wo $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ betrachtet werden können als Functionen der Parameter c' und c'' nach den in 3. aufgestellten Gleichungen. Man erhält dann die Gleichung der Umhüllungsfläche d. i. die Wellenfläche, wenn man die beiden Parameter c' und c'' eliminirt aus (e.) und den beiden Derivirten:

$$x\frac{\partial \cos a}{\partial c'} + y\frac{\partial \cos b}{\partial c'} + z\frac{\partial \cos c}{\partial c'} = 1,$$

$$x\frac{\partial \cos a}{\partial c''} + y\frac{\partial \cos b}{\partial c''} + z\frac{\partial \cos c}{\partial c''} = 0.$$

Die Ausführung der angedeuteten Differentiation giebt

$$\frac{x \cos a}{c'^2 - c_1^2} + \frac{y \cos b}{c'^2 - c_2^2} + \frac{z \cos c}{c'^2 - c_3^2} = \frac{1}{c'} \tag{f.}$$

$$\frac{x \cos a}{c''^2 - c_1^2} + \frac{y \cos b}{c''^2 - c_2^2} + \frac{z \cos c}{c''^2 - c_3^2} = 0. \tag{g.}$$

Der Gleichung (e.) genügt man durch folgende Formeln

*) Lamé, a. a. O.

$$\left.\begin{aligned} x &= A\,\frac{\cos a}{c'^2 - c_1^2} + c'\cos a, \\ y &= A\,\frac{\cos b}{c'^2 - c_2^2} + c'\cos b, \\ z &= A\,\frac{\cos c}{c'^2 - c_3^2} + c'\cos c, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(h.)}$$

wenn man die Geschwindigkeitsgleichung (b^{***}) und die bekannte cos-Gleichung berücksichtigt und mit A eine vorläufig unbestimmte Hülfsgrösse bezeichnet.

Die Gleichung (f) geht unter Berücksichtigung von (b^{***}) durch Substitution dieser Werthe von x, y, z über in

$$A\left(\frac{\cos^2 a}{(c'^2 - c_1^2)^2} + \frac{\cos^2 b}{(c'^2 - c_2^2)^2} + \frac{\cos^2 c}{(c'^2 - c_3^2)^2}\right) = \frac{1}{c'}. \qquad \text{(i.)}$$

Diese Gleichung giebt die Bedingung für unsere Hülfsgrösse A.

Setzt man endlich die angenommenen Werthe (h) in (g) ein, so erhält man eine Gleichung, die besteht aus A multiplicirt mit dem Ausdruck

$$\frac{\cos^2 a}{(c'^2 - c_1^2)(c''^2 - c_1^2)} + \frac{\cos^2 b}{(c'^2 - c_2^2)(c''^2 - c_2^2)} + \frac{\cos^2 c}{(c'^2 - c_3^2)(c''^2 - c_3^2)}.$$

Dass aber dieser Ausdruck gleich Null ist, findet man leicht, wenn man in (b^{***}) einmal die Wurzel c', dann c'' einsetzt und die so erhaltenen Resultate von einander abzieht.

Wir finden demnach die Gleichung der Wellenfläche, wenn wir statt aus (e.), (f.), (g.) c', c'' zu eliminiren, dies thun aus (h.) unter Berücksichtigung von (i.).

Setzen wir nun r den Radiusvector der gesuchten Wellenfläche, so ergiebt sich nach (b^{***})

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = A^2\left(\frac{\cos^2 a}{(c'^2 - c_1^2)^2} + \frac{\cos^2 b}{(c'^2 - c_2^2)^2} + \frac{\cos^2 c}{(c'^2 - c_3^2)^2}\right) + c'^2.$$

Dies ist nach (i) $r^2 = \frac{A}{c'} + c'^2$ oder $A = c'(r^2 - c'^2)$.

Wird endlich dieser Werth in den Ausdruck für x in (h) eingesetzt, so erhält man

$$x = \frac{c'\cos a}{c'^2 - c_1^2}(r^2 - c_1^2),$$

oder durch Quadriren und einfacher Transformation

$$\frac{x^2}{r_2 - c_1^2} = c'^2\,\frac{\cos^2 a}{(c'^2 - c_1^2)^2}(r^2 - c'^2 + c'^2 - c_1^2).$$

Dem entsprechend kann man Werthe finden für

$$\frac{y^2}{r^2 - c_2^2}, \quad \frac{z^2}{r^2 - c_3^2},$$

durch deren Addition sich wegen (b^{***}) ergiebt

$$\frac{x^2}{r^2-c_1^2}+\frac{y^2}{r^2-c_2^2}+\frac{z^2}{r^2-c_3^2}=c'^2(r^2-c'^2)\times$$
$$\left(\frac{\cos^2 a}{(c'^2-c_1^2)^2}+\frac{\cos^2 b}{(c'^2-c_2^2)^2}+\frac{\cos^2 c}{(c'^2-c_3^2)^2}\right).$$

Durch Gleichsetzung der beiden für A erhaltenen Werthe

$$A=\frac{1}{c'}:\left(\frac{\cos^2 a}{(c'^2-c_1^2)^2}+\frac{\cos^2 b}{(c'^2-c_2^2)^2}+\frac{\cos^2 c}{(c'^2-c_3^2)^2}\right)=c'(r^2-c'^2)$$

übersieht man, dass die rechte Seite der obigen Gleichung gleich 1 ist. Die gesuchte Gleichung der Wellenfläche lautet demnach

$$\frac{x^2}{r^2-c_1^2}+\frac{y^2}{r^2-c_2^2}+\frac{z^2}{r^2-c_3^2}=1.$$

Diese Gleichung kann man umformen durch Entfernung der Nenner, und erhält dann die Gleichung wie sie Fresnel und endlich wie sie Hamilton gegeben hat

$$r^2(c_1^2x^2+c_2^2y^2+c_3^2z^2)-[c_1^2(c_2^2+c_3^2)x^2+c_2^2(c_3^2+c_1^2)y^2$$
$$+c_3^2(c_1^2+c_2^2)z^2]+c_1^2c_2^2c_3^2=0 \text{ oder}$$
$$\frac{c_1^2x^2}{r^2-c_1^2}+\frac{c_2^2y^2}{r^2-c_2^2}+\frac{c_3^2z^2}{r^2-c_3^2}=0.$$

Man kann eine für spätere Untersuchungen (§ 382.) wichtige Eigenschaft dieser Fläche sofort hier ableiten.

Wenn man setzt

$$\frac{\cos a}{c'}=\frac{x'}{c_2c_3},\quad \frac{\cos b}{c'}=\frac{y'}{c_3c_1},\quad \frac{\cos c}{c'}=\frac{z'}{c_1c_2}$$

und diese Werthe in (d.) substituirt, so erhält man

$$\frac{1}{c'^2}=\frac{c_1^2x'^2+c_2^2y'^2+c_3^2z'^2}{c_1^2c_2^2c_3^2}.$$

Schreibt man dann in (c) statt c die Grösse c', dividirt durch c'^4, ersetzt die Werthe $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$ durch x', y', z' und führt endlich den eben gefundenen Werth von $\frac{1}{c'^2}$ ein, so erhält man

$$r'^2(c_1^2x'^2+c_2^2y'^2+c_3^2z'^2)-[c_1^2(c_2^2+c_3^2)x'^2+c_2(c_3^2+c_1^2)y'^2$$
$$+c_3^2(c_1^2+c_2^2)z'^2]+c_1^2c_2^2c_3^2=0. \qquad (k.)$$

Es wird ferner mit Hülfe der Werthe von x', y', z' aus der Gleichung der Wellenebene (e.)

$$\frac{x'x}{c_2c_3}+\frac{y'y}{c_3c_1}+\frac{z'z}{c_1c_2}=1. \qquad (l.)$$

Nach dieser Rechnung lässt sich die Aufgabe, die Wellenfläche zu suchen, so ausdrücken: Es ist die Gleichung der Oberfläche zu bestimmen, welche von (l.) eingehüllt wird, wenn die x', y', z' der Gleichung (k) genügen. Da nun aber der Punkt, dessen Coordinaten x', y', z' sind, angesehen werden kann als der Pol der Ebene (l.) in Bezug auf das Ellipsoid

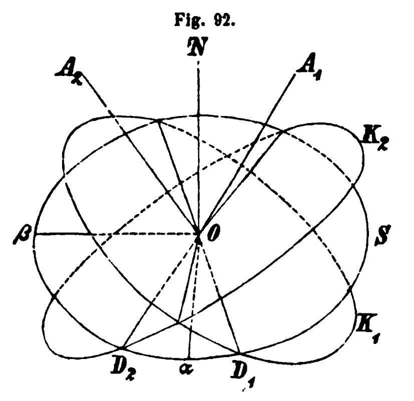
$$\frac{x^2}{c_2c_3}+\frac{y^2}{c_3c_1}+\frac{z^2}{c_1c_2}=1, \qquad (m.)$$

und die Gleichung (k.) mit der oben gefundenen Gleichung der Wellenfläche übereinstimmt, so erhalten wir folgenden allgemeinen Satz: Wenn die Ebene (e) die Gleichung einer die Wellenfläche berührenden Ebene sein soll, so muss ihr Pol in Bezug auf das Ellipsoid (m.) ein Punkt der Wellenfläche sein, es muss also dann erlaubt sein, die Gleichung (e.) auf die Form (l.) zu bringen, wo die x', y', z' der Gleichung der Wellenfläche genügen.

5. Ausdruck der Schwingungsrichtung und Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenebene durch die Lage der Wellennormale gegen die optischen Axen.

Sei in Figur 92 die den beiden in eine Ebene S zusammenfallenden Wellenebenen gemeinsame Wellennormale ON und S die Schnittcurve dieser Wellenebene mit dem Elasticitätsellipsoid, so bezeichnen nach 2. $O\alpha$, $O\beta$, die Richtungen der Hauptaxen, die der Schwingungen und $\frac{1}{O\alpha}$, $\frac{1}{O\beta}$ geben die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Seien ferner OA_1, OA_2 die Richtungen der optischen Hauptaxen und K_1, K_2 die zugehörigen senkrechten Kreisschnitte des Elasticitätsellipsoides. Nun ist gegeben $\angle NOA_1 = \varphi_1$, $\angle NOA_2 = \varphi_2$ und zu berechnen $\angle A_1O\alpha = \psi_1$, $\angle A_2O\alpha = \psi_2$, $\angle A_1O\beta = \psi_1'$, $\angle A_2O\beta = \psi_2'$ und $\frac{1}{O\alpha} = c'$, $\frac{1}{O\beta} = c''$. Da $OD_1 = OD_2$, als Schnittlinie der Kreisschnitte mit der Ellipse, $= \frac{1}{c_2}$ ist, so muss, nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipse $O\alpha$, $O\beta$ als Richtungen der Hauptaxen die Winkel, welche die OD_1 und OD_2 mit einander einschliessen, halbiren. Die Oscillationsebenen $NO\alpha$ und $NO\beta$ halbiren also auch die Winkel, welche zwei durch O auf OD_1 und OD_2 senkrecht gelegte Ebenen einschliessen. Die Normalebene auf OD_1 (OD_2) ist aber auch senkrecht auf S und K_1 (K_2) geht also durch deren Normalen ON und OA_1 (OA_2).

Fig. 92.

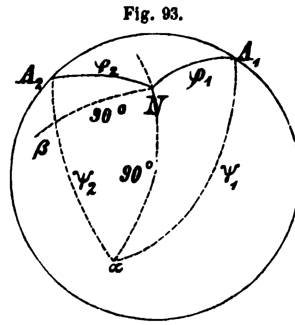


Hieraus ergiebt sich der Satz: Legt man durch die Normale eine Wellenebene und durch je eine der optischen Axen Ebenen, so sind die Halbirungsebenen der von ihnen gebildeten Körperwinkel die Oscillationsebenen der beiden Schaaren von Wellen, die sich in dem krystallinischen Mittel parallel mit der ersterwähnten Ebene fortpflanzen können.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten lassen sich dann wie folgt be-

rechnen. Wir beschreiben um den Mittelpunkt des Elasticitätsellipsoides eine Kugel vom Radius 1. Die Ausgänge der optischen Axen und Wellennormale seien A_1, A_2 und N (Fig. 93), dann halbiren die grössten Kreise der Oscillationsebenen die sphärischen Winkel $A_2 N A_1$. Sind dann auf diesen grössten Kreisen $N\alpha = N\beta =$ einem Quadranten, so werden α und β die Endpunkte zweier Durchmesser in der Wellenebene sein. Setzen wir ferner $\angle A_1 N A_2 = \delta$, also $\angle \alpha N A_1 = \angle \alpha N A_2 = 180 - \frac{1}{2}\delta$, so erhalten wir in den einzelnen Dreiecken folgende Beziehungen:

Fig. 93.



$$\triangle \alpha N A_1, \ \cos\psi_1 = - \cos {}^1\!/\!_2\,\delta \sin\varphi_1, \quad (1.)$$
$$\triangle \alpha N A_2, \ \cos\psi_2 = - \cos {}^1\!/\!_2\,\delta \sin\varphi_2, \quad (2.)$$
$$\triangle \beta N A_1, \ \cos\psi_1' = - \sin {}^1\!/\!_2\,\delta \sin\varphi_1, \quad (3.)$$
$$\triangle \beta N A_2, \ \cos\psi_2' = \sin {}^1\!/\!_2\,\delta \sin\varphi_2, \quad (4.)$$
$$\triangle N A_1 A_2, \ \cos\delta = \frac{\cos A_1 A_2 - \cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}. \quad (5.)$$

Aus (5.) kann gebildet werden

$$1 - \cos\delta = 2\sin^2 {}^1\!/\!_2\,\delta = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos A_1 A_2}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2},$$
$$1 + \cos\delta = 2\cos^2 {}^1\!/\!_2\,\delta = \frac{\cos A_1 A_2 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}.$$

Werden diese Ausdrücke in (1.) bis (4.) eingesetzt, so finden wir die gesuchten Werthe von ψ, welche die Schwingungsrichtung geben, ausgedrückt durch die φ und $A_1 A_2$, nämlich

$$\cos\psi_1 = -\sqrt{\frac{\cos A_1 A_2 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}}\,\sin\varphi_1$$

und ebenso die anderen.

Nachdem nun gegeben ist die Lage der Schwingungen, so sind nach 2. die reciproken Längen der Hauptaxen der Schnittellipse der Wellenebene mit dem Elasticitätsellipsoid die verlangten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Sei r' die eine Hauptaxe und bedeuten u', v', w' die cos. der Winkel, welche r' mit den Coordinatenaxen bildet, so sind die Coordinaten des Endpunktes

$$x' = u' r', \ y' = v' r', \ z' = w' r'.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung des Elasticitätsellipsoides eingesetzt, so erhält man

$$r'^2 (c_1^2 u'^2 + c_2^2 v'^2 + c_3^2 w'^2) = 1, \text{ oder, da } u'^2 + v'^2 + w'^2 = 1 \text{ ist,}$$
$$r'^2 \left[(c_1^2 - c_2^2) u'^2 + (c_3^2 - c_2^2) w'^2 + c_2^2\right] = 1.$$

Weil ferner mit Hilfe der Werthe von $\cos a_0$, $\cos b_0$, $\cos c_0$ aus 3. ist

$$\cos\varphi_1 = u' \cos a_0 + w' \cos c_0, \quad \cos\psi_2 = - u' \cos a_0 + w' \cos c_0,$$

oder

$$u' = \frac{\cos\psi_1 - \cos\psi_2}{2\cos a_0}, \quad w' = \frac{\cos\psi_1 + \cos\psi_2}{2\cos c_0},$$

so ist

$$r'^2\left[\frac{c_1^2 - c_2^2}{4\cos^2 a_0}(\cos\psi_1 - \cos\psi_2)^2 + \frac{c_3^2 - c_2^2}{4\cos^2 c_0}(\cos\psi_1 + \cos\psi_2)^2 + c_2^2\right] = 1,$$

oder nach Einsetzung der Werthe $\cos a_0$, $\cos c_0$ von 3.,

$$c'^2 = \frac{1}{r'^2} = c_2^2 - (c_1^2 - c_3^2)\cos\psi_1 \cos\psi_2.$$

Setzen wir dann die oben berechneten Werthe von $\cos\psi_1$, $\cos\psi_2$ ein und bedenken, dass

$$\cos A_1 A_2 = \cos^2 \tfrac{1}{2} A_1 A_2 - \sin^2 \tfrac{1}{2} A_1 A_2 = \frac{2c_2^2 - c_1^2 - c_3^2}{c_1^2 - c_3^2}$$

ist, so erhalten wir die gesuchten Ausdrücke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

$$\left.\begin{aligned} c'^2 &= \frac{c_1^2 + c_3^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_3^2}{2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ c''^2 &= \frac{c_1^2 + c_3^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_3^2}{2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}\right\} \quad \text{(n.)}$$

6. Gleichung der Wellenfläche in Plancoordinaten.

Unter Plancoordinaten, den Coordinaten einer Ebene, verstehen wir die reciproken Werthe der Segmente, welche die Ebene von den Coordinatenaxen abschneidet mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem das Segment auf der positiven oder negativen Seite liegt. Wir wollen nun den Zusammenhang dieser Segmente aller derjenigen Ebenen suchen, welche die Wellenfläche berühren, d. h. die Gleichung der Wellenfläche in Plancoordinaten.

Nach den Ausdrücken (n.) in 5. können wir als Tangentialebenen an die gesuchte zusammengesetzte Wellenfläche, deren Radiivectores r seien, diejenigen Ebenen betrachten, die bestimmt sind durch r und φ_1, φ_2, wenn

$$r^2 = c'^2 = s + t\cos(\varphi_1 + \varphi_2),$$
$$r^2 = c''^2 = s + t\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

gilt, wo zur Abkürzung

$$\frac{c_1^2 + c_3^2}{2} = s \text{ und } \frac{c_1^2 - c_3^2}{2} = t$$

gesetzt ist. Ferner ist klar, dass von den Ebenen, welche auf der durch φ_1 und φ_2 bestimmten Richtung senkrecht sind, nur diejenigen vier Ebenen, aber auch alle vier, die Wellenfläche berühren, für die man hat

$$r = \pm c' \text{ und } r = \pm c''.$$

Als Gleichung der Wellenfläche gilt demnach

$$(r^2 - c'^2)(r^2 - c''^2) = 0$$

oder

$$r^4 - (c'^2 + c''^2)r^2 + c'^2 c''^2 = 0,$$

wo ist $c'^2 + c''^2 = 2s + 2t\cos\varphi_1 \cos\varphi_2,$

$$c'^2 c''^2 = s^2 - t^2 - t^2(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2) + 2st\cos\varphi_1\cos\varphi_2.$$

In diese Ausdrücke müssen nun Plancoordinaten eingeführt werden.

Die Gleichung einer Wellenebene, die durch r, φ_1 und φ_2 bestimmt wird, ist nach den schon immer gebrauchten Bezeichnungen

$$x\cos a + y\cos b + z\cos c = r.$$

In Plancoordinaten erhält die Gleichung dieser Ebene die Form

$$xu + yv + zw = 1,$$

so dass also ist

$$u = \frac{\cos a}{r},\ v = \frac{\cos b}{r},\ w = \frac{\cos c}{r},\ r^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Nach der bekannten Formel für den cos. des Winkels zweier Richtungen ist

$$\cos\varphi_1 = \cos a_0 \cos a + \cos c_0 \cos c = r(u\cos a_0 + w\cos c_0),$$
$$\cos\varphi_2 = -\cos a_0 \cos a + \cos c_0 \cos c = r(-u\cos a_0 + w\cos c_0).$$

Setzen wir diese Ausdrücke ein, so erhalten wir

$$c'^2 + c''^2 = 2s + 2tr^2(\cos^2 c_0\, w^2 + \cos^2 a_0\, u^2),$$
$$= 2r^2[u^2(s - t\cos^2 a_0) + v^2 s + w^2(s + t\cos^2 c_0)],$$
$$= r^2[u^2(c_2^2 + c_3^2) + v^2(c_3^2 + c_1^2) + w^2(c_1^2 + c_2^2)].$$
$$c'^2 c''^2 = s^2 - t^2 + 2t^2r^2(\cos^2 a_0\, u^2 - \cos^2 c_0\, w^2) +$$
$$2str^2(\cos^2 c_0\, w^2 - \cos^2 a_0\, u^2),$$
$$= r^2(u^2 c_2^2 c_3^2 + v^2 c_1^2 c_3^2 + w^2 c_1^2 c_2^2).$$

Durch Einführung dieser Ausdrücke und $r^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2}$ in die obige Form der Wellenfläche geht diese nach einer einfachen Transformation über in

$$(u^2 + v^2 + w^2)(u^2 c_2^2 c_3^2 + v^2 c_3^2 c_1^2 + w^2 c_1^2 c_2^2)$$
$$- [u^2(c_2^2 + c_3^2) + v^2(c_3^2 + c_1^2) + w^2(c_1^2 + c_2^2)] + 1 = 0,$$

oder, da $r^2(u^2 + v^2 + w^2) = 1$ ist, nach Division mit $u^2 + v^2 + w^2$

$$r^4(u^2 + v^2 + w^2) - r^2[u^2(c_2^2 + c_3^2) + v^2(c_3^2 + c_1^2) + w^2(c_1^2 + c_2^2)]$$
$$+ [u^2 c_2^2 c_3^2 + v^2 c_3^2 c_1^2 + w^2 c_1^2 c_2^2] = 0.$$

Hierfür kann gesetzt werden

$$\frac{u^2}{r^2 - c_1^2} + \frac{v^2}{r^2 - c_2^2} + \frac{w^2}{r^2 - c_3^2} = 0,$$

oder, wenn

$$\frac{1}{r^2} = u^2 + v^2 + w^2 = \varrho^2$$

eingeführt wird,

$$\frac{u^2}{1 - c_1^2\varrho^2} + \frac{v^2}{1 - c_2^2\varrho^2} + \frac{w^2}{1 - c_3^2\varrho^2} = 0.$$

7. Discussion der Wellenfläche.

Die Gleichung der Wellenfläche in Punktcoordinaten ist nach 4.

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c_1^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c_2^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c_3^2} = 1,$$

oder

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,[c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2 + c_3^2 z^2]$$
$$- [c_1^2 (c_2^2 + c_3^2)\, x^2 + c_2^2 (c_3^2 + c_1^2)\, y^2 + c_3^2 (c_1^2 + c_2^2)\, z^2] + c_1^2 c_2^2 c_3^2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen geht sofort hervor, dass die Fläche symmetrisch ist in Bezug auf die drei Coordinatenebenen.

a) Untersuchung der Schnittcurven mit den Coordinatenebenen.

Die Schnittlinie mit der $x\,y$ Ebene ist

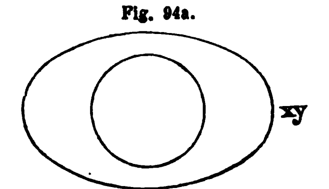
$$0 = c_1^2 c_2^2 c_3^2 - [c_1^2 (c_2^2 + c_3^2)\, x^2 + c_2^2 (c_3^2 + c_1^2)\, y^2]$$
$$+ (x^2 + y^2)(c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2),$$

oder

$$(c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2 + c_1^2 c_2^2)(x^2 + y^2 - c_3^2) = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet, da $c_1 > c_2 > c_3$ ist, eine Ellipse mit den Halbaxen c_1, c_2, welche einen Kreis mit dem Halbmesser c_3 umhüllt, ohne ihn zu berühren. (Fig. 94[a]).

Fig. 94a.



Für die Schnittcurve in der $x\,z$ Ebene ist $y = 0$, also

$$(c_1^2 x^2 + c_3^2 z^2 - c_1^2 c_3^2) \times$$
$$(x^2 + z^2 - c_2^2) = 0,$$

d. i. eine Ellipse mit den Halbaxen c_1, c_3, welche einen Kreis mit dem Halbmesser c_2 in vier Punkten schneidet. (Fig. 94[b]).

Fig. 94b.

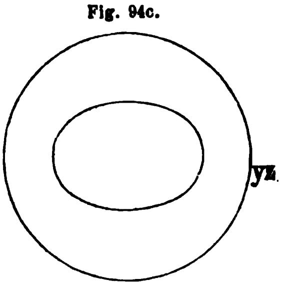
xz

Für die Schnittcurve in der $y\,z$ Ebene ist $x = 0$, also

$$(c_3^2 z^2 + c_2^2 y^2 - c_2^2 c_3^2) \times$$
$$(z^2 + y^2 - c^2) = 0,$$

d. i. eine Ellipse mit den Halbaxen c_2, c_3, welche von einem Kreise mit dem Halbmesser c_1 umhüllt wird. (Fig. 94[c]).

Fig. 94c.



Dieselben Resultate kann man aus der Gleichung der Wellenfläche in 6. erhalten.

b) Singuläre Punkte der Wellenfläche.

Bezeichnet man die Gleichung der Wellenfläche in Punktcoordinaten mit f, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,[c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2 + c_3^2 z^2 - c_1^2 (c_2^2 + c_3^2) + c_1^2 (x^2 + y^2 + z^2)],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,[c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2 + c_3^2 z^2 - c_2^2 (c_3^2 + c_1^2) + c_2^2 (x^2 + y^2 + z^2)],$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z\,[c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2 + c_3^2 z^2 - c_3^2 (c_1^2 + c_2^2) + c_3^2 (x^2 + y^2 + z^2)].$$

Da nun die Gleichung der die Fläche in x', y' z' berührenden Ebene ist

$$\frac{\partial f}{\partial x'}(x - x') + \frac{\partial f}{\partial y'}(y - y') + \frac{\partial f}{\partial z'}(z - z') = 0,$$

so sind singuläre Punkte solche, für die die Differentialquotienten ver-

schwinden. Die reellen Punkte der Fläche, welche diese Differentialquotienten verschwinden machen, hängen durch folgende Gleichungen zusammen:

$$y = 0,\ x^2 + z^2 = c_2^2,\ \frac{x^2}{c_3^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1.$$

Die betreffenden Punkte sind also in der xzEbene die vier Durchschnittspunkte des Kreises und der Ellipse. Die Coordinaten dieser Punkte sind

$$x'^2 = \frac{c_3^2(c_2^2 - c_1^2)}{c_3^2 - c_1^2},\quad y' = 0,\quad z'^2 = \frac{c_1^2(c_3^2 - c_2^2)}{c_3^2 - c_1^2}.$$

Zur Aufstellung der Gleichung der Berührungskegel in diesen Punkten berechnet man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = 8\,c_1^2\,x'^2 = 8\,c_1^2\,c_3^2\,\frac{c_2^2 - c_1^2}{c_3^2 - c_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 2\,(c_1^2 - c_2^2)\,(c_3^2 - c_2^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} = 8\,c_3^2\,z'^2 = 8\,c_1^2\,c_3^2\,\frac{c_3^2 - c_2^2}{c_3^2 - c_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial z'} = 4\,(c_1^2 + c_3^2)\,x'\,z' = 4\,c_1\,c_3\,(c_1^2 + c_3^2)\sqrt{\frac{(c_2^2 - c_1^2)(c_3^2 - c_2^2)}{c_3^2 - c_1^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z'} = 0.$$

Durch Einführung dieser Werthe in die allgemeine Form der Gleichung des Berührungskegels:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}(x - x')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(y - y')^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2}(z - z')^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial y'}(x - x')(y - y')$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial z'}(x - x')\,(z - z') + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z'}(y - y')\,(z - z') = 0$$

erhält man

$$c_1^2\,x'^2\,(x - x')^2 - \tfrac{1}{4}(c_2^2 - c_1^2)\,(c_3^2 - c_2^2)\,(y - y')^2 + c_3^2\,z'^2\,(z - z')^2$$
$$+ (c_1^2 + c_3^2)\,x'\,z'\,(x - x')\,(z - z') = 0$$

oder

$$c_1^2\,c_3^2\,(c_2^2 - c_1^2)\,(x - x')^2 - \tfrac{1}{4}(c_3^2 - c_1^2)\,(c_1^2 - c_2^2)\,(c_3^2 - c_2^2)\,(y - y')^2 +$$
$$c_1^2\,c_3^2\,(c_3^2 - c_2^2)\,(z - z')^2 + c_1\,c_3\,(c_1^2 + c_3^2)\sqrt{(c_2^2 - c_1^2)(c_3^2 - c_2^2)}\ \times$$
$$(x - x')\,(z - z') = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegels des zweiten Grades, dessen Spitze in den singulären Punkt fällt und von dem ein Axialschnitt in der xzEbene liegt. Dieser Hauptschnitt besteht aus den Tangenten des Kreises und der Ellipse und die Halbirungslinie des stumpfen Winkels dieser Tangenten ist die Axe des Kegels.

c) Singuläre Tangentialebenen der Wellenfläche.

Dazu gehen wir aus von der Gleichung der Wellenfläche in Plancoordinaten, wie sie in 6. gegeben ist, nämlich

$$F = (u^2 + v^2 + w^2)\,(u^2\,c_2^2\,c_3^2 + v^2\,c_3^2\,c_1^2 + w^2\,c_1^2\,c_2^2)$$
$$- [u^2(c_2^2 + c_3^2) + v^2(c_3^2 + c_1^2) + w^2(c_1^2 + c_2^2)] + 1 = 0.$$

Die allgemeine Form der Berührungsebene im Punkte u′, v′, w′ ist dann

$$\frac{\partial F}{\partial u'}(u-u')+\frac{\partial F}{\partial v}(v-v')+\frac{\partial F}{\partial w}(w-w')=0.$$

Suchen wir nun die Werthe von u′, v′ w′, für die $\frac{\partial F}{\partial u'}, \frac{\partial F}{\partial v'}, \frac{\partial F}{\partial w'}$ verschwinden, so erhalten wir eine Berührungsebene, welche die Fläche in einer Reihe von Punkten berührt. Wir finden dann die Berührungscurve durch eine Gleichung, die der des Berührungskegels in b) analog ist.

Die Ausführung der verlangten Differentiation giebt

$$\frac{\partial F}{\partial u}=2u[u^2c_2^2c_3^2+v^2c_3^2c_1^2+w^2c_1^2c_2^2+c_2^2c_3^2(u^2+v^2+w^2)-(c_2^2+c_3^2)],$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}=2v[u^2c_2^2c_3^2+v^2c_3^2c_1^2+w^2c_1^2c_2^2+c_1^2c_3^2(u^2+v^2+w^2)-(c_3^2+c_1^2)],$$

$$\frac{\partial F}{\partial w}=2w[u^2c_2^2c_3^2+v^2c_3^2c_1^2+w^2c_1^2c_2^2+c_2^2c_1^2(u^2+v^2+w^2)-(c_1^2+c_2^2)].$$

Setzen wir diese Werthe gleich Null, so ergeben sich zunächst folgende Systeme von zusammengehörigen Werthen von u, v, w.

$$v=0,$$
$$u^2c_2^2c_3^2+w^2c_1^2c_2^2+c_2^2c_3^2(u^2+w^2)-(c_2^2+c_3^2)=0,$$
$$u^2c_2^2c_3^2+w^2c_1^2c_2^2+c_2^2c_1^2(u^2+w^2)-(c_1^2+c_2^2)=0.$$

Die zwei anderen Systeme, welche beginnen mit u = 0 und w = 0, geben nicht Punkte der Wellenfläche. Statt der beiden letzteren Gleichungen erhalten wir zwei einfachere, indem wir erstens dieselben von einander subtrahiren und dann, indem wir aus beiden u^2+w^2 eliminiren:

$$c_2^2(u^2+w^2)=1,$$
$$u^2c_3^2+w^2c_1^2=1.$$

Die singulären Tangentialebenen sind demnach der y Axe parallel und berühren beide Durchschnittscurven in der xzEbene.

Die Plancoordinaten dieser Berührungsebenen sind demnach

$$u'^2=\frac{1}{c_2^2}\frac{c_2^2-c_1^2}{c_3^2-c_1^2},\quad v'=0,\quad w'^2=\frac{1}{c_2^2}\frac{c_3^2-c_2^2}{c_3^2-c_1^2}.$$

Die vier Ebenen, welche durch die Doppeltangenten des Hauptschnittes xz senkrecht auf diese gelegt werden, sind demnach singuläre Tangentialebenen der Wellenfläche.

Zur Bestimmung der Berührungscurve, deren Gleichung analog der des Berührungskegels der vorhergehenden Untersuchung ist, müssen die zweiten Differentialquotienten entwickelt werden.

Die ausgeführte Rechnung giebt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}=8c_2^2c_3^2u'^2=8\frac{c_3^2(c_2^2-c_1^2)}{c_3^2-c_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v'^2}=-2\frac{(c_3^2-c_2^2)(c_2^2-c_1^2)}{c_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial w'^2}=8c_1^2c_2^2w'^2=8\frac{c_1^2(c_3^2-c_2^2)}{c_3^2-c_1^2}.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial w'} = 4\, c_2^2 (c_1^2 + c_3^2)\, u' w' = \pm\, 4\, \frac{(c_1^2 + c_3^2) \sqrt{(c_3^2 - c_2^2)(c_2^2 - c_1^2)}}{c_3^2 - c_1^2}.$$

Das Vorzeichen dieses Werthes richtet sich nach dem von u' und w'. Da aber die Berührungspunkte für die vier Quadranten der xz Ebene wegen der vorhandenen Symmetrie der Wellenfläche gleichgelegen sind, so wird es der Allgemeinheit der Untersuchung keinen Abbruch thun, wenn wir immer nur das $+$Zeichen nehmen.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v' \partial w'} = 0. \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial v'} = 0.$$

Die Gleichung der Berührungscurve ist demnach

$$c_1^2 c_3^2 (c_2^2 - c_1^2)(u - u')^2 - \tfrac{1}{4}(c_3^2 - c_2^2)(c_2^2 - c_1^2)(c_3^2 - c_1^2)(v - v')^2$$
$$+ c_2^2 c_1^2 (c_3^2 - c_2^2)(w - w')^2 + c_2^2 (c_1^2 + c_3^2) \sqrt{(c_3^2 - c_2^2)\, c_2^2 - c_1^2} \times$$
$$(u - u')(w - w') = 0.$$

Um die Art der Curven näher zu bestimmen, setzen wir $w = 0$ und finden so deren Projection auf die xy Ebene. Die daraus resultirende Gleichung hat die Form

$$A (u - u')^2 + B w'^2 + C (v - v')^2 + D (u - u') w' = 0.$$

Dies ist die Plancoordinaten-Gleichung einer Ellipse, deren eine Axe in die x Axe fällt, folglich ist die Berührungscurve selbst eine Ellipse, deren Axe in die Doppeltangente fällt, deren Scheitel die Berührungspunkte der letzteren mit Kreis und Ellipse sind.

Setzt man in die Gleichung dieser Projection $u = 0$, so erhält man

$$\tfrac{1}{4} (c_3^2 - c_1^2)(c_3^2 - c_2^2)(c_2^2 - c_1^2)\, v^2 = c_2^2 (c_3^2 - c_1^2).$$

Die beiden Wurzeln v sind die reciproken Werthe der Segmente, welche die mit der x Axe parallelen Tangenten von der y Axe abschneiden, d. i. also der reciproken Werthe der auf der xz Ebene senkrechten Halbaxe der Berührungscurve selbst. Dies ist also

$$l = \frac{\sqrt{(c_3^2 - c_2^2)(c_2^2 - c_1^2)}}{2\, c_2}.$$

Setzen wir $v = 0$ in der Gleichung der Projection, so erhalten wir zwei Werthe von u, die uns die Abstände der Scheitel von dem Coordinatenanfang geben. Dies giebt, da $v' = 0$ ist

$$c_3^2 (c_2^2 - c_1^2) u'^2 - [2 c_3^2 (c_2^2 - c_1^2)\, u' + (c_1^2 + c_3^2) \sqrt{(c_3^2 - c_2^2)(_2^2 - c_1^2)}\, w'] u'$$
$$+ c_3^2 (c_2^2 - c_1^2) u'^2 + c_1^2 (c_3^2 - c_2^2) w'^2 + (c_1^2 + c_3^2) \sqrt{(c_3^2 - c_2^2)(c_2^2 - c_1^2)}\, u' w' = 0.$$

Werden nun hierin die Werthe von $u' w'$ eingesetzt, und dann $\frac{1}{u} = d$ (Fig. 95) für die Entfernung gesetzt, so ist zur Berechnung von d.

$$d^2 - \frac{1}{c_2} \sqrt{\frac{c_2^2 - c_1^2}{c_3^2 - c_1^2}}\, (c_2^2 - c_3^2)\, d + \frac{c_3^2 (c_2^2 - c_1^2)}{c_3^2 - c_1^2} = 0.$$

Die Differenz der Wurzeln dieser Gleichung ist 2ϱ, die Länge der Axe der Projection auf der xy Ebene.

Dies ist $\varrho = \frac{1}{2c_2}(c_3^2 - c_2^2)\sqrt{\frac{c_2^2 - c_1^2}{c_3^2 - c_1^2}}$.

Bedeutet endlich $2l'$ die Länge der Axe der Berührungscurve selbst, so ist

$$\varrho = l' \cos c_0, \; l' = \frac{\varrho}{\cos c_0}$$

$$= \frac{1}{2c_2}\sqrt{(c_2^2 - c_1^2)(c_3^2 - c_2^2)} = l.$$

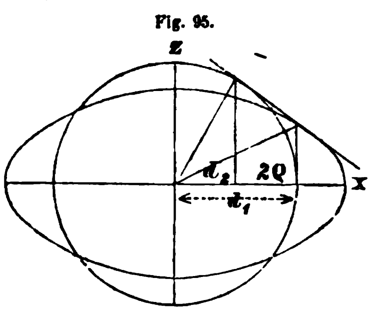


Fig. 95.

Es ist also die Berührungscurve eine Ellipse, deren beide Hauptaxen l und l' einander gleich sind d. i. ein Kreis, dessen Durchmesser gleich ist der Entfernung der Doppelberührungspunkte in der xz Ebene.

8. Richtung der gebrochenen Welle und des gebrochenen Strahles.

Wir benutzen hier die in § 373, 6. eingeführten Bezeichnungen mit der nöthigen Verallgemeinerung für zwei optische Axen. $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ sind die cos. der Winkel, welche die beiden optischen Axen mit den Coordinatenaxen bilden, r', r'' die gesuchten Winkel, welche die Normalen der gebrochenen Wellenebenen mit dem Einfallslothe einschliessen, φ_1', φ_2'; φ_1'', φ_2'' behalten die Bedeutung, welche ihnen in 5. gegeben ist, nur werden die Winkel mit den zwei verschiedenen Wellennormalen durch angebrachte Accente unterschieden. Die z Axe falle mit dem Einfallsloth zusammen und die x Axe liege in der Einfallsebene. In Folge der bekannten cos. Gleichung ist dann dem § 373, 6. (3.) entsprechend

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1' &= u_1 \sin r' + w_1 \cos r', \\ \cos\varphi_2' &= u_2 \sin r' + w_2 \cos r', \\ \cos\varphi_1'' &= u_1 \sin r'' + w_1 \cos r'', \\ \cos\varphi_2'' &= u_2 \sin r'' + w_2 \cos r'', \end{aligned} \tag{o.}$$

Das Brechungsgesetz giebt (cf. § 373, 6. (1.))

$$\frac{\sin r'}{\sin i} = \frac{c'}{v}, \quad \frac{\sin r''}{\sin i} = \frac{c''}{v}. \tag{p.}$$

Statt der Gleichungen (n) S. 459 erhalten wir, da unsere Wellenebenen verschiedene Normalen haben,

$$\begin{aligned} c'^2 &= \frac{c_1^2 + c_3^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_3^2}{2}\cos(\varphi_1' + \varphi_2'), \\ c''^2 &= \frac{c_1^2 + c_3^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_3^2}{2}\cos(\varphi_1'' - \varphi_2'). \end{aligned} \tag{q.}$$

Von diesen geben uns (p.) r' und r'' durch v, i und die Unbekannten c', c''. Die Substitution der hieraus gefundenen Werthe in (o.) giebt die φ und deren Substitution in (q.) endlich c' und c'', deren Werthe dann rückwärts eingesetzt werden, so dass alle gesuchten Grössen bekannt werden.

Ein dem in § 373, 6. gebrauchten analoges Verfahren würde uns auch die Coordinaten der gebrochenen Strahlen geben.

In Krystallen mit zwei optischen Axen werden im Allgemeinen beide gebrochene Strahlen aus der Einfallsebene heraustreten. Es mögen nun folgende specielle Fälle untersucht werden:

A) Wenn bleibt einer der gebrochenen Strahlen in der Einfallsebene?

Hierbei sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Es wird nämlich der gebrochene Strahl a) gegen die Normale der Wellenebene geneigt sein oder b) mit ihr zusammenfallen können.

a) Nach der Huyghens'schen Construction, mit Rücksicht auf die Form der Wellenfläche übersieht man, dass dieser Fall nur eintreten kann, wenn die optischen Axen eine solche besondere Lage haben, dass die durch je eine derselben und die Normale gelegten Ebenen gegen die Einfallsebene gleich geneigt sind. Die Schwingungen geschehen dann nach 5. in der Einfallsebene.

b) Kann nur dann eintreten, wenn die gebrochene Welle die Wellenfläche in einem der drei Kreise in den Hauptschnitten berührt, dann aber müssen die Schwingungen senkrecht zu der bezüglichen Kreisebene stehen.

B) Wenn bleiben beide Strahlen in der Einfallsebene?

Soll hier für den einen Strahl A)a) stattfinden, so muss für den anderen B)b) stattfinden, denn sonst müsste für diesen Strahl auch A)a) stattfinden, also auch die Oscillationsebene mit der Einfallsebene zusammenfallen, ohne dass beide Strahlen dieselbe Richtung annähmen, was nicht möglich ist. Beide Bedingungen, die unter A)a) und B)b) aufgestellt sind, können aber nur dann erfüllt sein, wenn die Einfallsebene mit einem Hauptschnitt der Wellenfläche zusammenfällt.

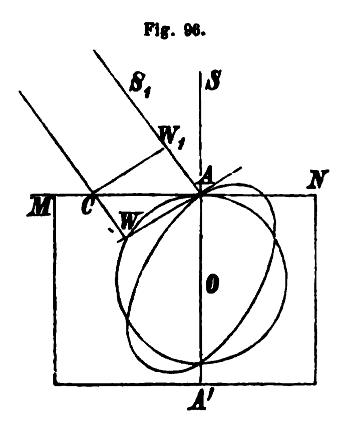
Von besonderem Interesse ist hier der Fall, wo die Einfallsebene mit dem Hauptschnitt der xz Ebene in 7. zusammenfällt. Vergleiche die nächste Nummer.

9. Aeussere konische Refraction.

Nach 7. b) ist der Schnittpunkt der Ellipse und des Kreises in dem Hauptschnitt ein singulärer Punkt. Sei nun die Papierebene der Fig. 96, S. 467 dieser Hauptschnitt eines Krystalles, dessen eine Begrenzungsebene, deren Projection auf den Hauptschnitt MN sei, senkrecht zu der Geraden vom Mittelpunkt der Wellenfläche nach diesem singulären Punkt steht, d. i. $MN \perp OA$. Man denke sich in O eine Wellenbewegung erzeugt und die ganze Krystallebene MN ausser dem Punkt A mit einer undurchsichtigen Schicht belegt. Es sollen nun die Lichtstrahlen untersucht werden, welche durch den Punkt A austreten. OA ist der Radius der Wellenfläche, welcher zu einer unendlichen Menge von Wellenebenen gehört. Eine berührt den Kreis und zwar steht diese senkrecht auf der Papierebene und für sie fällt die Wellennormale mit dem Strahl zusammen. Diese Wellenebene wird sich ungebrochen in das umgebende homogene Mittel fortpflanzen und dem

entsprechend auch der Strahl, der also nach AS weiter geht. In A trifft aber die Wellenfläche zweitens eine Tangentialebene, welche die Ellipse des Hauptschnittes berührt. Der Schnitt dieser Ebene mit der Papierebene sei AW. Die hierdurch bestimmte Wellenebene erfährt an der Grenze eine Brechung nach CW_1, so dass nun der austretende Strahl, der wegen des homogenen Mittels senkrecht auf der Wellenebene stehen muss, die Richtung AS_1 annimmt. Führen wir nun nach allen Richtungen durch OA Schnittebenen durch den Krystall, so können wir die Construction der Tangentialebenen für jeden solchen Schnitt wiederholen; wir erhalten also immer zwei Strahlen, von denen der eine mit AS zusammenfällt, der andere abgelenkt wird. Nach den Betrachtungen über den Berührungskegel schliessen wir demnach, dass aus A eine unendliche Menge von Strahlen, die zusammen einen Kegel des zweiten Grades bilden, austritt. Das Umgekehrte muss natürlich geschehen, wenn wir auf den Krystall durch A' Lichtstrahlen in Form eines Kegels eintreten lassen; alle zusammen werden im Innern des Krystalles einen Strahl AA' bilden, der dann in A wiederum als Kegel austritt. Es ist nun aber klar, dass man nicht einen einzigen Lichtstrahl zu dieser Erscheinung nehmen kann. Es sei demnach ein Lichtcylinder mit dem Radius r gegeben. Der Strahlenkegel kann, da seine Oeffnung sehr gering ist, als ein Rotationskegel angesehen werden, und zwar so, dass die Durchschnitte der einzelnen gebrochenen Strahlen mit einem auf der Axe senkrechten Schirm lauter gleiche Kreise sind. Ist nun φ die Oeffnung des Kegels und D die Entfernung, wo R der Halbmesser des mittleren Lichtkreises ist, so muss gelten

Fig. 96.



$$R = D \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Ist dann der innere nicht erleuchtete Kreis ein Punkt geworden, so ist

$$R = r \text{ und damit } D = r \cot \frac{\varphi}{2}.$$

Ist dann ϱ der Radius der äusseren Grenze, so ist

$$r = \frac{1}{2}\varrho, \text{ also } D = \frac{1}{2}\varrho \cot \frac{\varphi}{2}, \text{ oder } \varphi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tag} \frac{\varphi}{2D}.$$

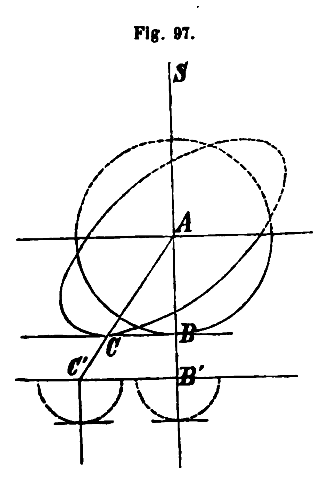
Dieser hierdurch erklärten Erscheinung giebt man den Namen der äusseren konischen Refraction.

10. Innere konische Refraction.

Nach 7. c) berührt eine Ebene senkrecht zur optischen Axe die Wellenfläche in einem Kreise. Um die daraus folgende merkwürdige Erscheinung

zu finden, denken wir uns eine Krystallplatte senkrecht zur optischen Axe geschliffen, welche, um die Erscheinung zu vereinfachen, ein einzelner Lichtstrahl parallel der optischen Axe, also senkrecht auf die Brechungsebene treffe. Sei an der Figur 97 die Papierebene die Einfallsebene und SA der Lichtstrahl. Um nun die gebrochenen Strahlen zu finden, zeichne man um A als Mittelpunkt die Wellenfläche. Die gebrochene Welle berührt diese Fläche in einem Kreise, dessen Durchmesser BC ist. Es ist dann, wie 7. c) gefunden worden ist, nach der Zeiteinheit

Fig. 97.



$$BC = 2l = \frac{1}{c_2}\sqrt{(c_2^2 - c_1^2)(c_3^2 - c_2^2)}.$$

Jede Seite des Kegels, dessen Spitze in A und dessen Basis der Kreis mit dem Durchmesser CB ist, muss nun ein gebrochener Lichtstrahl sein. Jeder in der Richtung SA eintretende Strahl spaltet sich demnach in unendlich viele divergirende Strahlen, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen, während die verschiedenen Wellenebenen mit derselben Geschwindigkeit weiter gehen. Die zweite Begrenzungsfläche des Krystalles schneidet diese Strahlen in einem Kreise, dessen Durchmesser um so grösser ist, je dicker die Platte genommen wird; denn es ist $B'C' : BC = B'A : BA$
$= B'A : c_2$, d. i.

$$B'C' = \frac{B'A}{c_2} BC = B'A \cdot \frac{1}{c_2^2}\sqrt{(c_2^2 - c_1^2)(c_3^2 - c_2^2)}.$$

Beim Austritt dieses Strahlencomplexes, da sich im homogenen Mittel alle Wellen mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen, werden die einzelnen Strahlen wieder so gebrochen, dass sie alle einander parallel werden. Nehmen wir dann statt eines Lichtstrahles einen Strahlencylinder, dessen Halbmesser r ist und von dem SA die Axe ist, so ist der äussere Halbmesser der erleuchteten Ringfläche $\frac{B'C'}{2} + r$ und die innere $\frac{B'C'}{2} - r$. Ist dann $\frac{B'C'}{2} = r$, so verschwindet der innere nicht erleuchtete Theil, ist $\frac{B'C'}{2} < r$, so decken sich sämmtliche gebrochene Wellen auf der Fläche eines Kreises vom Halbmesser $r - \frac{B'C'}{2}$.

Dieser hierdurch erklärten Erscheinung giebt man den Namen der inneren konischen Refraction.

Polarisation durch Reflexion. (§ 376.)

1. Verallgemeinerung der aufgestellten Formeln.*)

$$(c^2 - x^2) \cot \alpha = y^2 \cot \beta \qquad \text{(I.)}$$

Bedeuten α' und β' die Winkel, welche die Schwingungsrichtungen des einfallenden, reflectirten und gebrochenen Strahles mit der die verschiedenen Mittel trennenden Ebene bilden, so sind die Componenten dieser Schwingungen in dieser Ebene

$$c \cos \alpha' \;,\; x \cos \alpha' \;,\; y \cos \beta'.$$

Um eine Gleichung zwischen diesen Grössen aufzustellen, benutze man das Fresnel'sche Princip, welches lautet: „Wenn an die Grenzen zweier Mittel eine Wellenbewegung ankommt, so ist die vibrirende Bewegung der Moleküle in der Grenzschicht anzusehen als die letzte Bewegung in der einfallenden Welle, als die erste der reflectirten Welle und, da die Grenzschicht auch dem zweiten Mittel angehört, als die erste Bewegung der gebrochenen Welle."

Nach diesem Princip müssen demnach die in der Grenzfläche stattfindenden Verschiebungen, welche dem einfallenden und dem reflectirten Lichte angehören, gleich sein der augenblicklichen Verschiebung in der Grenzfläche in der gebrochenen Welle. Was von den Verschiebungen gilt, muss auch von den Amplituden gelten. Es ist also

$$(c + x) \cos \alpha' = y \cos \beta'. \qquad \text{(II.)}$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen kann nun x und y berechnet werden. Es folgt zunächst durch Division

$$(c - x) \frac{\cot \alpha}{\cos \alpha'} = y \frac{\cot \beta}{\cos \beta'}$$

und dann

$$x = \frac{\cot \alpha \cos^2 \beta' - \cot \beta \cos^2 \alpha'}{\cot \alpha \cos^2 \beta' + \cot \beta \cos^2 \alpha'} c \;,\; y = (c + x) \frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'}.$$

Specielle Fälle:

A) Der einfallende Strahl bestehe aus Schwingungen in der Einfallsebene, dann ist $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, also nach einiger Transformation

$$x = - c \frac{\operatorname{tg} (\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} (\alpha + \beta)} \;,\; y = + c \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)}.$$

B) Die Schwingungen des eintretenden Strahles finden senkrecht zur Einfallsebene statt, dann wird $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, also

$$x = - c \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)} \;,\; y = + c \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

C) Die Schwingungen des eintretenden Strahles sind so, dass die Schwingungsebene derselben den Winkel δ mit der Einfallsebene bildet.

---

*) Fresnel, Annales de chim. et de phys. XLVI. Pogg. Ann. XXII.

Diesen Fall bringen wir auf A) und B), indem wir diese Schwingungen in zwei componirende Schwingungen nach der Einfallsebene und senkrecht zu derselben, $c\cos\delta$ und $c\sin\delta$, zerlegen. Dann ist

$$x = -c\sin\delta\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} - c\cos\delta\,\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = a' + a'',$$

$$y = +c\sin\delta\,\frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} + c\cos\delta\,\frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = b'' + b',$$

wo die a, b abgekürzte Bezeichnungen sein sollen und zwar so, dass also a', b' (a'', b'') die Componenten der Schwingungen senkrecht (parallel) der Einfallsebene bezeichnen.

D) Ist der eintretende Lichtstrahl nicht polarisirt, so rechnen wir die eine Hälfte zu A) und die andere zu B) und erhalten damit

$$x = -\frac{1}{2}\,c\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} - \frac{1}{2}\,c\,\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = a_1' + a_1''.$$

$$y = +\frac{1}{2}\,c\,\frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} + \frac{1}{2}\,c\,\frac{2\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = b_1'' + b_1'.$$

Die Abkürzungen sind analog den obigen gewählt.

Die Intensitäten der betreffenden Lichtstrahlen sind dann proportional den lebendigen Kräften

$$m\,c^2,\ m\,x^2,\ m'\,y^2, \text{ oder proportional } c^2,\ x^2,\ \frac{m'}{m}\,y^2.$$

Setzen wir dann nach den Formeln des Lehrbuchs

$$\frac{m'}{m} = \frac{\delta'\sin\beta\cos\beta}{\delta\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta},$$

so erhalten wir die Intensitäten in den einzelnen Fällen proportional den folgenden Ausdrücken:

A) c^2 , $c^2\,\dfrac{\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}$, $c^2\,\dfrac{\sin 2\alpha\sin 2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)\cos^2(\alpha-\beta)}$,

B) c^2 , $c^2\,\dfrac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$, $c^2\,\dfrac{\sin 2\alpha\sin 2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$,

C) c^2 , $a'^2 + a''^2$, $(b''^2 + b'^2)\,\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$,

D) c^2 , $a_1'^2 + a_1''^2$, $(b_1''^2 + b_1'^2)\,\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$.

Bemerkenswerth ist hierbei, dass für senkrechte Incidenz bei A) $x = -c\,\frac{0}{0}$, und bei B) $x = -c\,\frac{0}{0}$ wird; denn es ist dann $\alpha = 0$ und $\beta = 0$. Nun ist aber für A), wenn wir nur die absoluten Werthe untersuchen, nach einiger Transformation und Einführung von $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$$x = \frac{n^2 \cos^2 \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos^2 \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \text{ d. i. für } \alpha = 0,$$

$$x = \frac{n-1}{n+1}.$$

Für B) ist

$$x = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha}, \text{ d. i für } \alpha = 0.$$

$$x = \frac{n-1}{n+1},$$

also derselbe Werth wie oben. Dies geht daraus hervor, dass für die senkrechte Incidenz die Einfallsebene unbestimmt wird.

2. Folgerungen für die Reflexion.

Setzen wir $\alpha + \beta = 0$, also $\operatorname{tg} \alpha_p = n$, so erhalten wir bei den einzelnen Fällen folgende Resultate:

A) $x = 0$. Es wird also dann das auftreffende Licht nicht reflectirt.

B) Das reflectirte Licht ist in seiner Polarisation nicht geändert.

C) und D) Hier bleibt das ganze reflectirte Licht a', a_1', d. h. alles reflectirte Licht ist solches, dessen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stattfinden.

Von besonderem Interesse ist noch $\alpha = \beta$. Unter dieser Voraussetzung wird nie Licht reflectirt. Hierdurch sind die Untersuchungen von § 229,11. und den darauf gegründeten § 230 über die Construction von Huyghens abermals bestätigt; denn $\alpha = \beta$ heisst der in das zweite Mittel eintretende Strahl, wird nicht von seiner Richtung abgelenkt, was aber nur stattfinden kann, wenn das zweite Mittel vom ersten sich in Dichtigkeit nicht unterscheidet.

Eine weitere Untersuchung erfordert noch C) und D); denn A) und B) geben uns stets polarisirtes Licht, dessen Schwingungsebenen unverändert bleiben.

Natürliches Licht D) wird durch jede Reflexion theilweise polarisirt.

Den Beweis dieser Behauptung führen wir durch Vergleich der beiden Intensitäten $a_1'^2$ und $a_1''^2$. Es ist nämlich $a_1'^2 - a_1''^2$ der Ueberschuss des Lichtes, welches senkrecht, über das welches parallel der Einfallsebene schwingt, oder die Menge des im reflectirten Lichte vorhandenen polarisirten Lichtes. Die Einführung der Werthe aus 1. giebt, wenn $c = 1$ gesetzt wird:

$$a_1'^2 - a_1'^2 = \frac{1}{4} \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} - \frac{1}{4} \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)},$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \left\{ 1 - \frac{\cos^2(\alpha + \beta)}{\cos^2(\alpha - \beta)} \right\}.$$

Nun ist aber immer $\cos^2(\alpha + \beta) < \cos^2(\alpha - \beta)$, mithin der in Parenthese stehende Ausdruck immer > 0, also auch

$$a_1'^2 - a_1''^2 > 0, \text{ oder } a_1'^2 > a_1''^2,$$

d. h. es ist immer die Componente der Intensität des Lichtes, welches senkrecht zur Einfallsebene schwingt, grösser als die der Intensität des parallel der Einfallsebene schwingenden Lichtes.

Die Schwingungsebene eines polarisirten Strahles C) wird durch eine Reflexion gedreht.

Da unserer Annahme nach durch eine Reflexion kein Phasenunterschied für a' und a'' eintritt, so haben wir hier zwei Schwingungscomponenten, die zu § 228 für den Fall n = 0 passen. Die Schwingungen werden also in einer Ebene stattfinden, die bestimmt ist durch

$$\cot \varrho = \frac{a''}{a'} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)} \cot \delta,$$

$$= \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \cot \delta,$$

wo ϱ der Winkel ist, den die Schwingungsebene des reflectirten Strahles mit der Einfallsebene bildet. Diese Drehung der Polarisationsebene wird nur dann = 0, wenn $\alpha = \beta = 0$ ist, d. h. bei senkrechter Incidenz.

Diese Formel giebt eine Bestätigung des Obigen, denn ist $\alpha + \beta = 90^0$, so wird $\cot \varrho = 0$, $\varrho = 90^0$.

3. Erklärung des negativen Zeichens in den Formeln für die Reflexion.

Für diese Untersuchung ist es hinreichend die beiden in A) und B) erhaltenen Formeln zu betrachten, nämlich

$$x = -c\,\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}, \quad x = -c\,\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Wenn demnach die Schwingungsgleichung des einfallenden Lichtstrahles ist

$$s = c \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda}\right),$$

so ist die des reflectirten Lichtstrahles entweder

$$s_1 = -c\,\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e + e'}{\lambda}\right) \text{ oder}$$

$$s_2 = -c\,\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e + e'}{\lambda}\right).$$

In Bezug auf das Vorzeichen der Amplitude müssen wir nun zwei Fälle unterscheiden:

1) $\alpha > \beta$ oder, da $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ ist, $n > 1$.

2) $\alpha < \beta$ „ „ „ „ „ „, $n < 1$.

Der erste Fall, bei dem dann die Amplitude negativ ist, bedeutet, dass das Licht von einem optisch dünneren in ein dichteres Mittel geht, während der zweite Fall sich auf die umgekehrte Anordnung der Mittel bezieht.

Wollen wir nun das negative Zeichen im ersten Fall entfernen, so müssen wir schreiben

$$s_1 = c\,\frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e+e'+\frac{1}{2}\lambda}{\lambda}\right),$$

$$s_2 = c\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e+e'+\frac{1}{2}\lambda}{\lambda}\right),$$

d. h. bei der Reflexion an einem optisch dichteren Mittel giebt es eine Verzögerung um eine halbe Wellenlänge. (cf. § 383. 1.)

Für den zweiten Fall können wir schreiben

$$s_1 = c\,\frac{tg(\beta-\alpha)}{tg(\beta+\alpha)}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e+e'}{\lambda}\right),$$

$$s_2 = c\,\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{e+e'}{\lambda}\right).$$

Die weitere Untersuchung der letzteren Formeln enthält § 383 2.

Polarisation durch Brechung. (§ 377.)

Folgerungen für den gebrochenen Strahl.

Gewöhnliches Licht wird durch eine einmalige Brechung theilweise polarisirt.

Den Beweis führen wir analog dem Obigen. Es ist nämlich

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}\,(b_1''^2 - b_1'^2)$$

analog dem Obigen § 376 die Lichtmenge des im durchgehenden Lichte parallel der Einfallsebene schwingenden Lichtes.

Die Einführung der Werthe von b_1'' und b_1' giebt

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}\,(b_1''^2 - b_1'^2) = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\,(1-\cos^2(\alpha-\beta))}{\sin^2(\alpha+\beta)\cos^2(\alpha-\beta)},$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}\cdot\left(1-\frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)}\right).$$

Da $\alpha+\beta > \alpha-\beta$, so ist der Werth der Parenthese stets > 0, mithin auch $b_1''^2 > b_1'^2$, d. h. die Componente der Intensität des Lichtes, welches parallel der Einfallsebene schwingt, ist grösser, als die der Intensität des senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Lichtes.

Die Gleichung dieses Ausdruckes mit dem von § 376, 2. zusammen giebt das Arago'sche Gesetz: Die Menge des im gebrochenen vorhandenen in der Einfallsebene schwingenden Lichtes ist gleich der Lichtmenge des reflectirten Lichtes, welches senkrecht zur Einfallsebene schwingt.

Es giebt nicht einen Winkel α, wie in § 376, 2. α_p, für den nach einer einmaligen Brechung vollständig polarisirtes Licht entsteht.

Wenn ϱ_1 den Winkel bezeichnet, den die Schwingung des gebrochenen Strahles und der Einfallsebene bildet, so ist

$$\cot \varrho_1 = \frac{b_1''}{b_1'} = \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)} \operatorname{tg} \delta.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass ϱ_1 stets abhängig ist von δ, dass es also für das gebrochene Licht keinen Polarisationswinkel giebt.

Da ferner $\cos(\alpha - \beta)$ stets kleiner als 1 bleibt, wenn α nicht $= 0$ wird, so ist $\cot \varrho_1 > \operatorname{tg} \delta$, $90 - \varrho_1 > \delta$, d. h. die zur Schwingungsebene senkrechte Ebene, die Polarisationsebene, wird durch die Brechung stets gedreht, und zwar so, dass sie mit der Einfallsebene einen grösseren Winkel bildet als vorher.

Lassen wir nun eine mehrmalige Brechung eintreten, so finden wir allmälich, wenn die $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots.$ die auf einander folgenden Drehungswinkel sind,

$$\cot \varrho_2 = \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)} \cot \varrho_1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha - \beta)} \operatorname{tg} \delta,$$

$$\cot \varrho_3 = \frac{1}{\cos(\alpha - \beta)} \cot \varrho_2 = \frac{1}{\cos^3(\alpha - \beta)} \operatorname{tg} \delta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cot \varrho_n = \frac{1}{\cos^n(\alpha - \beta)} \operatorname{tg} \delta.$$

Wenn nun α nicht $= 0$ ist, so ist $\cos^n(\alpha - \beta)$ sehr klein bei grossem n, also $\cot \varrho_n = \infty$, $\varrho_n = 0$, d. h. durch eine oftmals wiederholte Brechung wird das Licht in polarisirtes verwandelt, dessen Schwingungen in der Einfallsebene stattfinden.

Anhang zu § 376. 377.

Nach den in den betreffenden Paragraphen aufgestellten, von Fresnel zuerst gegebenen, Formeln ergiebt sich, dass bei den durchsichtigen Körpern, so lange der Einfallswinkel kleiner als der Polarisationswinkel ist, die senkrecht und parallel der Einfallsebene schwingenden Componenten ganz ohne Phasendifferenz reflectirt werden, dass aber wenn der Einfallswinkel gleich dem Polarisationswinkel ist, die Amplitude des in der Einfallsebene reflectirten Lichtes ganz aufgehoben wird und dass bei noch grösserem Einfallswinkel, da dann $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ negativ wird, eine Phasendifferenz eintritt. Nach den Beobachtungen von Brewster, Seebeck, Airy ergiebt sich aber, dass das nicht richtig ist, sondern dass überall das reflectirte Licht elliptisch polarisirt ist. Es soll demnach im Folgenden die Reflexionstheorie erweitert werden, um auf die von Cauchy gegebenen Formeln zu kommen.

1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen*).

In den früheren Formeln ist neben dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft nur noch der eine Grundsatz, dass die Periode aller beim Uebergange des Lichtes aus einem Mittel in ein anderes zur Sprache kommenden Bewegungen gleich sei, als Ausgangspunkt genommen worden. Dies Princip ist von Cauchy das Princip der correspondirenden Bewegungen genannt worden. Es soll im Folgenden der zweite von Cauchy aufgestellte Satz, das Princip der Continuität der Bewegung verwendet werden. Dieser neue Grundsatz lautet: der Ort von Aethertheilchen, welche auf dem Einfallsloth liegen, zeigt keine Unterbrechung der Stetigkeit, wenn man aus dem ersten Mittel in das zweite übergeht und zwar für jedes Einfallsloth und zu jeder Zeit. Das heisst also, dass die Curven für die Theilchen der Grenzschicht, auf welche die Aethertheilchen eines Lothes im ersten Mittel zu irgend einer Zeit liegen, an der Trennungsfläche beider Mittel mit der entsprechenden Curve des zweiten Mittels nicht nur zusammentreffen, sondern auch stetig in einander überfliessen, so dass sie sich also da, wo sie zusammenstossen, einander berühren. Dem ersten Principe ist im Obigen der mathematische Ausdruck gegeben, dem zweiten zufolge müssen die Ableitungen der Ausschläge nach dem Lothe paarweise einander gleich sein.

Zur Aufstellung der diese Grundsätze enthaltenden Gleichungen legen wir folgendes Coordinatensystem zu Grunde. Die Grenzfläche sei die zy Ebene und zwar liege die y Axe in der Einfallsebene. Die x und y Axe bilde mit der Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle einen spitzen Winkel. Unter dieser Voraussetzung sind $x\cos\alpha + y\sin\alpha = C$, und $x\cos\beta + y\sin\beta = C'$ die Gleichungen der einfallenden und der gebrochenen Wellenebene, wenn wie oben α und β bezeichnen den Einfalls- und Brechungswinkel. Die Elongationen des Aethers in der Richtung der drei Axen seien bezeichnet durch ξ, η, ζ für die einfallende, ξ', η', ζ' oder ξ'', η'', ζ'' für die gebrochene, $\xi_{,}, \eta_{,}, \zeta_{,}$ oder $\xi_{,,}, \eta_{,,}, \zeta_{,,}$ für die reflectirte Welle, je nachdem die Schwingung transversal oder longitudinal ist.

Die an der Trennungsfläche, also für $x = 0$, zu erfüllenden Bedingungen sind demnach:

$$\xi + \xi_{,} + \xi_{,,} = \xi' + \xi'', \tag{a.}$$

$$\eta + \eta_{,} + \eta_{,,} = \eta' + \eta'', \tag{b.}$$

$$\zeta + \zeta_{,} + \zeta_{,,} = \zeta' + \zeta'', \tag{c.}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi_{,}}{\partial x} + \frac{\partial \xi_{,,}}{\partial x} = \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \xi''}{\partial x}, \tag{d.}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta_{,}}{\partial x} + \frac{\partial \eta_{,,}}{\partial x} = \frac{\partial \eta'}{\partial x} + \frac{\partial \eta''}{\partial y}, \tag{e.}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{,}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_{,,}}{\partial x} = \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \frac{\partial \zeta''}{\partial x}. \tag{f.}$$

---

*) Eisenlohr, Ableitung der Formeln für die Intensität des an der Oberfläche zweier isotroper Mittel gespiegelten, gebrochenen und gebeugten Lichtes. Pogg. Ann. CIV. (1858.)

2. Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene.

Da hier $\xi = \eta = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ ist und desshalb alle übrigen dem entsprechenden Ausdrücke verschwinden, so sind die Gleichungen (a.), (b.), (d.), (e.) von selbst erfüllt. Die einfallende Schwingung sei gegeben durch

$$\zeta = \cos 2\pi\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\lambda} - \frac{t}{T} - \frac{\vartheta}{T}\right).$$

Die hierin vorkommenden Grössen sind die allgemein bekannten. Die Intensität ist der Bequemlichkeit wegen $= 1$ gesetzt. Für den reflectirten und gebrochenen Strahl haben wir

$$\zeta_{,} = A_{,} \cos 2\pi\left(\frac{x\cos\alpha_{,} + y\sin a_{,}}{\lambda_{,}} - \frac{t}{T_{,}} - \frac{\vartheta_{,}}{T_{,}}\right),$$

$$\zeta' = A' \cos 2\pi\left(\frac{x\cos\beta + y\sin\beta}{\lambda'} - \frac{t}{T'} - \frac{\vartheta'}{T'}\right).$$

Damit die Gleichungen (c.) und (f.) für $x = 0$ und für jedes beliebige y und t gültig bleiben, müssen die Coefficienten von y und t in den Schwingungsausdrücken einander gleich sein, d. h.

$$T = T_{,} = T' \text{ also } \lambda = \lambda_{,}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\lambda} = \frac{\sin\alpha_{,}}{\lambda_{,}} = \frac{\sin\beta}{\lambda'}.$$

Daraus folgt zunächst $\sin\alpha = \sin\alpha_{,}$. α ist ein spitzer Winkel, $\alpha_{,}$ muss aber dann ein stumpfer sein, also $\alpha_{,} = 180 - \alpha$ und $\cos\alpha_{,} = -\cos\alpha$.

Werden dann unter Berücksichtigung des eben Gefundenen in den Bedingungen (c.) und (f.) die beliebigen y und t gleich Null gesetzt, so ergeben sich noch folgende Gleichungen

$$\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix} 2\pi\frac{\vartheta}{T} + A_{,}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix} 2\pi\frac{\vartheta_{,}}{T} = A'\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix} 2\pi\frac{\vartheta'}{T},$$

$$\frac{\cos\alpha}{\lambda}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix} 2\pi\frac{\vartheta}{T} + A_{,}\frac{\cos\alpha_{,}}{\lambda}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix} 2\pi\frac{\vartheta_{,}}{T} = A'\frac{\cos\beta}{\lambda'}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix} 2\pi\frac{\vartheta'}{T}.$$

Die hier und im Folgenden gebrauchten Klammern [] sollen bedeuten, dass die Gleichungen gelten, wenn man das obere und auch wenn man das untere Zeichen nimmt und alles Andere unverändert lässt.

Diesen Gleichungen wird genügt durch $\vartheta = \vartheta_{,} = \vartheta'$,

$$1 + A_{,} = A', \qquad \frac{\cos\alpha}{\lambda} - A_{,}\frac{\cos\alpha}{\lambda} = A'\frac{\cos\beta}{\lambda'}, \text{ also}$$

$$A_{,} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}, \qquad A' = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta+\alpha)}.$$

Die Ausdrücke für den reflectirten und gebrochenen Strahl werden demnach

$$\zeta_{,} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\cos 2\pi\left(\frac{-x\cos\alpha + y\sin a}{\lambda} - \frac{t+\vartheta}{T}\right),$$

$$\zeta' = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta+\alpha)}\cos 2\pi\left(\frac{x\cos\beta + y\sin\beta}{\lambda'} - \frac{t+\vartheta}{T}\right).$$

Dies sind die Formeln, welche schon § 376 1. B) gefunden worden sind.

3. Schwingungen in der Einfallsebene.

Da hier $\zeta = 0$ ist, so bleiben nur zu erfüllen die Gleichungen (a.), (b.), (d.), (e.) für $x = 0$.

Die einfallende Schwingung sei gegeben durch

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} = \cos 2\pi\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\lambda} - \frac{t+\vartheta}{T}\right)\begin{bmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Nach den eingeführten Bezeichnungen unterscheiden sich die Ausdrücke für die anderen transversalen Wellen von dieser Form nur durch die Coefficienten A und durch andere Indices und bei den gebrochenen steht ausserdem statt α der Brechungswinkel β. Die longitudinalen Schwingungen sind gegeben durch

$$\begin{bmatrix}\xi_{,,}\\ \eta_{,,}\end{bmatrix} = A_{,,}\cos 2\pi\left(\frac{x\cos\alpha_{,,} + y\sin\alpha_{,,}}{\lambda_{,,}} - \frac{t+\vartheta_{,,}}{T_{,,}}\right)\begin{bmatrix}\cos\alpha_{,,}\\ \sin\alpha_{,,}\end{bmatrix}.$$

Für das zweite Medium sind dann die Buchstaben oben zu accentuiren und β' einzusetzen. Die Grenzbedingungen für $x = 0$ geben dann wieder

$$T = T_{,} = T_{,,} = T' = T'' \text{ also } \lambda = \lambda_{,}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\lambda} = \frac{\sin\alpha_{,}}{\lambda} = \frac{\sin\alpha_{,,}}{\lambda_{,,}} = \frac{\sin\beta}{\lambda'} = \frac{\sin\beta'}{\lambda''} \quad (*)$$

und es ist wieder wie unter 2. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\beta'$ positiv, $\cos\alpha_{,}$ und $\cos\alpha_{,,}$ negativ zu nehmen.

Die weiteren Bedingungsgleichungen für ξ, η, $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\eta}{\partial x}$ geben nach den angedeuteten Entwickelungen vier Doppelgleichungen, in denen der Einfachheit wegen bei den verschiedenen ϑ der zugehörige Factor $\frac{2\pi}{T}$ weggelassen ist.

$$\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta\sin\alpha + A_{,}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta_{,}\sin\alpha_{,} + A_{,,}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta_{,,}\cos\alpha_{,,} = A'\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta'\sin\beta + A''\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta''\cos\beta', \quad (1.)$$

$$\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta\cos\alpha + A_{,}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta_{,}\cos\alpha_{,} - A_{,,}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta_{,,}\sin\alpha_{,,} = A'\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta'\cos\beta - A''\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta''\sin\beta', \quad (2.)$$

$$\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\lambda} + A_{,}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta_{,}\frac{\sin\alpha_{,}\cos\alpha_{,}}{\lambda} + A_{,,}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta_{,,}\frac{\cos^2\alpha_{,,}}{\lambda_{,,}} = A'\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta'\frac{\cos\beta\sin\beta}{\lambda} + A''\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta''\frac{\cos^2\beta'}{\lambda''}, \quad (3.)$$

$$\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta\frac{\cos^2\alpha}{\lambda} + A_{,}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta_{,}\frac{\cos^2\alpha_{,}}{\lambda} + A_{,,}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta_{,,}\frac{\cos\alpha_{,,}\sin\alpha_{,,}}{\lambda_{,,}} = A'\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta'\frac{\cos^2\beta}{\lambda'} + A''\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta''\frac{\cos\beta'\sin\beta'}{\lambda''}. \quad (4.)$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn wir die α und β eliminiren. Man multiplicire (1.) und (2.) mit $\frac{\sin\alpha}{\lambda} = \frac{\sin\alpha_,}{\lambda} = \frac{\sin\alpha_{,,}}{\lambda_{,,}} =$ etc. und addire das erste Product zu (4.) und substrahire das zweite Product von (3.). Dadurch erhält man

$$\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta + \frac{A_,}{\lambda}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta_, = \frac{A'}{\lambda'}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta',$$

$$\frac{A_{,,}}{\lambda_{,,}}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta_{,,} = \frac{A''}{\lambda''}\begin{bmatrix}\cos\\ \sin\end{bmatrix}\vartheta''.$$

Diesen Doppelgleichungen wird genügt durch

$$\vartheta = \vartheta_, = \vartheta' = \vartheta_{,,} = \vartheta'',$$

$$\frac{1+A_,}{\lambda} = \frac{A'}{\lambda'}, \quad \frac{A_{,,}}{\lambda_{,,}} = \frac{A''}{\lambda''}.$$

Daraus findet man dann mit Hülfe der bekannten Formeln für

$\sin 2x$, $\sin(x \pm y)$, $\cos(x \pm y)$, $\sin x \pm \sin y$, $\cos x \pm \cos y$

aus den Gleichungen (1.) und (2.) nach einigen Transformationen:

$$A_, = \frac{\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta-\alpha_{,,}-\beta')}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta+\alpha_{,,}+\beta')},$$

$$A_{,,} = \frac{-2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\sin\alpha_{,,}}{\sin(\alpha_{,,}-\beta')\cos(\alpha-\beta+\alpha_{,,}+\beta')} = A''\frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha_{,,}},$$

$$A' = \frac{2\cos\alpha\sin\beta\cos(\alpha_{,,}+\beta')}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta+\alpha_{,,}+\beta')}.$$

Folglich ist

$$\begin{bmatrix}\xi_,\\ \eta_,\end{bmatrix} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta-\alpha_{,,}-\beta')}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta+\alpha_{,,}+\beta')} \times \cos 2\pi\left(\frac{-x\cos a + y\sin a}{\lambda} - \frac{t+\vartheta}{T}\right)\begin{bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}, \quad (5.)$$

$$\begin{bmatrix}\xi_{,,}\\ \eta_{,,}\end{bmatrix} = \frac{-2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\sin\alpha_{,,}}{\sin(\alpha_{,,}-\beta')\cos(\alpha-\beta+\alpha_{,,}+\beta'} \times \cos 2\pi\left(\frac{x\cos\alpha_{,,} + y\sin\alpha_{,,}}{\lambda_{,,}} - \frac{t+\vartheta}{T}\right)\begin{bmatrix}\cos\alpha_{,,}\\ \sin\alpha_{,,}\end{bmatrix}, \quad (6.)$$

$$\begin{bmatrix}\xi'\\ \eta'\end{bmatrix} = \frac{2\cos\alpha\sin\beta\cos(\alpha_{,,}+\beta')}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta+\alpha_{,,}+\beta')} \times \cos 2\pi\left(\frac{x\cos\beta + y\sin\beta}{\lambda'} - \frac{t+\vartheta}{T}\right)\begin{bmatrix}\sin\beta\\ \cos\beta\end{bmatrix}, \quad (7.)$$

$$\begin{bmatrix}\xi''\\ \eta''\end{bmatrix} = \frac{-2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\sin\alpha''}{\sin(\alpha_{,,}-\beta')\cos(\alpha-\beta+\alpha_{,,}+\beta')} \times \cos 2\pi\left(\frac{x\cos\beta' + y\sin\beta'}{\lambda''} - \frac{t+\vartheta}{T}\right)\begin{bmatrix}\cos\beta'\\ \sin\beta'\end{bmatrix}. \quad (8.)$$

Bis jetzt ist angenommen worden, dass die longitudinalen Schwingungen sich wie die transversalen als regelmässige Wellen fortpflanzen;

nun machen aber die Beobachtungen wahrscheinlich, dass vielmehr bei denselben eine Abnahme in geometrischer Progression stattfindet d. h. dass, wenn die Normale zur Wellenebene in arithmetrischer Progression wächst, eine Abnahme der Schwingung in geometrischer Progression stattfindet.

Nach § 279. 3. würde demnach das Gesetz der Fortpflanzung ausgedrückt durch

$$A e^{(Ux+Vy+Wz)} e^{-\sigma t i},$$

wo dann die Normale zur Wellenebene (S. 262)

$$D = \frac{Ux+Vy+Wz}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}, \text{ und } \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{U^2+V^2+W^2} \text{ ist.}$$

Unser gefundenes Gesetz hat aber die Form

$$A e^{(D.\frac{2\pi}{\lambda} - \sigma t) i}.$$

Diese letzte Form stimmt mit der durch die Beobachtungen begründeten überein, wenn wir setzen statt $\lambda_{,,}$ und λ'' die imaginären Grössen $\frac{l_{,,}}{i}$ und $\frac{l''}{i}$.

Wir erhalten dann statt (*)

$$\frac{\sin\alpha}{\lambda} = \frac{\sin\alpha_{,}}{\lambda} = \frac{i\sin\alpha_{,,}}{l_{,,}} = \frac{\sin\beta}{\lambda'} = \frac{i\sin\beta'}{l''}.$$

Man sieht, dass $\sin\alpha_{,,}$, $\sin\beta'$ imaginär sein müssen, während $\cos\alpha_{,,} = \sqrt{1-\sin^2\alpha_{,,}}$ reell und negativ, $\cos\beta' = \sqrt{1-\sin\beta'}$ reell und positiv wird.

Damit werden aber die obigen Ausdrücke der Verschiebungen imaginär und wir können statt derselben setzen folgenden Ausdruck

$$(a+bi) e^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i)i},$$

so dass wir eine complexe Amplitude $a+bi$ und einen theilweise reellen Exponenten haben.

4. Entfernung des Imaginären in den Ausdrücken für die Schwingungen.

Als allgemeine Form für die Schwingungen haben wir gefunden

$$(a+bi) e^{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}i)i} = (a+bi) e^{-\mathfrak{b}} e^{\mathfrak{a}i}.$$

Statt dessen schreiben wir $r e^{-\mathfrak{b}} e^{(\mathfrak{a}+x)i}$, wo r und x reelle Grössen bedeuten, welche wir finden, indem wir zu den trigonometrischen Functionen übergehen und dann das Reelle (Imaginäre) einander gleichsetzen.

Wir erhalten dann endlich, da der reelle Theil allein genommen werden muss, als Schwingungsausdruck

$$\sqrt{a^2+b^2}\, e^{-\mathfrak{b}} \cos\left(\mathfrak{a} + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

Die Grösse $\mathfrak{b}$ kann der Annahme gemäss für die transversalen Schwingungen nicht vorhanden sein, da weder die cos. noch die sin. der verschiedenen α imaginär werden, so dass wir also für diese folgende Form behalten

$$\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\alpha+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

Es ist nun unsere Aufgabe für die einzelnen ξ und η die zugehörigen $\sqrt{a^2+b^2}$ und $\frac{bi}{a}$ zu berechnen. Wenn wir aber bedenken, dass

$$a^2+b^2=(a+bi)(a-bi),$$

$$\frac{bi}{a}=\frac{(a+bi)-(a-bi)}{(a+bi)+(a-bi)}$$

ist, so finden wir diese Werthe, wenn wir zunächst berechnen $a-bi$ aus dem bekannten $a+bi$, wenn wir also für die Transversalschwingungen in $A_,$ und A' allen das Imaginäre enthaltenden Grössen das entgegengesetzte Zeichen geben, wir setzen also $-\alpha_{,,}$ und $-\beta'$ statt $\alpha_{,,}$ und β'.

Die hier angedeuteten Rechnungen geben, da wir statt des obigen Werthes $A_,$ aus (5.) setzen können

$$A_1=a+bi,$$

$$=\frac{\cot(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\alpha_{,,}+\beta')}{\cot(\alpha-\beta)-\operatorname{tg}(\alpha_{,,}+\beta')},$$

$$a-bi=\frac{\cot(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}(\alpha_{,,}+\beta')}{\cot(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\alpha_{,,}+\beta')},\ \text{mithin}$$

$$\frac{bi}{a}=\frac{[\cot(\alpha-\beta)+\cot(\alpha+\beta)]\operatorname{tg}(\alpha_{,,}+\beta')}{\cot(\alpha+\beta)\cot(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}^2(\alpha_{,,}+\beta')}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung, da $\operatorname{tg}\alpha_{,,}$ und $\operatorname{tg}\beta'$ imaginär werden,

$$pi=\operatorname{tg}(\alpha_{,,}+\beta'),\quad \operatorname{tg}\varphi=p\operatorname{tg}(\alpha-\beta),\quad \operatorname{tg}\psi=p\operatorname{tg}(\alpha+\beta),$$

so ergiebt sich

$$\frac{bi}{a}=i\operatorname{tg}(\varphi+\psi),$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{\cot^2(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}^2(\alpha_{,,}+\beta')}{\cot^2(\alpha-\beta)-\operatorname{tg}^2(\alpha_{,,}+\beta')}}\ \text{oder}$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\psi}\frac{1+\operatorname{tg}^2\psi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}. \tag{9.}$$

Durch analoge Rechnungen finden wir für A' aus (7.), also für die gebrochenen transversalen Schwingungen

$$\frac{bi}{a}=i\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\psi}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{10.}$$

Darnach sind also die reflectirten und gebrochenen transversalen Schwingungen gegeben durch

$$\begin{bmatrix}\xi_,\\ \eta_,\end{bmatrix}=\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cos2\pi\left(\frac{-x\cos\alpha+y\sin\alpha}{\lambda}+\frac{\varphi+\psi}{2\pi}-\frac{t+\vartheta}{T}\right)\begin{bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}, \tag{11.}$$

$$\begin{bmatrix}\xi'\\ \eta'\end{bmatrix}=\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\psi}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\quad\times$$

$$\cos2\pi\left(\frac{x\cos\beta+y\sin\beta}{\lambda}+\frac{\varphi}{2\pi}-\frac{t+\vartheta}{T}\right)\begin{bmatrix}\sin\beta\\ -\cos\beta\end{bmatrix}. \tag{12.}$$

Für die longitudinalen Schwingungen setzen wir unserer Annahme nach

$$\xi_{,,} = (a + bi)\, e^{2\pi\left(\frac{x\cos\alpha_{,,}}{l_{,,}} i + \left[\frac{y\sin\alpha_{,,}}{l_{,,}} - \frac{t+\vartheta}{T}\right]\right) i}\cos\alpha_{,,}$$

und ebenso die andere Componente $\eta_{,,}$ und ξ'', η''.

Es ist nach den obigen Gleichungen zu setzen

$$\frac{i\sin\alpha_{,,}}{l_{,,}} = \frac{\sin\alpha}{\lambda}, \text{ also } \cos\alpha_{,,} = -\sqrt{1 + \frac{\sin^2\alpha\, l_{,,}^2}{\lambda^2}}$$

$$= -\frac{\sin\alpha\, l_{,,}}{\lambda}\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\sin^2\alpha\, l_{,,}^2}} = -m_{,,}\frac{\sin\alpha\, l_{,,}}{\lambda}$$

$$\frac{i\sin\beta'}{l''} = \frac{\sin\alpha}{\lambda}, \text{ also } \cos\beta' = \sqrt{1 + \frac{\sin^2\alpha\, l''^2}{\lambda^2}}$$

$$= \frac{\sin\alpha\, l''}{\lambda}\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\sin^2\alpha\, l''^2}} = m''\frac{\sin\alpha\, l''}{\lambda}.$$

Für die longitudinale reflectirte Schwingung ist nach (6.)

$$A_{,,} = a + bi = \frac{-2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\sin\alpha_{,,}}{\sin(\alpha_{,,}-\beta')\cos(\alpha-\beta+\alpha_{,,}+\beta')},$$

$$= \frac{-2\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta)\cos\alpha\sin\alpha_{,,}}{\sin(\alpha_{,,}-\beta')\left[\cos(\alpha_{,,}+\beta') - \mathrm{tg}(\alpha-\beta)\sin(\alpha_{,,}+\beta')\right]},$$

mithin nach der oben angegebenen Methode

$$a - bi = \frac{-2\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta)\cos\alpha\sin\alpha_{,,}}{\sin(\alpha_{,,}-\beta')\left[\cos(\alpha_{,,}+\beta') + \mathrm{tg}(\alpha-\beta)\sin(\alpha_{,,}+\beta')\right]},$$

$$a^2 + b^2 = \frac{4\,\mathrm{tg}^2(\alpha-\beta)\cos^2\alpha\sin^2\alpha_{,,}}{\sin^2(\alpha_{,,}-\beta')\left[\cos^2(\alpha_{,,}+\beta') - \mathrm{tg}^2(\alpha-\beta)\sin^2(\alpha_{,,}+\beta')\right]}.$$

Werden hier die oben definirten Werthe p und φ eingeführt, so erhält man

$$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{2\sin\varphi\cos\alpha\sin\alpha_{,,}}{\sin(\alpha_{,,}-\beta')\cos(\alpha+\beta')\,p},$$

$$= \frac{2\sin\varphi\cos\alpha\sin\alpha_{,,}}{(\sin\alpha_{,,}\cos\alpha_{,,} - \sin\beta'\cos\beta')\,p}.$$

Setzen wir nun die Werthe von $\sin\alpha_{,,}$, $\cos\alpha_{,,}$, $\sin\beta'$ und $\cos\beta'$ ausgedrückt durch $\sin\alpha$ ein und bedenken, dass wir dann finden

$$p = \frac{m_{,,} - m''}{m'' m_{,,} - 1},$$

so erhalten wir endlich

$$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{2\sin\varphi\cos\alpha\frac{l''}{\lambda}\sin\alpha\,(m_{,,}^2 - 1)(m''^2 - 1)}{(m''^2 - m_{,,}^2)}.$$

Einfach ergiebt sich

$$\frac{bi}{a} = i\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Wird dann noch bedacht der Werth von $\cos\alpha_{,,}$ und $\sin\alpha_{,,}$, so wird, wenn noch bei $\eta_{,,}$ die Bedeutung der imaginären Amplitude nach § 376. 3. und § 383. 1. ausgelegt wird,

$$\begin{bmatrix}\xi_{,,}\\ \eta_{,,}\end{bmatrix} = \frac{2\sin\varphi\cos\alpha\,(m''^2 - 1)}{m''^2 - m_{,,}^2}\, e^{2\pi x \sin\alpha\, m_{,,} : \lambda} \times$$

$$\begin{bmatrix}-m_{,,}\cos\\ +\sin\end{bmatrix} 2\pi\left(\frac{y\sin\alpha}{\lambda} + \frac{\varphi}{2\pi} - \frac{t+\vartheta}{T}\right). \quad (13.)$$

Werden dieselben Rechnungen für die longitudinalen, gebrochenen Schwingungen (8.) durchgeführt, so ergiebt sich

$$\begin{bmatrix}\xi''\\ \eta''\end{bmatrix} = \frac{2\sin\varphi\cos\alpha\,(m_{,,}^2 - 1)}{m''^2 - m_{,,}^2}\, e^{-2\pi x \sin\alpha\, m'' : \lambda} \times$$

$$\begin{bmatrix}m''\cos\\ \sin\end{bmatrix} 2\pi\left(\frac{y\sin\alpha}{\lambda} + \frac{\varphi}{2\pi} - \frac{t+\vartheta}{T}\right). \quad (14.)$$

Dass nun die aufgestellten Schwingungsgleichungen den Grenzbedingungen für $x = 0$ genügen, kann direct nachgewiesen werden.

5. Discussion der Formeln und Resultate anderer Hypothesen.

Setzen wir in unseren Formeln $p = 0$, so erhalten wir die folgenden Werthe:

1) für die reflectirte Welle wird aus (9.)

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\psi} = \frac{tg\,(\alpha-\beta)}{tg\,(\alpha+\beta)};$$

2) für die gebrochene Welle wird aus (10.)

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\psi}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{tg\,\varphi + tg\,\psi}{tg\,\psi}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Dies sind die Formeln von Fresnel (§ 376).

Nach unseren berechneten Ausdrücken haben wir für die Werthe aus § 376 C), wenn $c = 1$ gesetzt wird,

$$a' = -\sin\delta\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)},$$

$$a'' = \cos\delta\sqrt{a^2 + b^2} = \cos\delta\,\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \quad \text{d. i. nach (9.)}$$

$$a'' = \cos\delta\,\frac{tg\,(\alpha-\beta)}{tg\,(\alpha+\beta)}\sqrt{\frac{1 + p^2 tg^2(\alpha+\beta)}{1 - p^2 tg^2(\alpha-\beta)}}.$$

Würden diese Componenten bei der Reflexion keine Phasenverschiebung erhalten, so würden sie sich wieder zu einem linear polarisirten Strahl zusammensetzen, der mit der Einfallsebene einen Winkel ϱ bildete, für den nach § 228 gälte

$$\cot\varrho = \frac{a''}{a'} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\sqrt{\frac{1 + p^2 tg^2(\alpha+\beta)}{1 + p^2 tg^2(\alpha-\beta)}},$$

oder bei Vernachlässigung höherer Potenzen von p

$$\cot\varrho = \frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha-\beta)} + p^2\frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\cos^4(\alpha-\beta)};$$

nun ist aber eine Phasenverschiebung vorhanden. Nach § 376. 3, § 383. 1, bedeutet das negative Zeichen bei a' eine Verschiebung um π und nach (11) ist die Verschiebung für a'' $\varphi+\psi$, mithin ist die Gesammtphasenänderung des senkrecht zur Einfallsebene und des parallel dazu schwingenden Lichtes $\varphi+\psi+\pi$. Die beiden Strahlen setzen sich demnach zu elliptisch polarisirtem Licht zusammen und nach § 228 ist der Winkel χ, welcher die Lage der Hauptaxe gegen die Einfallsebene bestimmt, gegeben durch

$$\operatorname{tg} 2\chi = \operatorname{tg} 2\varrho \cos(\varphi+\psi).$$

Aus den Versuchen von Jamin geht hervor, dass p stets sehr klein ist, dass also der Gangunterschied zwischen dem in der Einfallsebene und dem senkrecht dazu polarisirten Licht, oder $\varphi+\psi+\pi$ fast genau π ist, wenn das Licht zwischen der Senkrechten und dem Polarisationswinkel einfällt.

Beim Durchgang durch den Polarisationswinkel, wo $\operatorname{tg}\psi = p\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ sehr rasch wächst, nimmt diese Phasendifferenz schnell bis 270° zu und darüber hinaus bis 360°, welchem Werth es sich, wenn der Einfallswinkel bis 90° wächst, allmälich nähert. Ein schief gegen die Einfallsebene schwingender Lichtstrahl ist also in Uebereinstimmung mit den obigen Formeln nach der Reflexion nur in der Nähe des Polarisationswinkels erheblich elliptisch polarisirt und nähert sich bei der senkrechten und parallelen Incidenz immer mehr der geradlinigen Polarisation.

Da $p = \frac{m_{,,} - m''}{m'' m_{,,} - 1}$ nach der eben gemachten Annahme klein sein soll, so muss $m_{,,} - m''$ klein sein, oder nach der Bedeutung von $m_{,,}$ und m'' müssen die Werthe $\frac{\lambda}{l_{,,}}$ und $\frac{\lambda}{l''}$ wenig von einander verschieden sein.

Setzt man

$$\frac{\lambda}{l_{,,}} = t+u, \quad \frac{\lambda}{l''} = t-u,$$

wo t und u constant sind und u eine kleine Grösse ist, so erhält man

$$p = \frac{\sqrt{1+\frac{(t+u)^2}{\sin^2\alpha}} - \sqrt{1+\frac{(t-u)^2}{\sin^2\alpha}}}{\sqrt{\left(1+\frac{(t+u)^2}{\sin^2\alpha}\right)\left(1+\frac{(t-u)^2}{\sin^2\alpha}\right)}-1}.$$

Bei Vernachlässigung höherer Potenzen von u reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$p = \frac{2u\sin\alpha}{t\sqrt{\sin^2\alpha+t^2}}$$
$$= \frac{2u}{t}\cos\omega, \quad \text{wenn } \operatorname{tg}\omega = \frac{t}{\sin\alpha} \text{ ist.}$$

Bei einigen Körpern ist $\varphi + \psi$ negativ, mithin ist auch u negativ. Nach Jamin sind das Körper, deren Brechungsopponent $< 1,46$ ist.

Derartige Körper, bei denen also der senkrecht zur Einfallsebene schwingende Strahl verzögert ist gegen den parallel der Einfallsebene schwingenden, nennt man Körper mit negativer Reflexion. Zu diesen gehören z. B. Flussspath, Hyalith, Wasser, die meisten wässrigen Lösungen. Die anderen heissen Körper mit positiver Reflexion, dahin gehören Glas und die meisten festen Körper. Mittel, welche auffallendes, geradlinig polarisirtes Licht nicht in elliptisches umwandeln, heissen neutrale, deren hauptsächliche Repräsentanten sind Alaun und Menilit.

Cauchy setzt $p = \varepsilon \sin \alpha$, wo ε eine constante Grösse ist und Ellipticitätscoefficient genannt wird. Für Flintglas ist z. B. $\varepsilon = 0,0170$. Auch diese Formel giebt beinahe Uebereinstimmung mit der Erfahrung.

Wir können endlich noch eine andere Annahme über die Fortpflanzung der longitudinalen Wellen machen (cf. 3.), indem wir diese gegen die der transversalen Wellen als sehr gross setzen. Bei dieser Annahme sind die $\lambda_{,,}$ und λ'' nicht imaginär zu setzen, sondern sehr gross. Es ändert sich dann in den obigen Formeln nur $m_{,,}$ und m''. Diese werden

$$m_{,,} = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \alpha\, \lambda_{,,}^2}}, \qquad m'' = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \alpha\, \lambda''^2}}.$$

Man erhält dann, wenn höhere Potenzen von $\frac{\lambda^2}{\lambda_{,,}^2}$, $\frac{\lambda^2}{\lambda''^2}$ vernachlässigt werden

$$p = \frac{\lambda_{,,}^2 - \lambda''^2}{\lambda_{,,}^2 + \lambda''^2},$$

einen von α unabhängigen Werth.

Welche von diesen drei Annahmen die richtige ist, bleibt vorläufig noch unentschieden, jedenfalls geben alle drei mit den Experimentaluntersuchungen beinahe genügende Uebereinstimmung.

Eine andere ausführliche Untersuchung über das Complexe in der Theorie der elliptischen Polarisation bei Spiegelung und Brechung ist an den in § 331. 12 angeführten Orten von Ketteler gegeben. Es ist dort die Reflexion der anisotropen Mittel mit eingeschlossen. Die longitudinalen Schwingungen finden keine Berücksichtigung, sondern die Formeln werden abgeleitet von der Annahme, dass die Körpertheilchen mit den Aethertheilchen zusammen schwingen.

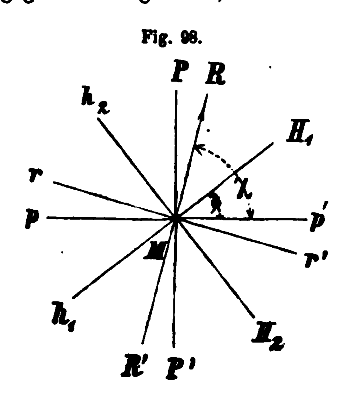
Färbung dünner Krystallblättchen. (§ 381.)

1. Allgemeiner Ausdruck für die Intensität des austretenden Strahles.

Bedeute an der Figur 98 pp' die Projection der Schwingungsebene des eintretenden Strahles, $H_1 h_1$, $H_2 h_2$ die der Hauptschnitte des Krystalles.

und damit also die Richtungen der Schwingungen, welche sich in dem Krystall fortpflanzen können. RR′ bestimme die Richtung der Schwingungen, welche der Analyseur austreten lässt. Bezeichnen ferner, wie in § 373 und 374, c' und c'' die verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, mit denen sich die beiden Lichtstrahlen, in die sich der senkrecht das Blättchen treffende Strahl zerlegt, durch den Krystall fortpflanzen. Δ bedeute die Dicke des Blättchens, φ und χ die Winkel, welche die Schwingungsrichtung des eintretenden Strahles mit dem einen Hauptschnitt und mit der Schwingungsrichtung des austretenden Strahles macht.

Fig. 98.



Die Schwingungsbewegung des eintretenden Strahles sei gegeben durch

$$s = r \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Diese zerlegt sich beim Eintritt in den Krystall in die beiden senkrecht zu einander polarisirten Schwingungen, welche, wenn von einer Schwächung in Folge von Absorption und einer theilweisen Reflexion abgesehen wird, bestimmt sind durch die Gleichungen

$$s_1 = r \cos\varphi \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad s_2 = r \sin\varphi \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Am Ende der Platte sind dieselben

$$s_1' = r \cos\varphi \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{c'T}\right), \quad s_2' = r \sin\varphi \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{c''T}\right).$$

Diese Gleichungen können, wenn ein anderer Anfangspunkt der Zeit genommen wird, auf die folgende Form gebracht werden:

$$s_1' = r \cos\varphi \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad s_2' = \sin r\, \varphi \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{T} \frac{c' - c''}{c' c''}\right).$$

Von diesen Schwingungen können nur diejenigen Componenten zur Erscheinung kommen, welche parallel RR′ gerichtet sind, also gegeben sind durch

$$r \cos\varphi \cos(\chi - \varphi) \sin 2\pi \frac{t}{T} \text{ und } r \sin\varphi \sin(\chi - \varphi) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\Delta}{T} \frac{c' - c''}{c' c''}\right).$$

Die aus diesen Componenten sich zusammensetzende Resultante lässt sich bringen auf die Form,

$$S = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \Phi\right).$$

Eine Rechnung analog der § 369. 1, giebt dann die gesuchte Intensität I^2, nämlich

$$I^2 = r^2 \left[\cos^2\chi + \sin 2\varphi \sin 2(\chi - \varphi) \sin^2 \pi \frac{\Delta}{T} \frac{c' - c''}{c' c''}\right].$$

Die Intensität I'^2 der darauf senkrechten Componente wird ebenso gefunden, und man erhält

$$'I'^2 = r^2 \left[\sin^2\chi - \sin 2\varphi \sin 2(\chi - \varphi) \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{T} \frac{c' - c''}{c'c''}\right],$$

so dass also, wie erwartet werden musste, da auf die Schwächung nicht Rücksicht genommen ist, $I^2 + I'^2 = r^2$ sich ergiebt.

2. Discussion der erhaltenen Formeln.

A) Sei $\chi = 90^0$, man habe also die sogenannte gekreuzte Stellung der Spiegel des Nörrembergschen Apparates, so ist

$$I_1^2 = r^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{T} \frac{c' - c''}{c'c''}.$$

Dieser Werth ist $= 0$,

1) wenn $\varphi = 0, \frac{1}{2}\pi, \pi., ..i\frac{1}{2}\pi$, wo $1 = 0, 1, 2, 3 \ldots$ ist, d. h. es wird für jedes beliebige Licht keine Reflexion stattfinden, also das Gesichtsfeld dunkel bleiben, wenn die Hauptschnitte der Platte mit den Schwingungsrichtungen des eintretenden polarisirten Lichtes zusammenfallen;

2) wenn φ keinen der obigen Werthe hat, aber

$$\sin \pi \frac{\varDelta}{T} \frac{c' - c''}{c'c''} = 0 \text{ ist,}$$

oder

$$\pi \frac{\varDelta}{T} \frac{c' - c''}{c'c''} = i\pi, \quad i = 0,\ 1.\ 2.\ 3. \ldots.$$

Bezeichne nun λ die Wellenlänge und v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des eintreffenden Lichtes, so dass also $T = \frac{\lambda}{v}$ ist, so transformirt sich die obige Bedingung in

$$\frac{c' - c''}{c'c''} v\varDelta = i\lambda, \quad \text{oder } \varDelta = i \frac{c'c''}{c' - c''} \frac{\lambda}{v},$$

d. h. es tritt nicht Licht aus, wenn der durch die Platte bewirkte Phasenunterschied eine ganze Zahl von Wellenlängen beträgt. Da aber in dieser Bedingung die Wellenlänge vorkommt, so gilt das Verschwinden nur für eine bestimmte Farbe. Das Blättchen erscheint also in einer Farbe die sich zusammensetzt aus den übrigen hindurchgelassenen farbigen Strahlen.

Die grösste Helligkeit haben die Farben, für welche gilt

$$\pi \frac{\varDelta}{T} \frac{(c' - c'')}{c'c''} = i\tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{oder } \varDelta = \tfrac{1}{2} i \frac{c'c''}{c' - c''} \frac{\lambda}{v}, \text{ wo } i = 1, 3, 5, 7 \ldots \text{ ist}$$

d. h. für die Schwingungen, deren Phasenunterschied ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge ist.

B) Sei $\chi = 0$, man habe also die Parallelstellung der Spiegel, so ist

$$I_2^2 = r^2 \left[1 - \sin^2 2\varphi \sin^2 \pi \frac{\varDelta}{T} \cdot \frac{c' - c''}{c'c''}\right] = r^2 - I_1^2.$$

Wenn demnach I_1^2 d. i. die Intensität des bei der Annahme A) aus-

tretenden Lichtes ein Max. (Min.) ist, so wird hier gerade ein Min. (Max.) des austretenden Lichtes beobachtet werden. Das Krystallblättchen zeigt also die complementäre Erscheinung zu der unter A).

Abgesehen von dem Phasenunterschied ist für $\chi = 90^0\, I_1^2 = $ Max., wenn $\sin 2\varphi = 1$, also $\varphi = 45^0$ ist, d. h. wenn der Hauptschnitt des Krystallblättchens den Winkel der gekreuzten Spiegelaxen halbirt. Dann ist gleichzeitig für $\chi = 0\; I_2^2$ ein Min. Für diese Lage des Krystallblättchens wird also die Färbung am brillantesten sein.

C) Ist $\chi = \varphi$, so ist $I^2 = r^2 \cos^2\chi$, $I'^2 = r^2 \sin^2\chi$, man erhält also Ausdrücke, in denen λ nicht enthalten ist, so dass also bei dieser Lage nie Farben erscheinen können. (cf. § 284.)

Die Platten dürfen nicht zu dick sein; denn sonst ist i eine grosse Zahl und dann wird, aus den § 369. 5, angegebenen Gründen die Färbung verschwinden müssen.

Aus diesen Betrachtungen wird auch klar, dass in das Krystallblättchen polarisirtes Licht eintreten muss; denn hätten wir gewöhnliches Licht, so würden wir in rascher Aufeinanderfolge alle möglichen Werthe von φ und χ erhalten wegen Veränderung der Richtung pp'.

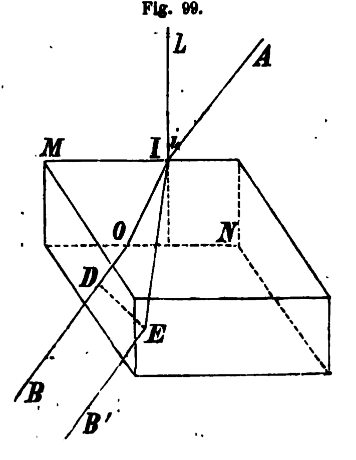
Die Art der Färbung der Blättchen ist analog der der Newtonschen Farbenringe, wie sich einfach ergiebt aus einer Vergleichung des I^2 mit dem A_r^2 von § 369.

Farbenringe in dicken Krystallplatten. (§ 382.)

1. Allgemeine Formeln für eine Platte aus einem einaxigen Krystall.

Seien (Fig. 99) B, B' die Ausgangspunkte zweier polarisirter Lichtstrahlen, welche bei ihrem Austritt aus der Krystallplatte I die gemeinsame Richtung IA haben. BO ist die Richtung des Strahles, dessen ordinär gebrochene Componente, und B'E die des Strahles, dessen extraordinär gebrochene Componente nach IA austritt. Es stellt demnach MN die Einfallsebene des Strahles BO vor, in der der extraordinär gebrochene Strahl im Allgemeinen nicht liegt. Fällen wir nun von der Eintrittsstelle E des Strahles B'E in den Krystall eine senkrechte Ebene auf BO, welche BO in D schneidet, und bezeichnen die Entfernung der Lichtquelle von E und D mit x, so ist die Schwingung eines jeden der beiden Strahlen in den Punkten E und D ausgedrückt durch

Fig. 99.



$$s = \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right)\right].$$

Wir setzen, da wir bei unserer Untersuchung von jeder Schwächung der Amplitude durch Absorption, theilweise Reflexion absehen, der Einfachheit wegen die Amplitude gleich 1.

Ist ferner α der Winkel, den die Schwingungsebene des eintretenden Strahles mit der Schwingungsebene des ordentlich gebrochenen Strahles bildet, so ist; wenn l_0 die Wellenlänge des ordentlichen Strahles im Krystall bedeutet, der in I austretende Strahl gegeben durch die Gleichung

$$y' = \cos\alpha \,.\, \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \left(\frac{DO}{l} + \frac{OI}{l_0}\right)\right].$$

Ist endlich die Entfernung des Beobachtungspunktes von I also IA = x' und bildet die Schwingungsebene des aus den componirenden Analyseur austretenden Strahles mit der des ordentlich gebrochenen den Winkel α', so ist der Ausdruck für die Schwingung des in das Auge kommenden Strahles

$$y = \cos\alpha' \cos\alpha \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{l} - \left(\frac{DO}{l} + \frac{OI}{l_0}\right)\right].$$

Für den zweiten, den extraordinären Strahl, ist der Winkel der Schwingung mit der des eintretenden Strahles $90 - \alpha$. Zu bedenken haben wir, dass IE nicht die Richtung der Wellennormale ist, sondern die des Strahles. Wir setzen s die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles, wenn 1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft ist.

Die Gleichung des in I austretenden Strahles ist dann

$$z' = \sin\alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l} - \frac{IE}{sT}\right).$$

Für den nach A kommenden Strahl endlich ist, wenn noch berücksichtigt ist, dass die Schwingungsebene des durchgelassenen Strahles mit dem eintreffenden hier den Winkel $90 + \alpha'$ macht,

$$z = -\sin\alpha' \sin\alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{l} - \frac{IE}{sT}\right).$$

Hier ist nun noch s zu entfernen. Es ist nach § 373. 6, wo c_2 sich auf den ordinären und c_1 auf den extraordinären Strahl bezieht, und ψ den Winkel bedeutet, den der gebrochene Strahl mit der optischen Axe bildet,

$$s = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}}},$$

also

$$z = -\sin\alpha' \sin\alpha \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x + x'}{l} - \frac{IE\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}}}{l}\right),$$

da auch noch statt T wegen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit 1 die Wellenlänge l gesetzt werden kann.

Diese beiden Strahlen sind nach derselben Ebene polarisirt, interferiren demnach so, dass man erhält die resultirende Intensität nach § 226 mit Berücksichtigung des Vorzeichens von z:

$$I^2 = (\cos\alpha' \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha' \sin\alpha)^2 - 2\sin\alpha \sin\alpha' \cos\alpha \cos\alpha' \times$$
$$\cos 2\pi \left[DO + \frac{OI.l}{l_0} - IE\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}}\right] : l.$$

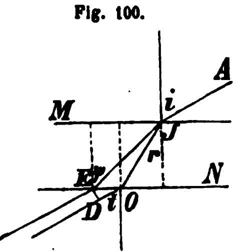
Die Phasendifferenz ist

$$\left[DO + \frac{IOl}{l_0} - IE\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}}\right] : l.$$

2. Die optische Axe ist senkrecht zur Krystallplatte.

In diesem Fall tritt eine Vereinfachung ein, weil beide Lichtstrahlen während ihres Durchgangs durch den Krystall in der Einfallsebene bleiben. Es ist dann ψ der Brechungswinkel des extraordinären Strahles, da die optische Axe des Krystalles mit dem Einfallsloth zusammenfällt.

Fig. 100.



Nach den in Figur 100 angeschriebenen Bezeichnungen ist

$$OD = OE \sin i,$$

und in $\triangle OEI$ ist

$$OE = \frac{OI \cdot \sin(\psi - r)}{\cos\psi}.$$

Ist $\varDelta$ die Dicke der Platte, so ist $OI = \varDelta : \cos r$, mithin nach Einsetzung dieser Werthe

$$\frac{OD}{l} = \frac{\varDelta \sin i \sin(\psi - r)}{l \cos r \cos\psi}.$$

Man findet weiter

$$\frac{OI.l}{l_0} = OI.\frac{\sin i}{\sin r} = \varDelta\frac{\sin i}{\sin r \cos r}$$
$$= \varDelta\frac{1}{c_2 \cos r} = \varDelta\frac{1}{c_2\sqrt{1 - c_2^2 \sin^2 i}},$$

da die Geschwindigkeit des Lichts in der Luft = 1 genommen ist.

Für den letzten Theil der Phasendifferenz

$$IE\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}}$$

ist zunächst $IE = \frac{\varDelta}{\cos\psi}$. Zur weiteren Untersuchung über die Quadratwurzel müssen wir zurückgehen zu § 373. 6.

Wir erhalten den dort mit r bezeichneten Werth, den wir hier zum Unterschied von dem Brechungswinkel mit (r) bezeichnen wollen, indem

wir unserem Problem entsprechend setzen $w = 1$, $v = u = 0$, denn die z Axe ist das Einfallsloth. Demnach ist

$$\sin^2(r) = \sin^2 i\,(c_1^2 + (c_2^2 - c_1^2)\cos^2(r)),$$

oder aufgelöst

$$\sin^2(r) = \frac{c_2^2 \sin^2 i}{1 + (c_2^2 - c_1^2)\sin^2 i}.$$

Daraus findet man

$$\cos^2(r) = \frac{1 - c_1^2 \sin^2 i}{1 + (c_2^2 - c_1^2)\sin^2 i},$$

also

$$\cot^2(r) = \frac{1 - c_1^2 \sin^2 i}{c_2^2 \sin^2 i}.$$

Dies giebt dann, in (4.) (5.) (6.) S. 449 eingesetzt, da $A' = z'$ wird,

$$x' = c_1^2 \sin^2 i, \quad z' = c_2 \sin i \sqrt{1 - c_1^2 \sin^2 i},$$

also

$$\cos^2\psi = \frac{c_2^2(1 - c_1^2 \sin^2 i)}{c_1^4 \sin^2 i + c_2^2(1 - c_1^2 \sin^2 i)},$$

$$\sin^2\psi = \frac{c_1^4 \sin^2 i}{c_1^4 \sin^2 i + c_2^2(1 - c_1^2 \sin^2 i)},$$

$$\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2} = \frac{c_1^2 \sin^2 i + 1 - c_1^2 \sin^2 i}{c_1^4 \sin^2 i + c_2^2(1 - c_1^2 \sin^2 i)}$$

$$= \frac{1}{c_2^2 + (c_1^2 - c_2^2)\,c_1^2 \sin^2 i}.$$

Mithin ist

$$IE\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}} = \frac{\Delta}{\cos\psi\sqrt{c_2^2 + (c_1^2 - c_2^2)\,c_1^2 \sin^2 i}}$$

und damit

$$DO + IO\,\frac{1}{l_0} = IE\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} - \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}}$$

$$= \Delta\left\{\frac{\sin i \sin(\psi - r)}{\cos r \cos\psi} + \frac{1}{c_2\sqrt{1 - c_2^2 \sin^2 i}} - \frac{1}{c_2\sqrt{1 - c_1^2 \sin^2 i}}\right\}.$$

In diesen Ausdruck müssen wir endlich noch den obigen Werth von ψ einführen und r ausdrücken durch i mit Hülfe der bekannten Gleichung $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{c_2}$. Wir erhalten dann nach passender Ordnung

$$DO + IO\,\frac{1}{l_0} - IE\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}}$$

$$= -\frac{\Delta}{c_2}\left\{\sqrt{1 - c_1^2 \sin^2 i} - \sqrt{1 - c_2^2 \sin^2 i}\right\} = D.$$

Nehmen wir endlich Δ nicht zu klein, so wird i klein sein und können desshalb höhere Potenzen von $\sin^2 i$ vernachlässigt werden. Dann ist

$$D = \frac{\Delta}{c_2}\,\tfrac{1}{2}\sin^2 i\,(c_1^2 - c_2^2).$$

Dieser Werth in I^2 von 1. substituirt, giebt

$$I^2 = (\cos\alpha' \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha' \sin\alpha)^2 - 2\sin\alpha \sin\alpha' \cos\alpha \cos\alpha' \cos 2\pi \frac{D}{l},$$

$$= \cos^2(\alpha + \alpha') + \sin 2\alpha \sin 2\alpha' \sin^2 2\pi \frac{D}{l}.$$

Führen wir endlich den $\angle\, \chi$ aus § 381 ein, so erhalten wir, da dann $\alpha' = \chi - \alpha$ ist:

$$I^2 = \cos^2\chi + \sin 2\alpha \sin(2\chi - 2\alpha) \sin^2 \pi \frac{D}{l}$$

und dem entsprechend

$$I'^2 = \sin^2\chi - \sin 2\alpha \sin(2\chi - 2\alpha) \sin^2 \pi \frac{D}{l}.$$

Die Phasendifferenz ist

$$\frac{1}{2} \frac{\varDelta}{c_2 l} \sin^2 i\, (c_1^2 - c_2^2).$$

Diese Formeln müssen selbstverständlich denen in § 381 ähnlich gebildet sein.

3. Discussion der erhaltenen Formeln.

Der in 2. erhaltene Werth von D hängt zunächst von i so ab, dass er für dieselben i, abgesehen von den anderen Grössen, dieselben Werthe erhält. Daraus folgt, dass in einem um die Axe des convergirenden Bündels gelegten Kreiskegel die Phasendifferenz dieselbe ist, dass also sich um die Axe des Krystalles herum eine Anzahl von im homogenen Lichte hellen und dunklen, im weissen Lichte farbigen Kreisen herum legen müssen.

Die Phasendifferenz ist ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$, wenn

$$\frac{D}{l} = (2n - 1)\frac{1}{2}, \text{ d. h. } \sin^2 i = (2n-1)\frac{c_2}{c_1^2 - c_2^2}\frac{l}{\varDelta}$$

ist, und ein gerades Vielfaches, wenn

$$\frac{D}{l} = 2n\frac{1}{2}, \text{ d. h. } \sin^2 i = 2n\frac{c_2}{c_1^2 - c_2^2}\frac{l}{\varDelta}$$

ist. Da nun der Halbmesser der hellen und dunklen Kreise bei homogenem Licht gemessen wird durch tang i, oder auch, da die i klein sind, durch sin i, so folgt aus den obigen Formeln, dass diese Halbmesser umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Plattendicke und direct proportional der Quadratwurzel der Wellenlänge sind, dass sie bei verschiedenen Krystallen von der Geschwindigkeitsdifferenz des ordentlich und ausserordentlich gebrochenen Strahles abhängen.

Setzen wir nun $\chi = 0$, d. h. steht der Analyseur so, dass die Strahlen, welche austreten, so schwingen, wie das einfallende Licht, so ist

$$I^2 = 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi \frac{D}{l}.$$

Ist nun $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$, so ist $I^2 = 1$. Dies erklärt das weisse Kreuz. So lange α nur wenig von 0 und 90^0 verschieden ist, ist auch I

nur wenig von 1 verschieden, es muss sich deshalb das weisse Kreuz nach beiden Seiten ausbreiten und, da bei grösseren Kreisen gleichen Werthen von α längere Bögen entsprechen, müssen die Arme des Kreuzes in grösseren Abständen von der Mitte breiter werden.

$$\text{Ist } D = \frac{n+1}{2}\, l, \text{ so ist } I^2 = 1 - \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha.$$

$$D = \frac{n}{2}\, l, \quad \text{,, ,,} \quad I^2 = 1.$$

Die Intensität schwankt demnach zwischen 1 und $\cos^2 2\alpha$ und dieser Unterschied ist am grössten, 1 — 0, wenn $\alpha = 45^0$ wird.

Ist dagegen $\chi = 90^0$, hat man also die gekreuzte Stellung des Polarisationsapparates, so ist

$$I^2 = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi \frac{D}{l}.$$

Dann ist $I = 0$, wenn $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^0$ wird. Dadurch ist das schwarze Kreuz und auch dessen allmähliche Verbreiterung erklärt.

$$\text{Ist } D = \frac{n+1}{2}\, l, \text{ so ist } I^2 = \sin^2 2\alpha,$$

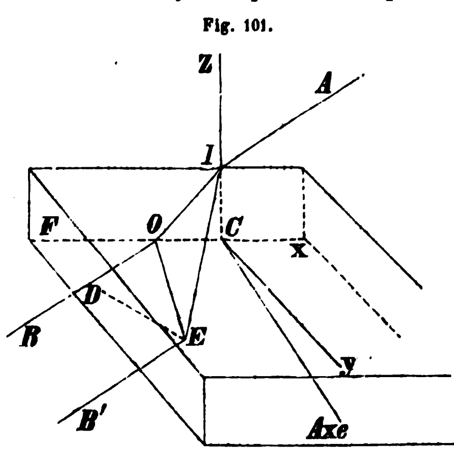
$$D = \frac{n}{2}\, l, \quad \text{,, ,,} \quad I^2 = 0.$$

Die grössten Intensitätsunterschiede sind demnach auch hier bei $\alpha = 45^0$.

Allgemein ist, unabhängig von D, $I^2 = $ Min. und $I'^2 = $ Max., wenn bei einem beliebigen χ ist $\sin 2\alpha = 0$ oder $\sin(2\chi - 2\alpha) = 0$, d. h. bei $\alpha = 0$ $\alpha = 90^0$, oder bei $\chi - \alpha = 0$, $\chi - \alpha = 90^0$. Dies lehrt, dass bei jeder beliebigen Stellung des Apparates die farbigen Ringe durchzogen sind von vier farblosen Durchmessern, von denen in obigen Fällen bei $\chi = 0$ und $\chi = 90^0$ immer zwei sich decken.

4. Die Krystallplatte ist parallel der Axe geschliffen.

Fig. 101.



Als Ausgangspunkt können wir hier die Formeln von 1. nehmen; denn in diesen ist noch keine specielle Annahme über die Lage der Axe gemacht. Es ist deshalb zu untersuchen

$$DO + IO \frac{1}{l_0} - IE \sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}}.$$

Die Buchstaben und Linien der Figur 101 sind gleichbedeutend mit denen

an Figur 99. Die optische Axe bilde mit O C den Winkel A. Es ist dann § 373, 6. $u = \cos A$, $v = \sin A$, $w = 0$, folglich, wenn, wie in 2., die Bezeichnung (r) eingeführt wird, und die in § 373, 6. angedeutete Rechnung vorgenommen wird,

$$\sin^2(r) = \sin^2 i\,(c_1^2 + (c_2^2 - c_1^2)\cos^2 A \sin^2(r)),$$

also

$$\sin^2(r) = \frac{c_1^2 \sin^2 i}{1 - (c_2^2 - c_1^2)\cos^2 A \sin^2 i},$$

$$\cos^2(r) = \frac{1 - (c_2^2 - c_1^2)\cos^2 A \sin^2 i - c_1^2 \sin^2 i}{1 - (c_2^2 - c_1^2)\cos^2 A \sin^2 i},$$

$$\cot^2(r) = \frac{1 - (c_2^2 - c_1^2)\cos^2 A \sin^2 i - c_1^2 \sin^2 i}{c_1^2 \sin^2 i}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 i\,(c_1^2 \sin^2 A + c_2^2 \cos^2 A)}{c_1^2 \sin^2 i}.$$

Aus den Gleichungen (4.) (5.) (6.) S. 449 folgt dann nach Substitution dieser Werthe und einer einfachen Rechnung

$$z' = c_1 \sin i \sqrt{1 - \sin^2 i\,(c_1^2 \sin^2 A + c_2^2 \cos^2 A)},$$

$$x' = \sin^2 i\,(c_1^2 \sin^2 A + c_2^2 \cos^2 A),$$

$$y' = -\sin^2 i\,(c_1^2 - c_2^2)\cos A \sin A.$$

Diese Werthe würden dann geben $x'^2 + y'^2 + z'^2$. Man erhält aber diesen Ausdruck bequemer durch Substitution der betreffenden Werthe in die S. 449 angegebene Form der Gleichung der Wellenfläche.

Diese Rechnung giebt

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sin^2 i\,(c_1^2 - c_2^2\,(c_1^2 - c_2^2)\cos^2 A \sin^2 i),$$

folglich dann

$$\cos\psi = \frac{c_2^2 \cos A \sin i}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2\,(c_1^2 - c_2^2)\cos^2 A \sin^2 i}},$$

$$\sin\psi = \frac{c_1 \sqrt{1 - c_2^2 \cos^2 A \sin^2 i}}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2\,(c_1^2 - c_2^2)\cos^2 A \sin^2 i}}.$$

Nun ist aber

$$OD = OE \cos\angle EOD,$$

und, wenn die Coordinaten des Punktes E x und y sind,

$$OE = \frac{y}{\sin\angle EOF},$$

also

$$OD = y\,\frac{\cos\angle EOD}{\sin\angle EOF}.$$

Da nun die Linien E O und O D mit den Coordinatenaxen die Winkel bilden

$$\angle EOF,\quad 90^0 - \angle EOF,\quad 90^0,$$
$$90^0 - i,\quad 90^0,\quad i,$$

so gilt nach dem bekannten Satz der analytischen Geometrie

$$\cos\angle EOD = \cos\angle EOF \,.\, \sin i,$$

mithin ist

$$OD = y \sin i \,.\, \mathrm{cotg}\,\angle EOF.$$

Nun ist aber, wenn r den Brechungswinkel O I C bedeutet,

$$\operatorname{cotg} \angle EOF = \frac{x - OC}{y} = \frac{x - \varDelta \operatorname{tg} r}{y},$$

also

$$OD = \sin i\,(x - \varDelta \operatorname{tg} r).$$

In § 373, 6. sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die cos. der Winkel, welche der gebrochene extraordinäre Strahl mit den Coordinatenaxen bildet, genannt. Behalten wir diese Bezeichnung bei, so ist

$$x = IE\,\mathfrak{a} \text{ und } z = \varDelta = IE\,\mathfrak{c}, \text{ also } x = \varDelta\,\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}},$$

und dann

$$OD = \varDelta \sin i \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}} - \operatorname{tg} r\right) = \varDelta \sin i \left(\frac{x'}{z'} - \operatorname{tg} r\right),$$

also endlich, wenn noch $\operatorname{tg} r$ aus $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{c_2}$ genommen wird und die oben gefundenen Werthe von x', z' substituirt werden,

$$OD = \varDelta \left(\frac{\sin^2 i\,(c_1^2 \sin^2 A + c_2^2 \cos^2 A)}{c_1 \sqrt{1 - \sin^2 i\,(c_1^2 \sin^2 A + c_2^2 \cos^2 A)}} - \frac{c_2^2 \sin^2 i}{c_2 \sqrt{1 - c_2^2 \sin^2 i}}\right).$$

Für O I erhalten wir wie in 2.

$$OI\,\frac{1}{l_0} = \varDelta\,\frac{1}{c_2 \cos r} = \varDelta\,\frac{1}{c_2 \sqrt{1 - c_2^2 \sin^2 i}}.$$

Nach der Einführung der Werthe von $\cos\psi$ und $\sin\psi$ ist

$$\sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2\,(c_1^2 - c_2^2) \cos^2 A \sin^2 i}}$$

und, wenn man nun bedenkt, dass, wie vorhin schon angegeben,

$$IE = \frac{\varDelta}{\mathfrak{c}} = \varDelta \,.\, \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{z'}$$

ist, so findet man

$$IE \sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}} = \frac{\varDelta}{c_1 \sqrt{1 - \sin^2 i\,(c_1^2 \sin^2 A + c_2^2 \cos^2 A)}}.$$

Die Substitution der einzelnen Werthe giebt endlich

$$D = OD + OI\,\frac{1}{{}_0} - IE \sqrt{\frac{\cos^2\psi}{c_2^2} + \frac{\sin^2\psi}{c_1^2}},$$

$$= \varDelta \left\{\frac{1 - c_2^2 \sin^2 i}{c_2 \sqrt{1 - c_2^2 \sin^2 i}} - \frac{1 - \sin^2 i\,(c_1^2 \sin^2 A + c_2^2 \cos^2 A)}{c_1 \sqrt{1 - \sin^2 i\,(c_1^2 \sin^2 A + c_2^2 \cos^2 A)}}\right\},$$

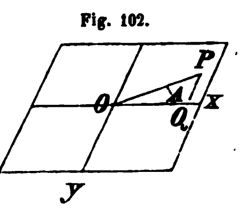
$$= \varDelta \left\{\frac{1}{c_2} \sqrt{1 - c_2^2 \sin^2 i} - \frac{1}{c_1} \sqrt{1 - \sin^2 i\,(c_1^2 \sin^2 A + c_2^2 \cos^2 A)}\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist immer von A abhängig, ausser wenn $i = 0$ ist, dann reducirt sich derselbe auf $D = \varDelta \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right)$, wie vorauszusehen; denn dann passt diese Untersuchung zu § 381.

5. Discussion der erhaltenen Formel.

Wir suchen zunächst die geometrischen Orte aller Punkte gleicher Helligkeit, wenn allein D berücksichtigt wird, also χ und α unverändert bleiben. Wir projiciren die Erscheinung auf eine Ebene parallel der Grenzebene des Krystallblättchens und nehmen in dieser ein rechtwinkliges Coordinatensystem xy, dessen Anfangspunkt mit dem Schnittpunkt der früheren xy Ebene und der Axe des Lichtbündels zusammenfällt und dessen x Axe parallel der Axe des Krystalles ist. Die Einfallsebene eines im Punkt P (Fig. 102) die Ebene durchsetzenden Lichtstrahles ist dann OP, ferner ist

Fig. 102.



$$\cos A = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin A = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Nennen wir E die Entfernung des Punktes, nach dem die sämmtlichen interferirten Strahlen convergiren, von der Projectionsebene, so ist

$$\operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{E}.$$

Da aber i immer kleine Winkel sind, so können wir auch setzen

$$\sin i = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{E}.$$

Die Einführung dieser Werthe in D giebt

$$D = \varDelta \left\{ \frac{1}{c_2} \sqrt{1 - \frac{c_2^2 (x^2 + y^2)}{E^2}} - \frac{1}{c_1} \sqrt{1 - \frac{c_1^2 y^2 + c_2^2 x^2}{E^2}} \right\},$$

oder näherungsweise

$$D = \varDelta \left\{ \frac{1}{c_2} \left(1 - \frac{c_2^2 (x^2 + y^2)}{2E^2}\right) - \frac{1}{c_1} \left(1 - \frac{c_1^2 y^2 + c_2^2 x^2}{2E^2}\right) \right\}.$$

Nach einiger Umformung erhalten wir daraus

$$2E^2 \left[\frac{D}{\varDelta} \frac{c_1}{c_1 - c_2} - \frac{1}{c_2} \right] = c_1 y^2 - c_2 x^2.$$

Da dies die Gleichung einer Hyperbel ist, so haben wir damit gefunden, dass sämmtliche Punkte, für die D einen bestimmten Werth hat, auf einer Hyperbel liegen, deren Mittelpunkt O ist und deren eine Hauptaxe mit der optischen Axe zusammenfällt.

Die weitere Untersuchung hängt nun von der Discussion dieser Hyperbelgleichung ab.

Im Mittelpunkt ist $x = y = 0$, mithin $D = \varDelta \left(\frac{c_1 - c_2}{c_1 c_2}\right)$.

Dies ist, wie schon erwähnt, der Werth von § 381.

Nennen wir δ den Unterschied zwischen der Phasendifferenz der Mitte und derjenigen an den verschiedenen Punkten der Platte, so ist allgemein

$$D = \varDelta \frac{c_1 - c_2}{c_1 c_2} + \delta$$

und damit die Hyperbelgleichung

$$E^2 \frac{2 c_1 \delta}{(c_1 - c_2) \Delta} = c_1 y^2 - c_2 x^2.$$

Für einen negativen Krystall ist $c_1 > c_2$, mithin die reelle Halbaxe a der Hyperbeln parallel der y Axe, also renkrecht zur optischen Axe,

$$a = E \, . \sqrt{\frac{2 \delta}{(c_1 - c_2) \Delta}}$$

und

$$\delta = a^2 \frac{(c_1 - c_2) \Delta}{2 E^2}.$$

Es wächst demnach mit zunehmender Entfernung a von der Mitte senkrecht zur Axe die Phasendifferenz proportional dem Quadrate des Abstandes, also die Curven gleicher Helligkeit rücken um so näher zusammen, je weiter sie von der Axe entfernt sind.

Setzen wir $y = 0$, so folgt aus der Hyperbelgleichung

$$\delta = - \frac{c_2 (c_1 - c_2) \Delta}{2 c_1 E^2} x^2.$$

Es ist mithin die Phasendifferenz parallel der optischen Axe negativ. Setzen wir dann $\delta = - \delta'$, so wird die Gleichung der Linien gleicher Helligkeit

$$E^2 \frac{2 c_1 \delta'}{(c_1 - c_2) \Delta} = c_2 x^2 - c_1 y^2.$$

Dieser Gleichung entspricht ein zweites System von Hyperbeln, deren reelle Axen parallel der optischen Axe liegen. Diese Curven rücken auch einander immer näher, je weiter wir uns von der Mitte entfernen. Beide Hyperbelsysteme sind getrennt durch $\delta = 0$. Dann wird die Gleichung

$$c_1 y^2 - c_2 x^2 = 0,$$

also die Gleichung der Asymptoten, deren Neigung gegeben ist durch

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}.$$

Diese ist also um so stärker, je grösser die Doppelbrechung ist.

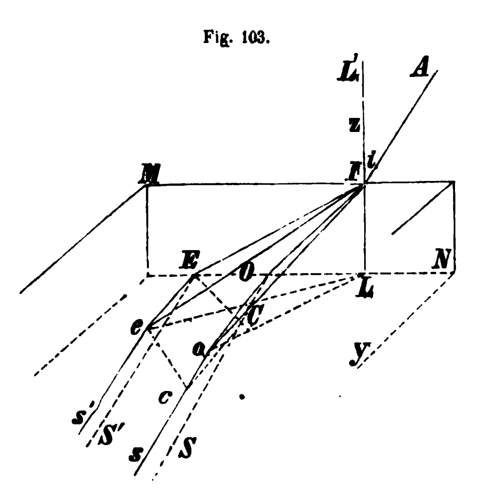
Eine der in 3. angestellten analoge Betrachtung giebt endlich noch Aufschluss über die Intensität der betreffenden Farben. Das Maximum findet statt bei $\chi = 90^0$, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = 90^0$ ist.

6. Allgemeine Formeln für eine Platte aus einem zweiaxigen Krystall.

Die Figur 103 ist analog denen zu den vorigen Nummern gezeichnet. Die Untersuchung wird hier noch complicirter, als die vorigen waren; denn beide in IA zusammentreffende Strahlen gehören zu Strahlen, die im Allgemeinen nicht in der Ebene MN liegen, welche das Ausfallsloth L′I, die austretenden Strahlen, mithin auch die betreffenden Wellennormalen enthält. s′e und s o seien die beiden einfallenden Strahlen, welche

so gebrochen werden, dass von jedem der eine der beiden, in die er zerlegt wird, mit dem einen des anderen in IA zusammentreffen. E und O seien die Projectionen der Punkte e und o, in denen die Strahlen eintreten, auf MN und S'E, SO die Projectionen von s'e und so auf die Ebene MN. Legt man nun durch Ee eine Ebene senkrecht zu s'e oder S'E, welche den Strahl so und dessen Projection in c und C schneidet, so ist analog dem Früheren, wenn wiederum die Geschwindigkeit des Lichtes im umgebenden Mittel 1 gesetzt wird, der Phasenunterschied

Fig. 103.



$$2\pi\left(\frac{\mathrm{co}}{\mathrm{T}}+\frac{\mathrm{oI}}{\mathrm{s'T}}-\frac{\mathrm{eI}}{\mathrm{s''T}}\right),$$

wo mit s', s'' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Strahlen oI und eI bezeichnet werden. Nun ist aber, wenn, wie oben, i der Einfallswinkel ist, r', r'' die Brechungswinkel der Wellenebenen sind, und ω', ω'' die Winkel oLE und eLE bedeuten,

$$\mathrm{co} = \mathrm{CO} = \mathrm{OE}\sin i, \qquad \mathrm{OE} = \mathrm{Le}\cos\omega'' - \mathrm{Lo}\cos\omega'.$$

Wenn ferner $\varDelta$ die Dicke der Platte und $\angle\,\mathrm{oIL} = \psi'$, $\angle\,\mathrm{eIL} = \psi''$ ist, so hat man $\mathrm{Le} = \varDelta\tang\psi''$, $\mathrm{Lo} = \varDelta\tang\psi'$, mithin

$$\mathrm{co} = \varDelta(\tang\psi''\cos\omega'' - \tang\psi'\cos\omega')\sin i.$$

Ferner ist

$$\mathrm{oI} = \frac{\varDelta}{\cos\psi'}, \quad \mathrm{eI} = \frac{\varDelta}{\cos\psi''}.$$

Die Einsetzung dieser Werthe in den Phasenunterschied giebt

$$\mathrm{D} = \varDelta\left\{(\mathrm{tg}\,\psi''\cos\omega'' - \mathrm{tg}\,\psi'\cos\omega')\sin i + \frac{1}{\mathrm{s'}\cos\psi'} - \frac{1}{\mathrm{s''}\cos\psi''}\right\}.$$

Da ferner

$$\frac{\sin i}{1} = \frac{\sin r'}{c'} = \frac{\sin r''}{c''}$$

ist nach der bekannten Bezeichnung der Geschwindigkeiten c' und c'' und der im umgebenden Mittel = 1, so ergiebt sich

$$\mathrm{D} = \varDelta\left\{\left[\frac{\sin\psi''\cos\omega''\sin r''}{c''\cos\psi''} - \frac{1}{\mathrm{s''}\cos\psi''}\right] - \left[\frac{\sin\psi'\cos\omega'\sin r'}{c'\cos\psi'} - \frac{1}{\mathrm{s'}\cos\psi'}\right]\right\}.$$

Um nun hieraus ω' und ω'' zu entfernen, bedenke man, dass dieselben die Neigungswinkel der Ebene durch Einfallsloth und Strahl gegen die Ebenen durch Einfallsloth und Wellennormalen sind. Bedeuten dann q' und q''

die Winkel zwischen Strahl und Wellennormale, so ist nach einem bekannten Satz der sphärischen Trigonometrie

$$\cos q' = \cos\psi' \cos r' + \sin\psi' \sin r' \cos\omega',$$
$$\cos q'' = \cos\psi'' \cos r'' + \sin\psi'' \sin r'' \cos\omega''.$$

Bedenkt man dann, dass

$$\cos q' = \frac{OI}{oi} = \frac{c'}{s'},\ \cos q'' = \frac{EI}{ei} = \frac{c''}{s''}$$

ist, so findet man aus diesen Gleichungen

$$\cos\omega' = \frac{\frac{c'}{s'} - \cos\psi' \cos r'}{\sin\psi' \sin r'},\ \cos\omega'' = \frac{\frac{c''}{s''} - \cos\psi'' \cos r''}{\sin\psi'' \sin r''}$$

und damit

$$D = \Delta\left[\frac{\cos r'}{c'} - \frac{\cos r''}{c''}\right] = \frac{\Delta}{T}\left[\frac{\sqrt{1 - c'^2 \sin^2 i}}{c'} - \frac{\sqrt{1 - c''^2 \sin^2 i}}{c''}\right].$$

7. Die Krystallplatte ist parallel der Ebene durch die beiden optischen Axen geschliffen.

Um die c' und c'' fortzuschaffen, benutzen wir die Formel von § 374. 5., wo die oberen Indices durch § 374, 8. verständlich sind,

$$c'^2 = \frac{c_1^2 + c_3^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_3^2}{2} \cos(\varphi_1' + \varphi_2'),$$
$$c''^2 = \frac{c_1^2 + c_3^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_3^2}{2} \cos(\varphi_1'' - \varphi_2'').$$

Man sucht zunächst aus diesen Formeln die φ zu entfernen mit Hülfe der Gleichungen in § 374. 8. Da der Krystall parallel der Ebene der optischen Axen geschliffen ist, so ist $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, also

$$\cos\varphi_1' = -u_1 \sin r',\quad \sin\varphi_1' = \sqrt{1 - u_1^2 \sin^2 r'},$$
$$\cos\varphi_2' = -u_2 \sin r',\quad \sin\varphi_2' = \sqrt{1 - u_2^2 \sin^2 r'},$$

oder da $\sin r' = c' \sin i$ ist,

$$\cos\varphi_1' = -c' u_1 \sin i,\quad \sin\varphi_1' = 1 - \tfrac{1}{2} c'^2 u_1^2 \sin^2 i,$$
$$\cos\varphi_2' = -c' u_2 \sin i,\quad \sin\varphi_2' = 1 - \tfrac{1}{2} c' u_2^2 \sin^2 i,$$

wo die Werthe der sin. näherungsweise genommen sind, unter Rücksicht darauf, dass i nur klein ist.

Die Substitution dieser Werthe giebt

$$c'^2 = \frac{c_1^2 + c_3^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_3^2}{2} (c'^2 u_1 u_2 \sin^2 i - 1 + \tfrac{1}{2} c'^2 (u_1^2 + u_2^2) \sin^2 i).$$

Ganz ebenso erhält man

$$c''^2 = \frac{c_1^2 + c_3^2}{2} + \frac{c_1^2 - c_3^2}{2} (c''^2 u_1 u_2 \sin^2 i + 1 - \tfrac{1}{2} c''^2 (u_1^2 + u_2^2) \sin^2 i).$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert

$$c'^2 = \frac{4 c_3^2}{4 - (c_1^2 - c_3^2)(u_1 + u_2)^2 \sin^2 i},\quad c''^2 = \frac{4 c_1^2}{4 + (c_1^2 - c_3^2)(u_1 - u_2)^2 \sin^2 i}.$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in D erhält man

$$D = \Delta \left\{ \frac{\sqrt{4 - (c_1^2 - c_3^2)(u_1 + u_2)^2 \sin^2 i - 4 c_3^2 \sin^2 i}}{2 c_3} - \frac{\sqrt{4 + (c_1^2 - c_3^2)(u_1 - u_2)^2 \sin^2 i - 4 c_1^2 \sin^2 i}}{2 c_1} \right\}.$$

Vernachlässigt man hier, weil i kleine Winkel sind, die vierten Potenzen von sin i, so reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$D = \Delta \left\{ \frac{2 - \frac{1}{4}[(c_1^2 - c_3^2)(u_1 + u_2)^2 + 4 c_3^2] \sin^2 i}{2 c_3} - \frac{2 + \frac{1}{4}[(c_1^2 - c_3^2)(u_1 - u_2)^2 - 4 c_1^2] \sin^2 i}{2 c_1} \right\}.$$

Zur weiteren Vereinfachung dieses Werthes legen wir die x Axe mitten zwischen die optischen Axen. Wenn wir dann φ nennen den Winkel der Einfallsebene gegen die x'zEbene, und die Winkel a_0 aus § 374. 3, einführen, so finden wir

$$u_1 = \cos(\varphi - a_0), \quad u_2 = \cos(\varphi + a_0),$$

also $$u_1 + u_2 = 2 \cos\varphi \cos a_0, \quad u_1 - u_2 = 2 \sin\varphi \sin a_0,$$

und damit

$$D = \Delta \frac{c_1 - c_3}{2 c_1 c_3} \{2 - \sin^2 i [(c_1 + c_3)(c_1 \cos^2\varphi \cos^2 a_0 + c_3 \sin^2\varphi \sin^2 a_0) - c_1 c_3]\}.$$

Die Discussion der erhaltenen Formel muss Resultate ergeben, die denen in 5. enthaltenen analog sind, da die Formeln für die Intensität ebenso gebildet sind.

Für die Linien gleicher Helligkeit ist, wenn wir die Methode von 5 anwenden, also setzen:

$$\sin^2 i = \frac{x^2 + y^2}{E^2}, \quad \cos^2\varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

und $\cos a_0$, $\sin a_0$ ausdrücken durch c_1 und c_2 nach § 374. 3,

$$\frac{E\left[\frac{D}{\Delta} 2 c_1 c_3 - 2(c_1 - c_3)\right]}{c_1^2 - c_2^2 - c_1 c_3 + c_3^2} = c_3 y^2 - c_1 x^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Asymptoten bestimmt sind durch

$$\tang \beta = \sqrt{\frac{c_3}{c_1}}.$$

Eine weitere Entwickelung ist angedeutet am Schluss der nächsten Nummer.

8. Die Krystallplatte ist senkrecht zu einer der Mittellinien geschliffen.

Wenn wir wie in 7. hierbei verfahren wollten, so hätten wir $v_1 = v_2 = o$, $w_1 = w_2 = c_0$ zu setzen und den u_1, u_2 alle Werthe von -1 bis

$+1$ zu geben. Es bietet uns aber § 374. 4, eine bequemere Methode. Wir beziehen die Untersuchung auf ein Coordinatensystem, dessen z Axe mit der Mittellinie, also dem Einfallsloth, welche Richtung zugleich die einer Elasticitätsaxe ist, zusammenfällt und dessen x und y Axe mit den anderen beiden Elasticitätsaxen zusammenfallen. Wir setzen wie oben die Geschwindigkeit der Wellenbewegung ausserhalb des Krystalles 1. Die Welle md, wenn wir uns die Figur 91 zu § 373 vergegenwärtigen, würde nach der Zeit 1 so weit gekommen sein, dass sie die xy Ebene (dg ist deren Projection auf die Papierebene) in einer Geraden (deren Projection g) schnitte, deren Gleichung gegeben sein mag durch

$$mx + ny = 1.$$

Bedeutet φ den Winkel, welchen die x Axe mit der Einfallsebene bildet, und i den Einfallswinkel, so muss sein

$$m = \sin i \cos\varphi, \quad n = \sin i \sin\varphi.$$

Die gebrochene Welle ist dann nach der bekannten Construction die Ebene durch diese Linie, welche die Wellenfläche, deren Mittelpunkt der Einfallspunkt (d) ist, berührt. Deren Gleichung sei

$$mx + ny + pz = 1,$$

wo nun p sein muss entweder $\frac{\cos r'}{c'}$ oder $\frac{\cos r''}{c''}$.

Wenn aber diese Ebene die Wellenfläche berühren soll, so muss nach § 374. 4, (l.), weil das dort genommene Coordinatensystem mit unserem übereinstimmt, und weil die Gleichung der gebrochenen Welle der dort angenommenen Gleichung (e) entspricht,

$$x' = m c_2 c_3, \quad y' = n c_3 c_1, \quad z' = p c_1 c_2$$

sein, wo x', y' z' der Gleichung der Wellenfläche genügen.. Die Einsetzung dieser Werthe von x', y', z' in die Gleichung der Wellenfläche giebt zur Bestimmung der unbekannten p folgende Gleichung:

$$(c_2^2 c_3^2 m^2 + c_3^2 c_1^2 n^2 + c_1^2 c_2^2 p^2)(m^2 + n^2 + p^2)$$
$$- [(c_2^2 + c_3^2) m^2 + (c_3^2 + c_1^2) n^2 + (c_1^2 + c_2^2) p^2 + 1 = 0,$$

oder

$$c_1^2 c_2^2 p^4 + (c_2^2 c_3^2 m^2 + c_3^2 c_1^2 n^2 + c_1^2 c_2^2 (m^2 + n^2) - (c_1^2 - c_2^2) p^2$$
$$= + (c_2^2 + c_3^2) m^2 + (c_3^2 + c_1^2) n^2 - 1 - (m^2 + n^2)(c_2^2 c_3^2 m^2 + c_3^2 c_1^2 n^2)$$
$$= - [c_3^2 (m^2 + n^2) - 1][c_2^2 m^2 + c_1^2 n^2 - 1].$$

Setzt man dafür abgekürzt

$$c_1^2 c_2^2 p^4 + N p^2 = - P,$$

so erhält man

$$2 c_1^2 c_2^2 p^2 = - N \pm \sqrt{N^2 - 4 c_1^2 c_2^2 P}.$$

Zu bemerken ist noch, dass wir hier nur die beiden positiven Werthe von p benutzen können; denn nur für diese dadurch bestimmten Werthe kann die gebrochene Wellenebene die positive z Axe schneiden.

Diese Werthe, welche, wie oben schon bemerkt ist, die $\frac{\cos r'}{c'}$ und $\frac{\cos r''}{c''}$ sind, geben dann in den Werth von 7.

$$D = \Delta \left[\frac{\cos r_{,}}{c'} - \frac{\cos r''}{c''}\right]$$

eingesetzt

$$D = \Delta \left[\sqrt{\frac{-N + \sqrt{N^2 - 4c_1^2 c_2^2 P}}{2c_1^2 c_2^2}} - \sqrt{\frac{-N - \sqrt{N^2 - 4c_1^2 c_2^2 P}}{2c_1^2 c_2^2}}\right].$$

Um nun die Linien gleicher Helligkeit kennen zu lernen, benutzen wir das Verfahren der vorigen Nummer, beziehen also die Linien wieder auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und setzen

$$\sin i = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{E}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Man erhält nun zunächst durch zweimaliges Quadriren des für D gefundenen Ausdrucks

$$\left(N + c_1^2 c_2^2 \frac{D^2}{\Delta^2}\right)^2 = 4c_1^2 c_2^2 P,$$

d. i. nach Wiederherstellung des Werthes N und P

$$\left[c_1^2 c_2^2 \sin^2 i + c_3^2 \sin^2 i\,(c_2^2 \cos^2\varphi + c_1^2 \sin^2\varphi) - (c_1^2 + c_2^2) + c_1^2 c_2^2 \frac{D^2}{\Delta^2}\right]^2 =$$
$$4c_1^2 c_2^2 (c_3^2 \sin^2 i - 1)\,[\sin^2 i\,(c_2^2 \cos^2\varphi + c_1^2 \sin^2\varphi) - 1].$$

Durch Einsetzen der obigen Werthe geht diese Gleichung über in

$$\left[c_1^2 c_2^2 (x^2 + y^2) + c_3^2 (c_2^2 x^2 + c_1^2 y^2) - (c_1^2 + c_2^2) E^2 + c_1^2 c_2^2 E^2 \frac{D^2}{\Delta^2}\right]^2 =$$
$$4c_1^2 c_2^2 (c_3^2 (x^2 + y^2) - E^2)\,[c_2^2 x^2 + c_1^2 y^2 - E^2],$$

oder nach einer einfachen Transformation in

$$[c_2^2 (c_1^2 - c_3^2) x^2 + c_1^2 (c_2^2 - c_3^2) y^2 + (c_1^2 - c_2^2) E^2]^2$$
$$- 4c_2^2 (c_1^2 - c_3^2)(c_1^2 + c_2^2) E^2 x^2 =$$
$$2\frac{D^2}{\Delta^2} E^2 c_1^2 c_2^2 [(c_1^2 + c_2^2) - c_2^2 (c_1^2 + c_3^2) x^2 - c_1^2 (c_2^2 + c_3^2) y^2] - E^4 c_1^4 c_2^4 \frac{D^4}{\Delta^4}.$$

Diese Gleichung bedeutet eine der Lemniskate ähnliche Curve, auf die sie um so mehr kommt, je näher $c_1^2 - c_2^2$ gleich $c_2^2 - c_3^2$ ist und je kleiner i und damit x und y gegen E sind; denn die allgemeine Form der Gleichung einer Lemniskate ist

$$(x^2 + y^2 + p^2)^2 - 4p^2 x^2 = q^4.$$

Ist $i = 0$, d. h. gehen die Strahlen senkrecht durch den Krystall, so erhalten wir auch hier die schon früher gefundene Formel

$$\frac{D}{\Delta} = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}.$$

Dieselbe Entwickelung passt für jede andere Art der Krystallplatte, nur ist dann eine Transformation des Coordinatensystems der Wellenfläche vorzunehmen nach den für den Krystall passend gelegenen Coordinaten. Es ist auch klar, dass dann stets die Form der Curven, wenn nur $\sin^2 i$ beibehalten wird, gegeben ist durch eine Gleichung derselben Art.

Besonders einfach wird die Entwickelung für die vorige Nummer; denn es reicht dann aus, wie immer, wenn nur das Einfallsloth parallel einer

Elasticitätsaxe ist, eine einfache Vertauschung der Bezeichnung x, y, z und damit der c_1, c_2, c_3 zur Aufstellung der nöthigen Gleichung.

9. Unterbrechungen der isochromatischen Curven.

Die Aufgabe dieser Nummer besteht darin, diejenigen Punkte zu suchen, in denen Strahlen austreten, welche senkrecht gegen das erste oder zweite Nicol polarisirt sind, oder allgemein die Austrittspunkte derjenigen Strahlen zu finden, deren Schwingungsebenen einander parallel sind. Die Schwingungen finden statt in der Wellenebene, deren Gleichung nach 8., wenn wir die Ebene durch den Coordinatenanfang legen, gegeben ist durch

$$mx + ny + pz = 0. \tag{1.}$$

Ferner müssen dieselben nach § 374. 2, mit der Richtung des grössten und kleinsten Radius der Elasticitätsfläche zusammenfallen. Wenn nun A, B, C, wie § 374. 2, die cos. der Winkel bedeuten, welche der Radius ϱ mit den Elasticitätsaxen bildet, so ist die Gleichung der Elasticitätsfläche

$$\varrho^2 = c_1^2 A^2 + c_2^2 B^2 + c_3^2 C^2.$$

Die Lage des Minimalradius ist bestimmt zunächst durch

$$\varrho\, d\varrho = 0 = c_1^2 A\, dA + c_2^2 B\, dB + c_3^2 C\, dC. \tag{2.}$$

Zur Bestimmung der $\frac{dB}{dA}$ und $\frac{dC}{dA}$ erhalten wir nun durch folgende Betrachtung die nöthigen Gleichungen.

Da die Schwingungen in der Wellenebene stattfinden, so müssen die Werthe $x = \varrho A$, $y = \varrho B$, $z = \varrho C$ der Gleichung der Wellenebene (1.) genügen, also ist

$$mA + nB + pC = 0. \tag{3.}$$

Da ferner

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1$$

ist, so erhalten wir

$$m\,dA + n\,dB + p\,dC = 0,$$
$$A\,dA + B\,dB + C\,dC = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{dC}{dA} = \frac{mB - nA}{nC - pB}, \quad \frac{dB}{dA} = \frac{pA - mC}{nC - pB}.$$

Diese Werthe in (2.) eingesetzt giebt also die von den A, B, C zu erfüllende Gleichung

$$0 = c_1^2 A (nC - pB) + c_2^2 B (pA - mC) + c_3^2 C (mB - nA). \tag{4.}$$

Ist nun $x = ay + bz$ die Gleichung der Schwingungsebene, so muss, da dieselbe durch die Schwingungsrichtung gehen muss, sein

$$A = aB + bC, \tag{5.}$$

und, da sie durch die Normale der Wellenebene geht, deren Gleichungen $x = \frac{m}{p} z$, $y = \frac{n}{p} z$ sind, muss gelten $m = an + bp$, d. h. $b = \frac{m - an}{p}$. Dies in (5.) eingesetzt giebt

$$A = aB + \frac{m - an}{p} C. \tag{6.}$$

Da nun $z = 0$ die Gleichung der Grenzebene des Krystalles ist, so ist die Durchschnittslinie der Schwingungsebene mit dem Krystall $x = ay$, also a die Tangente des Winkels, den diese Durchschnittslinie mit der y Axe bildet, oder was nahe dasselbe ist, da die Schwingungsebene nahe senkrecht auf der Krystallfläche steht, die Tangente des Winkels der Schwingungsebene gegen den Hauptschnitt yz. Es haben daher alle Wellenebenen, welche demselben a entsprechen, parallele Schwingungsebenen.

Man findet nun aus (3.) und (6.) A und B ausgedrückt durch C, nämlich

$$B = \frac{C(amn - p^2 - m^2)}{p(ma + n)}, \quad A = \frac{C(mn - ap^2 - an^2)}{p(ma + n)}.$$

Diese Werthe werden dann in (4) eingesetzt, und man erhält, nachdem man mit den gleichen Coefficienten dividirt hat,

$$0 = c_1^2 \frac{[mn - a(p^2 + n^2)][n^2 + p^2 + m^2]}{am + n} - c_2^2 \frac{(amn - p^2 - m^2)a(p^2 + n^2 + m^2)}{am + n} + c_3^2(an - m)(m^2 + p^2 + n^2).$$

In diese Gleichung müssen dann die Werthe von m, n, p aus der vorigen Nummer eingeführt werden. Bedenkt man noch, dass

$$\sin i = \frac{\sin r'}{c'} \text{ ist,}$$

so erhält man

$$0 = c_1^2 \frac{\sin^2 r' \cos\varphi(\sin\varphi + a\cos\varphi) - a}{\sin r'(a\cos\varphi + \sin\varphi} - c_2^2 \frac{a(\sin^2 r' \sin\varphi\{a\cos\varphi + \sin\varphi\} - 1)}{\sin r'(a\cos\varphi + \sin\varphi)} + c_3^2 \sin r'(a\sin\varphi - \cos\varphi),$$

wo also φ ist der Winkel, den die x Axe mit der Einfallsebene bildet und a die Tangente des Winkels der Schwingungsrichtung mit der y Axe.

Da nun hier c' liegt zwischen c_3 und c_2 und die beiden Ringsysteme nur bei solchen Krystallen, deren Axenwinkel sehr klein ist, zugleich beobachtet werden können, so dürfen wir näherungsweise setzen

$$c' = c_3 = c_2 = v \text{ und dann } \sin r' = v \sin i.$$

Wird endlich die Erscheinung bezogen auf die im Vorigen schon immer gebrauchte Ebene, also gesetzt

$$\sin^2\varphi = \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \quad \cos^2\varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \sin^2 i = \frac{x^2 + y^2}{E^2},$$

so erhält man

$$0 = c_1^2\left[x(y + ax) - \frac{aE^2}{v^2}\right] - c_2^2\left[ay(ax + y) - \frac{aE^2}{v^2}\right] + c_3^2(ay - x)(ax + y),$$

oder anders geordnet

$$0 = [c_1^2 - c_3^2 - a^2(c_2^2 - c_3^2)]\,xy + a[c_1^2 - c_3^2]\,x^2 - a[c_2^2 - c_3^2]\,y^2 - \frac{a E^2}{v^2}(c_1^2 - c_2^2).$$

Zur Discussion dieser Gleichung führen wir ein neues Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt mit dem alten zusammenfällt, dessen neue x Axe aber mit der alten y Axe einen Winkel ψ bildet, so dass ist

$$\mathrm{tg}\, 2\psi = -\frac{(c_1^2 - c_3^2) - (c_2^2 - c_3^2)\,a^2}{a(c_1^2 - 2c_3^2 + c_2^2)}.$$

Die für dieses neue Coordinatensystem transformirte Gleichung wird dann nach einigen einfachen Rechnungen,

$$y'^2[(c_1^2 - c_3^2)\cos^2\psi + (c_2^2 - c_3^2)\sin^2\psi] - x'^2[(c_1^2 - c_3^2)\sin^2\psi + (c_2^2 - c_3^2)\cos^2\varphi] = \frac{E^2}{v^2}(c_1^2 - c_2^2)\cos 2\psi.$$

In dieser Hyperbel treten also zunächst alle diejenigen Strahlen aus, deren Schwingungsebenen unter einander parallel sind und mit der alten y Axe einen Winkel bilden, dessen Tangente $= a$ ist. Zugleich treten dann in dieser Hyperbel die Strahlen aus, deren Schwingungsebenen zu den eben genannten senkrecht sind.

Treten nun in die Krystallplatte Strahlen, deren Schwingungsrichtungen mit der y Axe den Winkel h bilden, so dass $a = \mathrm{tg}\, h$ ist, so treten in dieser Hyperbel nur die Strahlen der einen Art aus, mithin erscheint dann eine helle oder dunkle Hyperbel, jenachdem die analysirenden Apparate parallel sind oder sich kreuzen.

Die Lage dieser Hyperbeln kann nun leicht weiter untersucht werden. Es ist nämlich deren reelle Halbaxe

$$g^2 = \frac{E^2(c_1^2 - c_2^2)\cos 2\psi}{v^2[(c_1^2 - c_3^2) - (c_1^2 - c_2^2)\sin^2\psi]}.$$

Diese Grösse g, die in der Richtung der y' Axe liegt, ist imaginär wenn $\cos 2\psi$ eine negative Grösse ist, d. h. wenn ψ liegt zwischen 45° und $-45°$ und im Scheitelquadranten, es bilden also die reellen Axen aller Hyperbeln mit der Verbindungslinie der Austrittspunkte der optischen Axen, d. i. der x Axe, Winkel, welche $\gtrless 45°$ sind.

Die Grösse g, welche also veränderlich mit ψ ist, erreicht 2 Maxima, nämlich für $\psi = 90°$ und $-90°$, und 2 Minima, wenn $\psi = 45°$ und $-45°$ ist. Da nun dieselbe die Entfernung der Scheitel von der Mitte giebt, so folgt daraus, dass die Hyperbeln von der Mitte am entferntesten sind, wenn die Richtung der x' den Winkel zwischen den beiden Hauptschnitten des Krystalls, d. h. der xz und yz Ebenen, halbirt, und sie gehen in zwei sich senkrecht schneidende Linien über, wenn die Richtung der neuen Coordinatenaxen mit den alten, also den Hauptschnitten, zusammen fallen.

Um dies physikalisch zu deuten, gehen wir zurück zu dem Ausdruck, welcher ψ bestimmt. Wenn $a = \pm\infty$ wird, so ist $2\psi = \pm 90°$ oder $\psi = \pm 45$, und wenn $a = 0$ ist, so findet man 2ψ nahezu $= 0$ und ± 180,

also $\psi = \pm 90$, da ψ nicht zwischen 45^0 und -45^0 liegen kann. Das heisst dann die Hyperbeln sind von der Mitte am entferntesten, wenn die Schwingungsebene des eintretenden und des austretenden Lichtes die beiden Hauptschnitte des Krystalles halbiren und die Hyperbeln gehen über in zwei sich senkrecht schneidende Gerade, wenn diese Schwingungsebenen mit den Hauptschnitten zusammenfallen.

Aendert sich ψ nur wenig, so treffen wir Strahlen, die nur geringe Neigung gegen die ersteren haben, folglich wird durch Interferenz nur eine geringe Aenderung in der Helligkeit stattfinden; daher erklärt sich die Verbreiterung der Hyperbeln.

Circulare Polarisation durch Total- und Metallreflexion. (§ 383.)

1. Umformung der Reflexionsformeln für $n < 1$.

Nach den in § 376. 1. und 3. aufgestellten Formeln ist für den reflectirten Strahl die Schwingungsamplitude senkrecht zur Einfallsebene

$$a' = c \sin \delta \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}$$

und parallel der Einfallsebene

$$a'' = c \cos \delta \frac{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha)}.$$

In allen den folgenden Untersuchungen hat man $\frac{1}{2}$ statt $\sin \delta$ und $\cos \delta$ zu setzen, um die Erscheinungen zu haben, wenn gewöhnliches Licht einfällt.

In diese Formeln führen wir statt des Brechungswinkels den Brechungsexponenten $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ ein. Also ist

$$a' = c \sin \delta \left[\frac{n^2 + 1 - 2\sin^2\alpha}{1 - n^2} - \frac{2\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{1 - n^2}\, i\right]$$

$$= c \sin \delta\, [A' - A'' i],$$

$$a'' = c \cos \delta \left[\frac{\sin^2\alpha - n^2(1 + n^2\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha - n^2(1 - n^2\cos^2\alpha)} + \frac{2n^2\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - n^2}}{\sin^2\alpha - n^2(1 - n^2\cos^2\alpha)}\, i\right]$$

$$= c \cos \delta\, [B' + B'' i].$$

1) $\alpha = 90^0$, so ist $a'^2 + a''^2 = c^2$. Dies Resultat war zu erwarten; denn bei dieser Annahme streift das Licht, also muss die Intensität unverändert bleiben.

2) $\sin \alpha = n$ giebt

$$a' = c \sin \delta, \quad a'' = -c\cos\delta, \quad \text{also auch } a'^2 + a''^2 = c^2,$$

d. h. das reflectirte Licht hat bei dem Beginn der totalen Reflexion dieselbe Intensität als das einfallende.

3) $\sin \alpha > n$. Bei dieser Annahme bleibt in den obigen Formeln das Imaginäre, dessen Bedeutung nun untersucht werden soll.

Ohne Zweifel, sagt Fresnel*), bedeutet das Imaginäre, dass die Voraussetzung unserer Rechnung, nach welcher in der Grenzfläche selbst die reflectirten Schwingungen mit den einfallenden zusammenfallen, nicht mehr erfüllt ist, dass ein Theil der Bewegung unterhalb der reflectirenden Fläche zurückgeworfen ist und dadurch eine gewisse Veränderung gegen den in der reflectirenden Fläche zurückgeworfenen Theil erfahren hat. In der That, wenn dieses die richtige Auslegung des imaginären Ausdruckes ist, so muss die Analyse nothwendig für den Coefficienten der reflectirten Amplituden eine imaginäre Grösse geben. Denn, wenn man den von der reflectirenden Fläche an durchlaufenen Weg mit x bezeichnet und mit $\sin(a + x)$ die Verschiebung eines Aethermoleküles im Punkte x, im Falle die Vibrationsperioden an der reflectirenden Fläche mit der einfallenden coincidiren, so wird, wenn an der Fläche ihre Perioden um eine gewisse Grösse verschoben oder verzögert werden, die Verschiebung im Punkte x werden $\sin(a' + x)$. Wenn aber A eine reelle Grösse ist, so kann nie $A \sin(a + x) = \sin(a' + x)$ werden für alle Werthe von x, d. h. wenn man fortfährt die Schwingungsperioden so zu zählen, wie man anfänglich gethan hat, es giebt demnach keinen reellen Werth des Coefficienten, der im Stande wäre, die Verschiebungen der Moleküle darzustellen.

Wir nehmen desshalb an, dass das Imaginärwerden eines Theiles dieser Ausdrücke bedeutet, dass der reflectirte Strahl aus zwei Theilen besteht, deren einer in der reflectirenden Fläche zurückgeworfen ist, während der andere um ¼ Wellenlänge verzögert wird.

Um zu beweisen dass die Verzögerung gleich ¼ Wellenlänge genommen werden muss, verfahren wir folgendermassen. Wenn $y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$ die Schwingung eines Moleküles ist, so bedeutet $y = - a \sin 2\pi \frac{t}{T}$ die derselben entgegengesetzte Schwingungsbewegung, die also gegen die erste um ½ Wellenlänge verzögert ist. Multipliciren wir also die Amplitude einer Wellenbewegung mit -1, so erhalten wir eine neue, die gegen die erste um ½ Wellenlänge verzögert ist. Multipliciren wir abermals mit -1, so ist die Verzögerung wiederum ½ Wellenlänge, also nun eine ganze Welle.

Es soll nun $y = f a \sin 2\pi \frac{t}{T}$ gegen $y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$ um ¼ Wellenlänge verzögert sein, wo f zu bestimmen ist. Dem obigen analog müssen wir dann mit $f^1, f^2, f^3 \ldots$ multipliciren, wenn die Verschiebung $2 \cdot {}^1/_4, 3 \cdot {}^1/_4, 4 \cdot {}^1/_4 \ldots$ Wellenlängen betragen soll. Es ist demnach $f^2 = -1$, $f^3 = f$, $f^4 = 1$, d. h. $f = \sqrt{-1}$. Wenn demnach die Amplitude der Schwingungsgleichung eines Lichtstrahles mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt ist, so bedeutet dies eine Verzögerung um ¼ Wellenlänge und umgekehrt.

*) Pogg. Ann. 22.

Die Schwingungen des reflectirten Strahles mit complexer Amplitude $A' - A''i$ und $B' + B''i$ können demnach geschrieben werden

$$a' = c \sin\delta \left[A' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda}\right) - A'' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda} - \frac{1}{4}\right)\right].$$

$$a'' = c \cos\delta \left[B' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda}\right) + B'' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda} - \frac{1}{4}\right)\right].$$

Dass nun aber auch hiermit die Gesammtintensität $= c^2$ ist, soll in der nächsten Nummer erörtert werden.

2. Das reflectirte Licht ist elliptisch- oder circular-polarisirt.

Die Ausdrücke der eben gefundenen zu einander senkrecht stattfindenden Schwingungen lassen sich auf folgende Form bringen:

$$c \sin\delta \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda} - \frac{D}{\lambda}\right), \quad c \cos\delta \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda} - \frac{D'}{\lambda}\right),$$

wo zur Bestimmung von D und D' nach § 226 die Gleichungen

$$\cos 2\pi \frac{D}{\lambda} = A', \quad \cos 2\pi \frac{D'}{\lambda} = B' \text{ oder } \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = - A'', \quad \sin 2\pi \frac{D'}{\lambda} = B''$$

zu erfüllen sind. Es ergiebt sich, wie zu Ende der vorigen Nummer verlangt ist, dass die letzteren Bedingungsgleichungen nicht den ersteren widersprechen; denn es ist $A'^2 + A''^2 = B'^2 + B''^2 = 1$. Diese Schwingungen geben aber nach § 228 im Allgemeinen elliptisch polarisirtes Licht.

Das elliptisch polarisirte Licht geht in circular polarisirtes über, erstens wenn nach § 228 $c \sin\delta = c \cos\delta$ d. h. $\delta = 45^0$ ist oder bei gewöhnlichem Licht, wo statt $\sin\delta$ und $\cos\delta$ $^1/_2$ steht, zweitens wenn

$$\frac{D - D'}{\lambda} = {}^1/_4 (2m + 1), \text{ wo } m = 0, 1, 2, \ldots \text{ ist, oder wenn}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(D - D') = \frac{\pi}{2}(2m + 1), \text{ oder}$$

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(D - D') = 0 \text{ ist.}$$

Führen wir nun die Werthe von D ein, so wird die Bedingung

$$A'B' - A''B'' = 0,$$

oder nach Einsetzung der Werthe von A und B aus 1., und nach Entfernung des Factors $(1 - n^2)$ im Zähler und Nenner

$$\frac{(1 + n^2) \sin^2\alpha - 2 \sin^4\alpha - n^2}{(1 + n^2) \sin^2\alpha - n^2} = 0.$$

Setzen wir den Zähler $= 0$, so giebt dies

$$\sin^2\alpha = \frac{1 + n^2 \pm \sqrt{(1 + n)^2 - 8n^2}}{4}.$$

Um hier einen reellen Werth von α zu bekommen, muss $(1 + n^2)^2 > 8n^2$ oder $n < 0,4142$ sein.

Es ist aber der Brechungsexponent des am meisten brechenden Körpers, des Diamant, zur Luft erst 0, 4142. Will man durch schwächer brechende Mittel circular polarisirtes Licht erhalten, so muss man mehrfach reflectiren lassen, indem jede neue Reflexion unter demselben Winkel α wiederum dieselbe Phasendifferenz ertheilt.

Um so circular polarisirtes Licht durch totale Reflexion zu erlangen nahm Fresnel ein Trapezoeder aus Spiegelglas von St. Gobain. Für dieses ist der mittlere Brechungsexponent nach Luft $\frac{1}{1,51} = 0,662$. Zur Bestimmung des nothwendigen Einfallswinkels muss gelten, wenn wir dreimal reflectiren lassen, nach einer Reflexion

$$3 \cdot \frac{D - D'}{\lambda} = {}^1/_4 \text{ also } \frac{D - D'}{\lambda} = {}^1/_{12} \text{ und dann}$$

$$\cos 2\pi \frac{D - D'}{\lambda} = \cos 2\pi \tfrac{1}{12} = \cos {}^1/_3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dies nun mit dem gegebenen n eingesetzt, giebt zur Berechnung von α

$$\frac{\sin^2\alpha\,(1 + 0,662^2) - 2\sin^4\alpha - 0,662^2}{\sin^2\alpha\,(1 + 0,662^2) - n^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Daraus findet man $\alpha = 69^0\,12'\,33''$.

Dasselbe erreichte Fresnel durch ein Parallelepipedum, dessen spitzer Winkel $54\,{}^1/_2{}^0$ ist, so dass auch $\alpha = 54\,{}^1/_2{}^0$ wird, durch zweimalige Reflexion.

Die hier anzustellende Rechnung geht aus von

$$2\frac{D - D'}{\lambda} = {}^1/_4, \quad \frac{D - D'}{\lambda} = {}^1/_8,$$

$$\cos 2\pi \frac{D - D'}{\lambda} = \cos 2\pi\, {}^1/_8 = {}^1/_2 \sqrt{2},$$

$$\frac{(1 + n^2)\sin^2\alpha - 2\sin^4\alpha - n^2}{(1 + n^2)\sin^2\alpha - n^2} = {}^1/_2 \sqrt{2}.$$

Daraus wird dann für ein gegebenes n der Winkel α berechnet.

3. Totalreflexion mit Hülfe der verallgemeinerten Reflexionstheorie.

A) Das Licht schwinge senkrecht zur Einfallsebene. Die Formeln S. 479 verlieren ihre Gültigkeit; denn es ist $\sin\beta > 1$ also $\cos\beta$ imaginär. Wir setzen demnach wie S. 479

$$\zeta_, = \sqrt{a_,^2 + b_,^2}\cos\left(\mathfrak{a}_, + \operatorname{arctg}\frac{b_,}{a_,}\right),$$

$$\zeta' = \sqrt{a'^2 + b'^2}\, e^{-\mathfrak{b}'}\left(\mathfrak{a}' + \operatorname{arctg}\frac{b'}{a'}\right).$$

wo nach den Formeln von S. 476 ist

$$a_, + b_, i = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}, \quad a' + b' i = \frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta + \alpha)}$$

$$\mathfrak{b}' i = 2\pi\frac{x\cos\alpha'}{\lambda'}.$$

Nach dem Verfahren von S. 480 haben wir nun die Ausdrücke

$$\sqrt{a_,^2 + b_,^2} \text{ und } \frac{b_, i}{a_,}$$

und die entsprechenden mit dem Accent zu bestimmen. Es wird $a_, - b_, i$ aus $a_, + b_, i$, wenn wir statt β schreiben $180 - \beta$ und analog bei $a' + b' i$. Mithin ist

$$\frac{b_, i}{a_,} = \frac{\sin^2(\beta - \alpha) - \sin^2(\beta + \alpha)}{\sin^2(\beta - \alpha) + \sin^2(\beta + \alpha)} = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg} 2\varrho \,.\, i,$$

$$\sqrt{a_,^2 + b_,^2} = \sqrt{\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}} = 1,$$

$$\frac{b' i}{a'} = \frac{\dfrac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta + \alpha)} - \dfrac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}}{\dfrac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta + \alpha)} + \dfrac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}} = - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\varrho\, i,$$

$$\sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{\frac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot \frac{2 \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}} = 2 \cos\varrho.$$

Die Einführung dieser Werthe mit Beibehaltung der Abkürzung ϱ giebt dann

$$\zeta_, = \cos 2\pi \left(\frac{-x \cos\alpha + y \sin\alpha}{\lambda} - \frac{t + \vartheta}{T} - \frac{\varrho}{\pi}\right)$$

$$\zeta' = 2 \cos\varrho \; e^{-x \cos\alpha \operatorname{tg}\varrho : \lambda} \cos 2\pi \left(\frac{y \sin\alpha}{\lambda} - \frac{t + \vartheta}{T} - \frac{\varrho}{2\pi}\right).$$

Man überzeugt sich leicht, dass dies in Bezug auf die reflectirte Schwingung mit 2. übereinstimmt, wenn man den dort durch D angedeuteten Werth weiter ausführt.

B) Das Licht schwinge in der Einfallsebene.

Die Formeln (11.) bis (14.) S. 480 verlieren hier ihre Gültigkeit, da $\sin\beta > 1$, also $\cos\beta$ imaginär ist. Wir gehen zurück zu den Gleichungen (5.) bis (8.) S. 478, und müssen dann, wenn wir sie dem Obigen entsprechend behandeln, um aus $a + b\sqrt{-1}$ die Form $a - b\sqrt{-1}$ zu erhalten, setzen $-\alpha_{,,}$, $-\beta'$, $180^0 - \beta$ für $\alpha_{,,}$, β', β.

Diese Rechnung giebt, wenn man setzt

$$m_{,,} = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\sin\alpha\, l_{,,}^2}}, \quad m'' = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\sin^2\alpha\, l''^2}}, \quad p = \frac{m_{,,} - m''}{m'' m_{,,} - 1}$$

$$m_, = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\lambda'^2 \sin^2\alpha}}, \quad \operatorname{tg} r = \frac{m' + p(\cos^2\alpha + m'^2 \sin^2\beta)}{(1 - m'^2) \cos\alpha \sin\alpha},$$

$$\begin{bmatrix} \xi_, \\ \eta_, \end{bmatrix} = \cos 2\pi \left(\frac{-x \cos\alpha + y \sin\alpha}{\lambda} - \frac{t + \vartheta}{T} - \frac{r}{\pi}\right) \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_{,,} \\ \eta_{,,} \end{bmatrix} = 2 \frac{m''^2 - 1}{m''^2 - m_{,,}^2} \cdot \frac{\cos^2\alpha + m'^2 \sin^2\alpha}{1 - m'^2}\, p \frac{\cos r}{\sin\alpha} e^{2\pi x \sin\alpha\, m_{,,} : \lambda} \times$$

$$\begin{bmatrix} m_{,,} \cos \\ -\sin \end{bmatrix} 2\pi \left(\frac{y \sin\alpha}{\lambda} - \frac{t + \vartheta}{T} - \frac{r}{2\pi}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\xi' \\ \eta'\end{bmatrix} = \frac{2\cos r}{\sin\alpha\,(1-m'^2)}\, e^{2\pi x \sin\alpha\, m' : \lambda} \times$$

$$\begin{bmatrix}\cos \\ m'\sin\end{bmatrix} 2\pi\left(\frac{y\sin\alpha}{\lambda} - \frac{t+\vartheta}{T} - \frac{r}{2\pi}\right),$$

$$\begin{bmatrix}\xi'' \\ \eta''\end{bmatrix} = 2\,\frac{m''^2 - 1}{m''^2 - m_{,,}^2}\cdot\frac{\cos^2\alpha + m'^2\sin^2\alpha}{1-m'^2}\,p\,\frac{\cos r}{\sin\alpha}\, e^{-2\pi x \sin\alpha\, m'' : \lambda} \times$$

$$\begin{bmatrix}-m''\cos \\ -\sin\end{bmatrix} 2\pi\left(\frac{y\sin\alpha}{\lambda} - \frac{t+\vartheta}{T} - \frac{r}{2\pi}\right).$$

Jamin hat nun durch Versuche den Gangunterschied zwischen dem senkrecht und parallel der Einfallsebene schwingenden reflectirten Licht untersucht und die Theorie bestätigt gefunden. Dieser Gangunterschied ist $2\,(r-\varrho)$. Nach den in A) und B) gefundenen Werthen von r und ϱ findet man

$$\operatorname{tg}(r-\varrho) = \operatorname{cotg}\alpha\left(\frac{m'+p}{1+pm'}\right)$$

oder annähernd, weil p sehr klein ist,

$$\operatorname{tg}(r-\varrho) = \operatorname{cotg}\alpha\,[m' + p\,(1-m'^2)].$$

4. Metallreflexion.

Wir gehen aus von der folgenden durch die Erfahrung begründeten Annahme. Die Schwingungen des Aethers in Metallen nehmen rasch ab und zwar in geometrischer Progression, da ja die Intensität derselben auf gleiche Wegstrecken sich nothwendig in gleichem Verhältniss vermindern muss.

Wir werden demnach die Schwingungen nach § 279. 3, durch folgende Form darstellen können

$$A e^{-2\pi\frac{x\cos\beta + y\sin\beta}{\lambda}\Theta\sin\varepsilon}\; e^{2\pi\left(\frac{x\cos\beta + y\sin\beta}{\lambda}\Theta\cos\varepsilon - \frac{t+\vartheta}{T}\right)i},$$

wo die hier eingeführten Grössen $\Theta\sin\varepsilon$ und $\Theta\cos\varepsilon$ die später daraus gezogenen Folgerungen erleichtern.

Diesen eben genannten Werthen kann aber sofort eine physikalische Bedeutung gegeben werden; denn setzen wir $\alpha = \beta = 0$ d. h. betrachten wir einen senkrecht auffallenden Lichtstrahl, so geht für diesen der Schwingungsausdruck über in

$$A e^{-2\pi\frac{x}{\lambda}\Theta\sin\varepsilon}\; e^{2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\Theta\cos\varepsilon - \frac{t+\vartheta}{T}\right)i}.$$

Es würde demnach $\Theta\sin\varepsilon$ den Absorptionscoefficienten oder Extinctionscoefficienten dieses Strahles bedeuten. Wenn c, c′, λ, λ' die bekannten Grössen in Luft und Metall bezeichnen, so müsste in obiger Formel $\frac{\lambda}{\Theta\cos\varepsilon} = \lambda'$ oder $\Theta\cos\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{c}{c'}$ sein, d. h. die Grösse $\Theta\cos\varepsilon$ bedeutet das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Luft und Metall bei senkrechter Incidenz.

Der obige Schwingungsausdruck kann auch auf folgende Form gebracht werden

$$A e^{2\pi\left(\frac{x\cos\beta + y\sin\beta}{\lambda}\,\Theta(\cos\varepsilon + \sin\varepsilon\, i) - \frac{t+\vartheta}{T}\right) i},$$

$$A e^{2\pi\left(\frac{x\cos\beta + y\sin\beta}{\lambda}\,\Theta e^{\varepsilon i} - \frac{t+\vartheta}{T}\right) i}.$$

Vergleichen wir nun diesen letzteren Ausdruck mit dem in den früheren für durchsichtige Mittel gebrauchten

$$A e^{2\pi\left(\frac{x\cos\beta + y\sin\beta}{\lambda'} - \frac{t+\vartheta}{T}\right) i},$$

so stimmen dieselben vollkommen überein, wenn wir setzen $\lambda' = \frac{\lambda}{\Theta\, e^{\varepsilon i}}$, es ist mithin bei den Metallen der Brechungsexponent $\frac{\lambda}{\lambda'} = \Theta e^{\varepsilon i}$, also ist derselbe imaginär zu setzen. Mit Hülfe dieser Bemerkung könnten nun die allgemeinen Regeln entsprechend Anh. z. § 376. 377. entwickelt werden. Die longitudinalen Wellen werden hier in einem noch weit grösseren Verhältniss als dort abnehmen.

Wir brauchen aber die ganze Herleitung nicht zu wiederholen, sondern können die in den genannten Paragraphen gewonnenen Formeln benutzen, müssen aber immer den Brechungsexponenten $= \Theta e^{\varepsilon i}$ setzen.

A) Die Schwingungen erfolgen senkrecht zur Einfallsebene.

Wir gehen hier aus von den Gleichungen Anhang zu § 376. 377. 2. für das reflectirte Licht, nämlich

$$\zeta_{,} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cos\left(2\pi \frac{-x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\lambda} - \frac{t+\vartheta}{T}\right)$$

und müssen setzen

$$\sin\beta = \frac{\lambda'}{\lambda}\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\Theta}\, e^{-\varepsilon i}, \text{ mithin}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha \,.\, e^{-2\varepsilon i}}{\Theta^2}} = \text{abgekürzt } \gamma e^{u i}.$$

Nach einer einfachen Transformation findet man dann

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} = \frac{1 - \frac{\gamma\Theta}{\cos\alpha}\, e^{(\varepsilon+u) i}}{1 + \frac{\gamma\Theta}{\cos\alpha}\, e^{(\varepsilon+u) i}} = m.$$

Dieser Ausdruck ist von der Form a + b i. Um also das Schwingungsgesetz zu erhalten wenden wir das Verfahren von S. 480 an.

Es wird

$$a - b i = \frac{1 - \frac{\gamma\Theta}{\cos\alpha}\, e^{-(\varepsilon+u) i}}{1 + \frac{\gamma\Theta}{\cos\alpha}\, e^{-(\varepsilon+u) i}} = \mu.$$

Die Intensität des reflectirten Lichtes ist demnach

$$I_s^2 = a^2 + b^2 = m\mu.$$

Setzen wir zur Berechnung der Phasenverschiebung $I_s^2 = \text{tg}\,(f - 45^0)$, so ist

$$\cot f = \cos(\varepsilon + u) \sin 2 \,\text{arctag}\left(\frac{\cos\alpha}{\gamma\Theta}\right).$$

Die Phasenänderung D_s ist nach den Bezeichnungen von S. 479 $\text{arctg}\,\frac{a}{b}$, das giebt

$$\text{tg}\, D_s = \frac{m - \mu}{(m + \mu)\,i} = \sin(\varepsilon + u)\,\text{tag}\, 2\,\text{arctg}\left(\frac{\cos\alpha}{\gamma\Theta}\right).$$

B) Die Schwingungen erfolgen parallel der Einfallsebene. Wir müssen hier ausgehen von den Formeln S. 480. Da wir aber von den longitudinalen Wellen absehen können, weil selbst bei durchsichtigen Körpern ihr Einfluss gering ist, so können wir setzen $p = 0$ und erhalten dann $\varphi = \psi = 0$, also

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\text{tg}\,(\alpha - \beta)}{\text{tg}\,(\alpha + \beta)}.$$

Unsere Formel für die reflectirte Schwingung ist demnach (11.) S. 480.

$$\begin{bmatrix}\xi_{\prime}\\ \zeta_{\prime}\end{bmatrix} = \frac{\text{tg}\,(\alpha - \beta)}{\text{tg}\,(\alpha + \beta)} \cos 2\pi\left(\frac{-x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\lambda} + \frac{\varphi + \varphi}{2\pi} - \frac{t + \vartheta}{T}\right)\begin{bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Mit Hülfe derselben Rechnungen wie unter A) finden wir nun wieder Imaginäres und zwar

$$m = \frac{1 - \frac{\Theta\cos\alpha}{\gamma}\, e^{(\varepsilon - u)\,i}}{1 + \frac{\Theta\cos\alpha}{\gamma}\, e^{(\varepsilon - u)\,i}}.$$

Daraus wird dann abgeleitet

$$\mu = \frac{1 - \frac{\Theta\cos\alpha}{\gamma}\, e^{-(\varepsilon - u)\,i}}{1 + \frac{\Theta\cos\alpha}{\gamma}\, e^{-(\varepsilon - u)\,i}} \quad \text{und} \quad I_p^2 = m\mu.$$

Setzen wir dann

$$I_p^2 = m\mu = \text{tag}\,(g - 45^0),$$

so ist

$$\cot g = \cos(\varepsilon - u) \sin 2\,\text{arctg}\left(\frac{\gamma}{\Theta\cos\alpha}\right)$$

und die Phasenveränderung $D_p = \text{arctg}\,\frac{b}{a}$ wird dann bestimmt durch

$$\text{tg}\, D_p = \frac{m - \mu}{(m + \mu)\,i} = \sin(\varepsilon - u)\,\text{tag}\, 2\,\text{artg}\left(\frac{\gamma}{\Theta\cos\alpha}\right).$$

Dies sind die Formeln von Cauchy, nur hat derselbe statt $\varepsilon + u$, $\gamma\Theta$ die Buchstaben v, U gebraucht.

Um nun das Verhältniss der Amplituden $\frac{I_p}{I_s}$ der beiden senkrecht zu

einander polarisirten Lichtmassen und den Phasenunterschied $D_p - D_s$ derselben zu berechnen, nehmen wir nicht die eben gefundenen Werthe, sondern wenden das oben gebrauchte Verfahren an, indem wir das Verhältniss der Amplituden für durchsichtige Mittel

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} : \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\beta-\alpha)}$$

zu Grunde legen und statt $\frac{\lambda}{\lambda'}$ setzen $\Theta e^{\varepsilon i}$.

Wenn nun die oft gebrauchte Methode angewendet wird, so haben wir hier zu setzen

$$m = \frac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\gamma\Theta\cos\alpha} e^{-(\varepsilon+u)i}}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\gamma\Theta\cos\alpha} e^{-(\varepsilon+u)i}}$$

und dem entsprechend

$$\mu = \frac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\gamma\Theta\cos\alpha} e^{(\varepsilon+u)i}}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\gamma\Theta\cos\alpha} e^{(\varepsilon+u)i}},$$

also

$$\frac{I_p^2}{I_s^2} = m\mu = \operatorname{tg}^2 h, \quad \text{wo} \quad \cos 2h = \cos(\varepsilon+u) \sin 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\gamma\Theta\cos\alpha}\right) \text{ ist.}$$

$$\operatorname{tg}(D_p - D_s) = \frac{m-\mu}{(m+\mu)i} = \sin(\varepsilon+u) \operatorname{tg} 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\gamma\Theta\cos\alpha}\right).$$

Die Versuche von Jamin*) beziehen sich vorzüglich auf den Haupteinfallswinkel A und auf das Hauptazimuth H. Man nennt nämlich Haupteinfallswinkel den Einfallswinkel, für den $D_p - D_s = \frac{\pi}{2}$ ist, wo also der Gangunterschied $\frac{D_p - D_s}{2\pi}\lambda$ eine Viertel-Wellenlänge beträgt und die elliptische Polarisatirn in die circuläre (§ 228) übergeht. Dafür ist dann $\frac{I_p}{I_s} = \operatorname{tg} H$, wo H ist das Azimuth der durch Glimmerblättchen wiederhergestellten geradlinigen Polarisation im reflectirten Strahl, wenn dasselbe im einfallenden Strahl 45° gegen die Einfallsebene geneigt war.

Der Haupteinfallswinkel oder der Winkel des Polarisationsmaximums oder schlechthin der Polarisationswinkel ist auch folgendermassen bestimmt: Wendet man polarisirtes Licht an, dessen Schwingungen mit der Einfallsebene einen Winkel von 45° bilden, so ist nach zwei Reflexionen unter dem Einfallswinkel gleich dem Polarisationswinkel das Licht wieder linear polarisirt, wenn die beiden Reflexionsebenen zusammenfallen.

*) Pogg. Ann. 74.

Circulare Polarisation durch Brechung. (§ 384.)

1. Zerlegung eines linear polarisirten Strahles in zwei elliptisch polarisirte Strahlen.

Die zu lösende Aufgabe ist folgende: Ist uns gegeben ein geradlinig polarisirter Lichtstrahl durch die Gleichung

$$s = r \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

so sollen zwei entgegengesetzt elliptisch polarisirte Lichtstrahlen, welche diesen linearen ersetzen, gefunden werden und zwar von der Beschaffenheit, dass die vorgeschriebenen Richtungen der Einzelschwingungen mit der von den Hauptaxen der Ellipsen zusammenfallen.

Statt unserer gegebenen Schwingung können wir zunächst zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen setzen, deren Schwingungsrichtung den gegebenen Winkel φ oder $90 - \varphi$ mit der ursprünglichen Schwingung einschliessen. Sind diese zu einander senkrechten Richtungen die z- und y Axe, so ist

$$z = r \cos\varphi \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad y = r \sin\varphi \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Zerlegen wir nun weiter

$$z = z_1 + z_2 = v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + n\right) + v \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - n\right),$$

$$y = y_1 + y_2 = u \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + n\right) + u \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - n\right),$$

so erhalten wir zur Bestimmung der v und u folgende Gleichungen:

$$z = 2v \cos 2n\pi \sin 2\pi \frac{t}{T}, \text{ also } 2v \cos 2n\pi = r \cos\varphi,$$

$$y = 2u \cos 2n\pi \sin 2\pi \frac{t}{T}, \text{ also } 2u \cos 2n\pi = r \sin\varphi.$$

Hieraus ergiebt sich

$$z_1 = \frac{1}{2} \frac{r \cos\varphi}{\cos 2n\pi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + n\right), \quad z_2 = \frac{1}{2} \frac{r \cos\varphi}{\cos 2n\pi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - n\right),$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{r \sin\varphi}{\cos 2n\pi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + n\right), \quad y_2 = \frac{1}{2} \frac{r \sin\varphi}{\cos 2n\pi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - n\right).$$

Bei dieser Zerlegung ist noch nicht berücksichtigt, dass die Hauptaxen unserer Ellipse mit der Richtung von z und y zusammenfallen sollen. Wir haben also nach § 228, wenn wir z_1, y_2 und z_2, y_1 zusammen nehmen, noch die Bedingung $2n = \frac{1}{4}(2m + 1)$, $m = 0, 1, 2 \ldots$ zu erfüllen.

Unsere Gleichungen werden demnach, wenn wir $m = 0$ nehmen, also $n = \frac{1}{8}$,

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, r \cos\varphi \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{8}\right), \quad z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, r \cos\varphi \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{8}\right).$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, r \sin\varphi \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{8}\right), \quad y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, r \sin\varphi \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{8}\right).$$

Sollen endlich die beiden Schwingungen z_1, y_2; z_2, y_1 circular polarisirte Schwingungen sein, so müssen wir noch über eine Grösse verfügen dürfen, welche aber nur φ sein kann. Nach § 228 müssen dann die Amplituden der Einzelschwingungen einander gleich sein, es muss also sein $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\varphi$, also $\varphi = 45^0$.

Wir können zum Schluss also setzen, wo nun wie vorhin schon z_1, y_2 und z_2, y_1 zusammengehören,

$$z_1 = I_1 \sin 2\pi\frac{t}{T},\quad y_2 = e I_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4}\right) = -e I_1 \cos 2\pi\frac{t}{T},$$

$$z_2 = I_1 \sin 2\pi\frac{t}{T},\quad y_1 = e I_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4}\right) = e I_1 \cos 2\pi\frac{t}{T},$$

wenn $\mathrm{tg}\,\varphi = e$ gesetzt wird, wo nun e zugleich das Verhältniss der Axen der Ellipse angiebt, in der die Schwingungen stattfinden.

Für die Zerlegung in circular polarisirtes Licht wird

$$z_1 = \frac{1}{2} r \sin 2\pi\frac{t}{T},\quad y_2 = \frac{1}{2} r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} r \cos 2\pi\frac{t}{T},$$

$$z_2 = \frac{1}{2} r \sin 2\pi\frac{t}{T},\quad y_1 = \frac{1}{2} r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} r \cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

Es ist klar, dass alle obigen Formeln noch gelten, wenn die anfängliche Schwingung um irgend eine Grösse E von der oben genommenen entfernt ist, man hat dann nur überall für $\frac{t}{T}$ zu setzen $\frac{t}{T} - \frac{E}{l}$.

Leicht ist nun zu übersehen, dass die hier gefundenen Schwingungen sich wiederum zusammensetzen zu $z = 2 I_1 \sin 2\pi\frac{t}{T}$ und $z = r \sin 2\pi\frac{t}{T}$.

2. Betrachtung von Lichtstrahlen, die eine zur Axe senkrecht geschliffene Quarzplatte vertical treffen.

Nach der von Fresnel aufgestellten Hypothese wird ein linear polarisirter Lichtstrahl beim Eintreten in einen Quarzkrystall in zwei circular polarisirte Strahlen zerlegt. Wenn demnach der eintretende Strahl gegeben ist durch

$$s = r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}\right),$$

wo der Einfachheit wegen unter der trigonometrischen Function ein Glied von der Form $\frac{E}{l}$ weggelassen bleibt, so wird dieser Strahl sich zerlegen in

$$z_1 = \frac{1}{2} r \sin 2\pi\frac{t}{T},\quad y_2 = -\frac{1}{2} r \cos 2\pi\frac{t}{T},$$

$$z_2 = \frac{1}{2} r \sin 2\pi\frac{t}{T},\quad y_1 = \frac{1}{2} r \cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

Wenn nun $\varDelta$ die Dicke der Platte bezeichnet und der zweite Strahl eine Verzögerung gegen den ersten erleidet, die mit D bezeichnet werden möge, so sind die Gleichungen für den den Krystall verlassenden Strahl

$$z_1 = \frac{1}{2} r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varDelta}{l}\right), \qquad y_2 = -\frac{1}{2} r \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varDelta}{l}\right),$$

$$z_2 = \frac{1}{2} r \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varDelta}{l} - D\right), \quad y_1 = \frac{1}{2} r \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varDelta}{l} - D\right).$$

Dieser Strahl setzt sich wiederum zu einem linear polarisirten zusammen. Sei nun φ der Winkel, den die Schwingungsebene dieses austretenden Strahles mit der des eintretenden bildet, so erhalten wir zur Bestimmung dieses Winkels eine Gleichung dadurch, dass wir die zu dieser Ebene senkrechte Componente gleich Null setzen. Es gilt demnach

$$z_1 \sin\varphi + z_2 \sin\varphi - y_2 \cos\varphi - y_1 \cos\varphi = 0.$$

Werden die Werthe von z_1, z_2, y_1, y_2 eingeführt, so liefert dies die Gleichung

$$\sin\varphi \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varDelta}{l}\right) + \sin\varphi \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varDelta}{l} - D\right)$$

$$+ \cos\varphi \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varDelta}{l}\right) - \cos\varphi \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\varDelta}{l} - D\right) = 0.$$

Daraus findet man mit Hülfe der bekannten Formeln für $\sin\alpha + \sin\beta$ und $\cos\alpha - \cos\beta$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\pi D.$$

Ist φ positiv (negativ), so geschieht die Drehung mit der (gegen die) Uhrzeigerdrehung und man unterscheidet rechts (links) drehende Krystalle.

Nach dem von Biot durch Experimente gefundenen Gesetz ist

$$\frac{D}{l} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\varDelta}{l^2},$$

wo h eine constante Grösse ist.

3. Die einfallenden Strahlen sind nicht senkrecht zur Platte.

Jeder linear polarisirte Lichtstrahl wird durch den Krystall in zwei elliptisch polarisirte Lichtstrahlen getheilt. Sei nun die Ebene des Hauptschnittes, der hier mit der Einfallsebene zusammenfällt, die zx Ebene und die Schwingungsebene des unregelmässig gebrochenen Strahles die zy Ebene. Ein eintretender linear polarisirter Strahl, für den wir die Amplitude gleich 1 setzen, und der dann gegeben ist durch

$$s = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}\right),$$

wo wiederum unter der trigonometrischen Function ein Glied $\frac{E}{l}$ weggelassen ist, zerfällt nach 1. in die Theilstrahlen

$$z_1 = I_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + v\right), \quad y_2 = -eI_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + v\right),$$

$$z_2 = I_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + v'\right), \quad y_1 = \varepsilon I_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + v'\right).$$

Bedenken wir, dass die beiden Strahlen für sehr flache Ellipsen endlich übergehen müssen in senkrecht zu einander polarisirte Strahlen, so müssen wir schliessen, dass die grosse Axe der einen Ellipse senkrecht stehen muss zu der der anderen, und da ferner die Grössen der Ellipsen für nahezu gleiche Einfallswinkel dieselben sein müssen, so werden e und ε reciproke Werthe sein, also $\varepsilon = \frac{1}{e}$. Wir bemerken ferner, dass wir, wenn wir einen entgegengesetzt drehenden Krystall haben, die Vorzeichen von y_2 und y_1 zu vertauschen haben, also setzen müssen $+e$ statt $-e$ und $-\frac{1}{e}$ statt $\varepsilon = \frac{1}{e}$.

I_1, I_2, v, v' sind die unbekannten Amplituden und Phasen, zu deren Bestimmung die Bedingung gegeben ist, dass diese Theilstrahlen zusammen den einfallenden bilden. Bezeichnen wir nun mit α den Winkel der ursprünglichen Schwingungsebene gegen die Einfallsebene, so erhalten wir zur Bestimmung der I_1, I_2, v, v' folgende Gleichungen:

$$z_1 \cos\alpha + z_2 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha + y_2 \sin\alpha = \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$z_1 \sin\alpha + z_2 \sin\alpha - y_1 \cos\alpha - y_2 \cos\alpha = 0.$$

Da diese Gleichungen gelten müssen für jeden Werth von $\frac{t}{T}$, so zerfallen sie in die folgenden, wo der Einfachheit wegen vor dem v und v' der Factor 2π weggelassen ist,

$$(I_1 \cos v + I_2 \cos v') \cos\alpha + \left(eI_1 \sin v - \frac{1}{e} I_2 \sin v'\right) \sin\alpha = 1.$$

$$(I_1 \sin v + I_2 \sin v') \cos\alpha - \left(eI_1 \cos v - \frac{1}{e} I_2 \cos v'\right) \sin\alpha = 0.$$

$$(I_1 \cos v + I_2 \cos v') \sin\alpha - \left(eI_1 \sin v - \frac{1}{e} I_2 \sin v'\right) \cos\alpha = 0.$$

$$(I_1 \sin v + I_2 \sin v') \sin\alpha + \left(eI_1 \cos v - \frac{1}{e} I_2 \cos v'\right) \cos\alpha = 0.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn den folgenden genügt wird:

$$I_1 \cos v + I_2 \cos v' = \cos\alpha, \quad eI_1 \sin v - \frac{1}{e} I_2 \sin v' = \sin\alpha,$$

$$I_1 \sin v + I_2 \sin v' = 0, \qquad eI_1 \cos v - \frac{1}{e} I_2 \cos v' = 0.$$

Daraus findet man

$$I_1 \sin v = -I_2 \sin v' = \frac{e}{e^2 + 1} \sin\alpha = ep \sin\alpha,$$

$$I_1 \cos v = \frac{1}{e^2} I_2 \cos v' = \frac{1}{e^2 + 1} \cos\alpha = p \cos\alpha,$$

wo p zur Abkürzung für $\frac{1}{e^2 + 1}$ gesetzt ist.

Die Einführung dieser Werthe in die Gleichungen der einzelnen Strahlen giebt

$$z_1 = p \cos\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T} + ep \sin\alpha \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$y_2 = -ep \cos\alpha \cos 2\pi \frac{t}{T} + e^2 p \sin\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$z_2 = e^2 p \cos\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T} - ep \sin\alpha \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$y_1 = ep \cos\alpha \cos 2\pi \frac{t}{T} + p \sin\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Wenn nun die Lichtstrahlen durch den Krystall gehen, so werden sie verschieden gebrochen, so dass dann beim Austreten (vergl. Figur 100) ein ordentlicher Strahl z_1, y_2 (OI) zur Interferenz kommt mit einem ausserordentlich gebrochenen z_2, y_1 (EI).

Bezeichnen wir den Gangunterschied mit $\frac{D'}{l}$, so haben wir für einen positiven Krystall nach 2. statt z_2, y_1 zu setzen die Werthe

$$z_2 = e^2 p \cos\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{D'}{l}\right) - ep \sin\alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{D'}{l}\right),$$

$$y_1 = ep \cos\alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{D'}{l}\right) + p \sin\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{D'}{l}\right).$$

Diese beiden Strahlen werden endlich durch den Analyseur zu einem geradlinig polarisirten Strahl vereinigt. Wenn nun α' den Winkel zwischen Einfallsebene und Schwingungsebene des den Analyseur verlassenden Strahles bezeichnet, so ist die gesammte Bewegung

$$z_1 \cos\alpha' + z_2 \cos\alpha' + y_1 \sin\alpha' + y_2 \sin\alpha'.$$

Die Intensität des austretenden Lichtes I^2 ist dann die Summe der Quadrate der Coefficienten von $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ und $\cos 2\pi \frac{t}{T}$.

Die Ausführung dieser Rechnung giebt nach einigen einfachen aber langen Transformationen

$$I^2 = p^2 (1 - e^2)^2 \cos^2(\alpha + \alpha') \sin^2\pi \frac{D'}{l}$$
$$+ p^2 \left[(1 + e^2) \cos(\alpha - \alpha') \cos\pi \frac{D'}{l} + 2e \sin(\alpha - \alpha') \sin\pi \frac{D'}{l}\right]^2.$$

Stehen die polarisirenden Apparate sich kreuzend, so ist $\alpha - \alpha' = 90^0$, mithin

$$I^2 = p^2 [4e^2 + (1 - e^2)^2 \sin^2 2\alpha'] \sin^2\pi \frac{D'}{l}$$
$$= \left[1 - \left(\frac{1 - e^2}{1 + e^2}\right)^2 \cos^2 2\alpha'\right] \sin^2\pi \frac{D'}{l}.$$

Sind die Apparate in der Parallelstellung, so ist $\alpha - \alpha' = 0$, mithin

$$I^2 = \cos^2\pi \frac{D'}{l} + \left(\frac{1 - e^2}{1 + e^2}\right)^2 \cos^2 2\alpha' \sin^2\pi \frac{D'}{l}.$$

Für die Mitte ist nach der vorigen Nummer $e = 1$, also

$$I^2 = \left\{\cos(\alpha - \alpha') \cos\pi \frac{D'}{l} + \sin(\alpha - \alpha') \sin\pi \frac{D'}{l}\right\}^2 = \cos^2\left(\alpha - \alpha' - \pi \frac{D'}{l}\right).$$

Wir bekommen dann $I = 0$, wenn

$$\alpha - \alpha' - \pi \frac{D'}{l} = 90^0 \text{ oder } \pi \frac{D'}{l} = (\alpha - \alpha') - 90^0,$$

d. h. den Drehungswinkel für die betreffende Farbe.

4. Discussion der erhaltenen Formeln.

Der im Obigen gefundene Ausdruck enthält die noch unbestimmte Grösse D'. In § 382, 2. ist für einaxige Krystallplatten, deren Dicke $\varDelta$ ist, gefunden worden

$$D = \frac{1}{2} \varDelta \sin^2 i \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_2}.$$

Dieser Werth muss den Experimentaluntersuchungen entsprechend hier noch ein additives Glied erhalten, denn es ist hier für $i = 0$ nicht $D' = 0$, sondern, wie in 2. angegeben ist, $= \frac{h}{2} \frac{\varDelta}{l}$. Wir setzen demnach

$$\frac{D'}{l} = \frac{1}{2} \varDelta \left[\sin^2 i \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_2 l} + \frac{h}{l^2} \right].$$

1) Für gekreuzte Stellung der polarisirenden Apparate ist nach 3.:

$$I^2 = \left[1 - \left(\frac{1 - e^2}{1 + e^2} \right)^2 \cos^2 2\alpha \right] \sin^2 2\pi \frac{D'}{l}.$$

Dieser Ausdruck wird gleich Null, wenn $\sin \pi \frac{D'}{l} = 0$ oder $\frac{D'}{l} = m$ und $m = 0, 1, 2, \ldots$ ist unabhängig von α, d. h. der Lage der Schwingungsebene des einfallenden Strahles gegen die Einfallsebene. Bei homogenem Licht erscheinen demnach helle und dunkle Ringe und bei zusammengesetztem Licht gefärbte Ringe, die nicht von einem dunklen Kreuz unterbrochen sind.

Die Intensität des Lichtes hängt dann noch von der Parenthese ab. Dieser Factor erreicht sein Min. (Max.), wenn $\cos 2\alpha = \pm 1$ (0) ist, d. h. wenn $2\alpha = 0, 180^0, 360^0, 540^0$ ($90^0, 270^0, 450^0, 630^0$) oder
$\alpha = 0, 90^0, 180^0, 270^0$ ($45^0, 135^0, 225^0, 315^0$).

Die Lichterscheinung hat also abwechselnd in den aufeinanderfolgenden Quadranten Min. und Max.

Verschwinden würde I, wenn $\cos 2\alpha = \frac{1 + e^2}{1 - e^2}$ wäre. Da nun $1 + e^2 > 1 - e^2$ ist, so kann dieser Winkel 2α nicht existiren, wenn aber e hinreichend klein wird, was in hinreichender Entfernung von der Mitte geschieht, ist $\cos 2\alpha = 1$, d. h. es wird dann das betreffende Min. fast Null. Es wird demnach die Ringerscheinung von einer gewissen Entfernung von der Mitte an durch vier fast dunkle Büschel unterbrochen.

Da übrigens in unsere Formel für I^2 das D' nur unter einem $\sin^2$ und auch die Grösse e nur im Quadrat vorkommt, so muss die Erscheinung für positive und negative Krystalle dieselbe sein.

2) Sind die polarisirenden Apparate einander parallel gestellt, so ist

$$I^2 = \cos^2 \pi \frac{D'}{l} + \left(\frac{1-e^2}{1+e^2}\right)^2 \cos^2 2\alpha \sin^2 \pi \frac{D'}{l}.$$

Man sieht leicht, dass dieser Werth zu dem vorigen I^2 addirt 1 giebt. Wir erhalten also hier die zu der vorigen complementäre Erscheinung.

3) Bei beliebiger Stellung der polarisirenden Apparate gegeneinander haben wir zu untersuchen die allgemeine Formel

$$I^2 = p^2 (1-e^2)^2 \cos^2(\alpha+\alpha') \sin^2 \pi \frac{D'}{l}$$
$$+ p^2 \left[(1+e^2) \cos(\alpha-\alpha') \cos \pi \frac{D'}{l} + 2e \sin(\alpha-\alpha') \sin \pi \frac{D'}{l}\right]^2.$$

Wenn wir hier nur zu berücksichtigen hätten die Phasenänderung $\frac{D'}{l}$, so würden die I^2 immer dieselben sein bei einem bestimmten D' und, da die Punkte, für welche D' denselben Werth behält, auf einem Kreise liegen, so würden die farbigen Ringe kreisförmig sein. Wir wollen nun im Folgenden, um die Form der hellen und dunklen Ringe kennen zu lernen, zunächst bei einer bestimmten Stellung der analysirenden Apparate annehmen, dass bei einer geringen Aenderung von D' das e unverändert bleibt, und dann suchen die Max. und Min. von I^2, also die hellsten und dunkelsten Curven.

Zur Vereinfachung unseres Ausdruckes für I^2 führen wir einen Winkel ψ ein, der definirt ist durch

$$\operatorname{tg}\psi = 2ep \operatorname{tg}(\alpha-\alpha'), \text{ also ist}$$

$$\cos(\alpha-\alpha') \cos\pi \frac{D'}{l} + 2ep \sin(\alpha-\alpha') \sin\pi \frac{D'}{l}$$
$$= \frac{\cos(\alpha-\alpha')}{\cos\psi} \cos\left(\psi - \pi\frac{D'}{l}\right)$$
$$= \cos\left(\psi - \pi\frac{D'}{l}\right)\sqrt{\cos^2(\alpha-\alpha') + 4n^2p^2\sin^2(\alpha-\alpha')}.$$

Dadurch erhalten wir

$$I^2 = p^2 (1-e^2)^2 \cos^2(\alpha+\alpha') \sin^2 \pi \frac{D'}{l}$$
$$+ [\cos^2(\alpha-\alpha') + 4n^2p^2\sin^2(\alpha-\alpha')] \cos^2\left(\psi - \pi\frac{D'}{l}\right)$$

oder abgekürzt

$$I^2 = p^2 \left[a \sin^2 \pi \frac{D'}{l} + b \cos^2\left(\psi - \pi\frac{D'}{l}\right)\right].$$

Für den geometrischen Ort der Maxima und Minima von I^2 haben wir also die Gleichung nach unserer oben gemachten Annahme

$$\frac{dI^2}{d\frac{D'}{l}} = 0, \text{ oder nach Division mit } p^2$$

$$a \sin 2\pi \frac{D'}{l} = b \sin 2\left(\psi - \pi\frac{D'}{l}\right).$$

Setzt man dann links

$$2\pi\frac{D'}{l} = \psi + \left(2\pi\frac{D'}{l} - \psi\right), \text{ so erhält man}$$

$$\operatorname{tg}\left(2\pi\frac{D'}{l} - \psi\right) = \frac{b+a}{b-a}\operatorname{tg}\psi.$$

Wird nun wiederum ein Winkel χ eingeführt, der definirt ist durch $\frac{b+a}{b-a}\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\chi$, so ist endlich, da wir noch statt ψ setzen können $\psi + m\pi$,

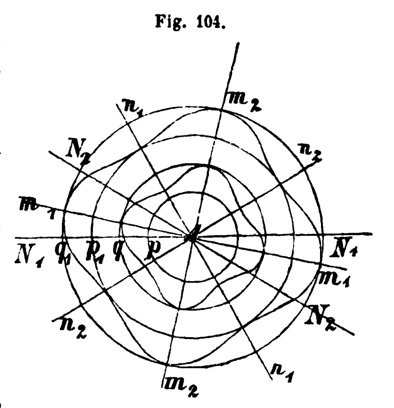
$$\operatorname{tg}\left(2\pi\frac{D'}{l} - \psi - m\pi\right) = \operatorname{tg}\chi \text{ oder}$$

$$2\pi\frac{D'}{l} = (\psi + m\pi) + \chi.$$

Dabei ist zu bedenken, dass, da e immer kleiner als 1 ist, b — a positiv ist, also tg χ, so lange tg ψ eine positive Grösse oder $\alpha - \alpha'$ ein spitzer Winkel ist, eine positive Grösse oder $\chi < \frac{1}{2}\pi$ sein muss.

Die erhaltenen Formeln lassen sich durch eine Figur veranschaulichen. Seien an Fig. 104 N_1N_1, N_2N_2 die Richtungen der Schwingungsebenen des in den Krystall eintretenden und des den Analyseur verlassenden Lichtes. Die um den Punkt A beschriebenen Kreise mit den Halbmessern Ap, Ap_1, Ap_2.. mögen gleichen Werthen von $2\pi\frac{D'}{l}$, nämlich ψ, $\psi+\pi$, $\psi+2\pi$.. entsprechen. Die diesen concentrischen Kreise mögen die Halbmesser $Aq=\psi+\frac{1}{2}\pi$, $Aq_1=\psi+\frac{3}{2}\pi$, $Aq_2=\psi+\frac{5}{2}\pi$.... haben. Da nun nach der letzten Gleichung für die Curven der grössten und geringsten Helligkeit $2\pi\frac{D'}{l}=(m\pi+\psi)+\chi$ und $\chi<\frac{1}{2}\pi$ ist, so müssen diese Curven immer zwischen zwei solchen concentrischen Kreisen pq, p_1q_1, p_2q_2.... liegen.

Fig. 104.



Um nun die grössten Aus- und Einbiegungen dieser Curven zu erhalten ist die Grösse χ weiter zu untersuchen; denn das Max. [Min.] χ wird die gesuchten Orte geben.

Es ist $\operatorname{tg}\chi = \frac{b+a}{b-a}\operatorname{tg}\psi$ und, da hier ψ und b als constant genommen und a den veränderlichen Factor $\cos^2(\alpha+\alpha')$ enthält, so findet man ein Max. [Min.] χ, wenn $\cos(\alpha+\alpha') = \pm 1$, [0] ist, d. h.

$\alpha + \alpha' = 0,\quad \pi;\qquad [\frac{1}{2}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi]$ oder wenn

$\alpha' = \frac{1}{2}(\alpha-\alpha'),\ \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha-\alpha');\ [\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}(\alpha-\alpha'),\ \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}(\alpha-\alpha')].$

Die grössten Ausbiegungen der Ringe befinden sich daher in der Rich-

tung $m_1 m_1$, welche den $\angle N_1 A N_2$ halbirt, und in der darauf senkrechten Richtung $m_2 m_2$; die grössten Einbiegungen in denjenigen Richtungen, welche die Quadranten zwischen $m_1 m_2$ halbiren d. i. in $n_1 n_1$, $n_2 n_2$. *Die* Ringe bekommen also eine Form, die einem Quadrat ähnlich ist, welches abgerundete Ecken hat.

5. Verbindung zweier entgegengesetzt drehender Quarzplatten von gleicher Dicke.

Nach 3. verlassen die erste Platte die Strahlen

$$z_1 = p \cos\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T} + e p \sin\alpha \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$y_2 = - e p \cos\alpha \cos 2\pi \frac{t}{T} + e^2 p \sin\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$z_2 = e^2 p \cos\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{D'}{l}\right) - e p \sin\alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{D'}{l}\right),$$

$$y_1 = e p \cos\alpha \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{D'}{l}\right) + p \sin\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{D'}{l}\right),$$

wo (z_1, y_2) und (z_2, y_1) die beiden elliptisch polarisirten Schwingungen bedeuten.

Diese Strahlen mögen nun in die zweite Platte, welche dieselbe Dicke wie die erste hat, eintreten, und es wird nun (z_1, y_2) und ebenso (z_2, y_1) abermals in zwei elliptisch polarisirte Strahlen zerlegt, die aber die entgegengesetzte Drehung haben.

Der aus z_1, y_2 entstehende Strahl werde bezeichnet durch (z_1', y_2'), (z_2', y_1') und der aus z_2, y_1 hervorgehende durch (z_1'', y_2''), (z_2'', y_1''). Die entgegengesetzte Drehung wird nach 3. ausgedrückt dadurch, dass wir e und $\frac{1}{e}$ vertauschen mit $-$ e und $-\frac{1}{e}$.

Wenn wir ferner $2\pi \frac{t}{T} = \xi$ zur Abkürzung einführen, erhalten wir zunächst

$$z_1' = I_1' \sin(\xi + v), \quad y_2' = e I_1' \cos(\xi + v),$$

$$z_2' = I_2' \sin(\xi + v'), \quad y_1' = -\frac{1}{e} I_2' \cos(\xi + v').$$

Zur Bestimmung der darin enthaltenen Unbekannten gilt

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1' + z_2', \\ &= (I_1' \cos v + I_2' \cos v') \sin\xi + (I_1' \sin v + I_2' \sin v') \cos\xi, \\ y_2 &= y_1' + y_2', \\ &= \left(- e I_1' \sin v + \frac{1}{e} I_2' \sin v'\right) \sin\xi + \left(e I_1' \cos v - \tfrac{1}{e} I_2' \cos v'\right) \cos\xi. \end{aligned}$$

Dies giebt durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\sin\xi$ und $\cos\xi$

$$I_1' \cos v + I_2' \cos v' = p \cos\alpha,$$

$$I_1' \sin v + I_2' \sin v' = e p \sin\alpha,$$

$$-e\,I_1'\sin v+\frac{1}{e}\,I_2'\sin v'=e^2 p\sin\alpha,$$

$$e\,I_1'\cos v-\frac{1}{e}\,I_2'\cos v'=-e\,p\cos\alpha.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert

$$I_1'\cos v=(1-e^2)\,p^2\cos\alpha,\quad I_2'\cos v'=2e^2p^2\cos\alpha,$$
$$I_1'\sin v=(1-e^2)\,e\,p^2\sin\alpha,\quad I_2'\sin v'=2e^3p^2\sin\alpha.$$

Beim Austritt aus der zweiten Platte hat man demnach, wenn noch zur Abkürzung für $2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{D'}{l}\right)$ gesetzt wird ξ_2,

$$\begin{aligned}
z_1' &= \quad (1-e^2)\,p^2\cos\alpha\sin\xi+(1-e^2)\,e\,p^2\sin\alpha\cos\xi,\\
y_2' &= -(1-e^2)\,e^2p^2\sin\alpha\sin\xi+(1-e^2)\,e\,p^2\cos\alpha\cos\xi,\\
z_2' &= \quad 2e^2p^2\cos\alpha\sin\xi_2\quad+2e^3p^2\sin\alpha\cos\xi_2,\\
y_1' &= \quad 2e^2p^2\sin\alpha\sin\xi_2\quad-2e\,p^2\cos\alpha\cos\xi_2.
\end{aligned}$$

Ganz ebenso erhalten wir

$$z_1''=I_1''\sin(\xi+v_1),\quad y_2''=e\,I_1''\cos(\xi+v_1),$$

$$z_2''=I_2''\sin(\xi+v_1'),\quad y_1''=-\frac{1}{e}\,I_2''\cos(\xi+v_1')$$

und dann aus $z_2=z_1''+z_2''$ und $y_1=y_2''+y_1''$

$$I_1''\cos v_1=2e^2p^2\cos\alpha,\qquad I_1''\sin v_1=-2e\,p^2\sin\alpha,$$
$$I_2''\cos v_1'=-(1-e^2)\,e^2p^2\cos\alpha,\quad I_2''\sin v_1'=(1-e^2)\,e\,p^2\sin\alpha.$$

Die austretenden Strahlen sind dann, wenn noch $2\pi\left(\frac{t}{T}+2\,\frac{D'}{l}\right)$ mit ξ_4 bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}
z_1'' &= 2e^2p^2\cos\alpha\sin\xi_2 \qquad -2e\,p^2\sin\alpha\cos\xi_2,\\
y_2'' &= 2e^2p^2\sin\alpha\sin\xi_2 \qquad -2e^3p^2\cos\alpha\cos\xi_2,\\
z_2'' &= -(1-e^2)\,e^2p^2\cos\alpha\sin\xi_4+(1-e^2)\,e\,p^2\sin\alpha\cos\xi_4,\\
y_1'' &= (1-e^2)\,p^2\sin\alpha\sin\xi_4 \quad +(1-e^2)\,e\,p^2\cos\alpha\cos\xi_4.
\end{aligned}$$

Für die gekreuzte Stellung der Polarisationsapparate ist $\alpha-\alpha'=90^0$, also

$$\sin\alpha=\cos\alpha',\quad \cos\alpha=-\sin\alpha'.$$

Die durch den Analyseur vereinigte resultirende Schwingung ist endlich

$$(z_1'+z_2'+z_1''+z_2'')\cos\alpha'+(y_1'+y_2'+y_1''+y_2'')\sin\alpha'.$$

Dies setzen wir zur Abkürzung gleich $M\sin\xi+N\cos\xi$.

Die zu untersuchende Intensität ist dann

$$I^2=M^2+N^2.$$

6. Discussion der erhaltenen Formeln.

Es muss zunächst unsere Aufgabe sein, die Werthe M und N und dadurch I zu bestimmen. Die Einsetzung der berechneten Werthe in die letzten Formeln giebt nach einigen einfachen aber langen Transformationen

$$I^2=p^4(1-e^2)^2\times$$
$$\left[4e\cos2\alpha'\sin\pi\frac{D'}{l}-2(1+e^2)\sin2\alpha'\cos\pi\frac{D'}{l}\right]^2\sin2\pi\frac{D'}{l}.$$

Diese Formel ergiebt nun

A) $I = 0$, wenn $e = 1.$, d. i. die Mitte der Platten ist für alle Farben dunkel.

B) $I = 0$, wenn $\sin \pi \frac{D'}{l} = 0$. Dies ist dieselbe Bedingung wie für die dunklen Ringe bei nur einer Platte.

C) $I = 0$, wenn ist

$$4 e \cos 2\alpha' \sin \pi \frac{D'}{l} = 2 (1 + e^2) \sin 2\alpha' \cos \pi \frac{D'}{l}$$

oder

$$\operatorname{tg} \pi \frac{D'}{l} = \frac{(1 + e^2)}{2e} \operatorname{tg} 2\alpha'.$$

Da nun e nicht weit von der Mitte nur wenig von 1 verschieden ist, so können wir angenähert schreiben

$$\operatorname{tg} \pi \frac{D'}{l} = \operatorname{tg} 2\alpha'$$

oder

$$\pi \frac{D'}{l} = 2\alpha' + m\pi, \; m = 0, 1. 2. 3 ..$$

Das ist nach 4.

$$\tfrac{1}{2} \Delta \left[\sin^2 i \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_2^2} + \frac{h}{l^2} \right] = 2\alpha' + m\pi.$$

Da nun die Grösse links mit zunehmendem i wächst, so muss auch α' mit dem Einfallswinkel wachsen. Die Punkte, welche obiger Bedingung genügen, müssen demnach auf einer Spirale liegen.

Setzen wir nun $\alpha' = \alpha'' + \tfrac{1}{2} m'\pi$, so ist

$$\operatorname{tg} \pi \frac{D'}{l} = \operatorname{tg} (2\alpha'' + m'\pi + m\pi).$$

Setzen wir dann $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$, so finden wir, dass wir damit wieder auf einen schon oben erhaltenen Werth α' zurückkommen, womit nachgewiesen ist, dass nur vier von einander verschiedene Werthe von α' der obigen Bedingung genügen und zwar sind die einander benachbarten Werthe von α' um 90^0 von einander verschieden.

Zur Bestimmung der Ausgangspunkte der Spiralen erhalten wir eine Gleichung, wenn wir in dem obigen allgemeinen Ausdruck für α' setzen $i = 0$. Diese Bestimmungsgleichung ist dann

$$\frac{h \pi \Delta}{l^3} = 2\alpha' + m\pi.$$

D) In grösseren Entfernungen von der Mitte wird e grösser, es wird demnach I wieder sehr klein werden, wenn $\sin 2\alpha' = 0$. Dies erklärt die dort auftretenden dunklen Büschel.

Sind die Platten umgekehrt gelegen, so hat man überall zu setzen $-e$ statt e.

Es mag zum Schluss bemerkt werden, dass hierdurch auch die Erscheinung erklärt ist, die man beobachtet, wenn elliptisch polarisirtes Licht auf eine Quarzplatte trifft.

Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.







